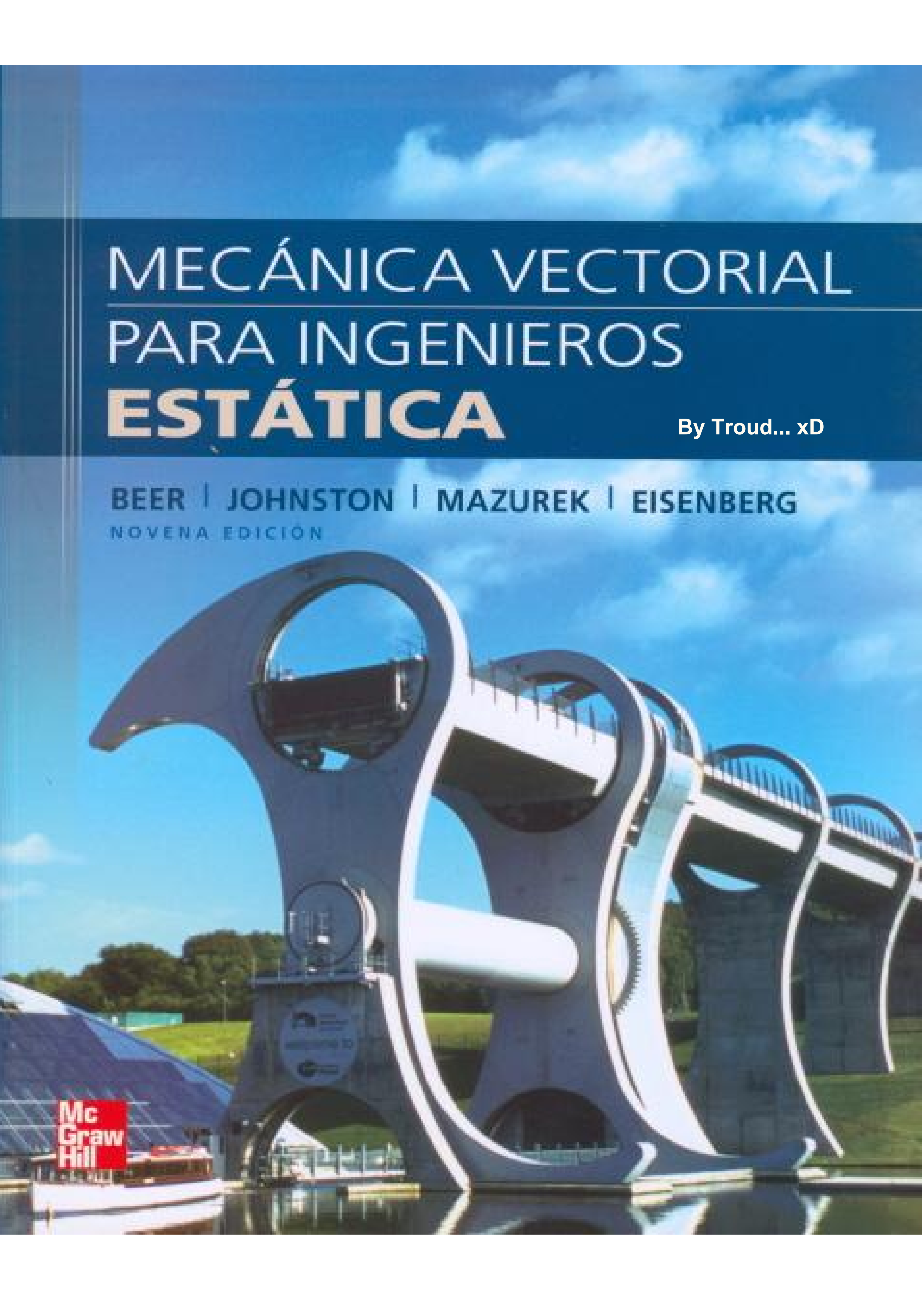
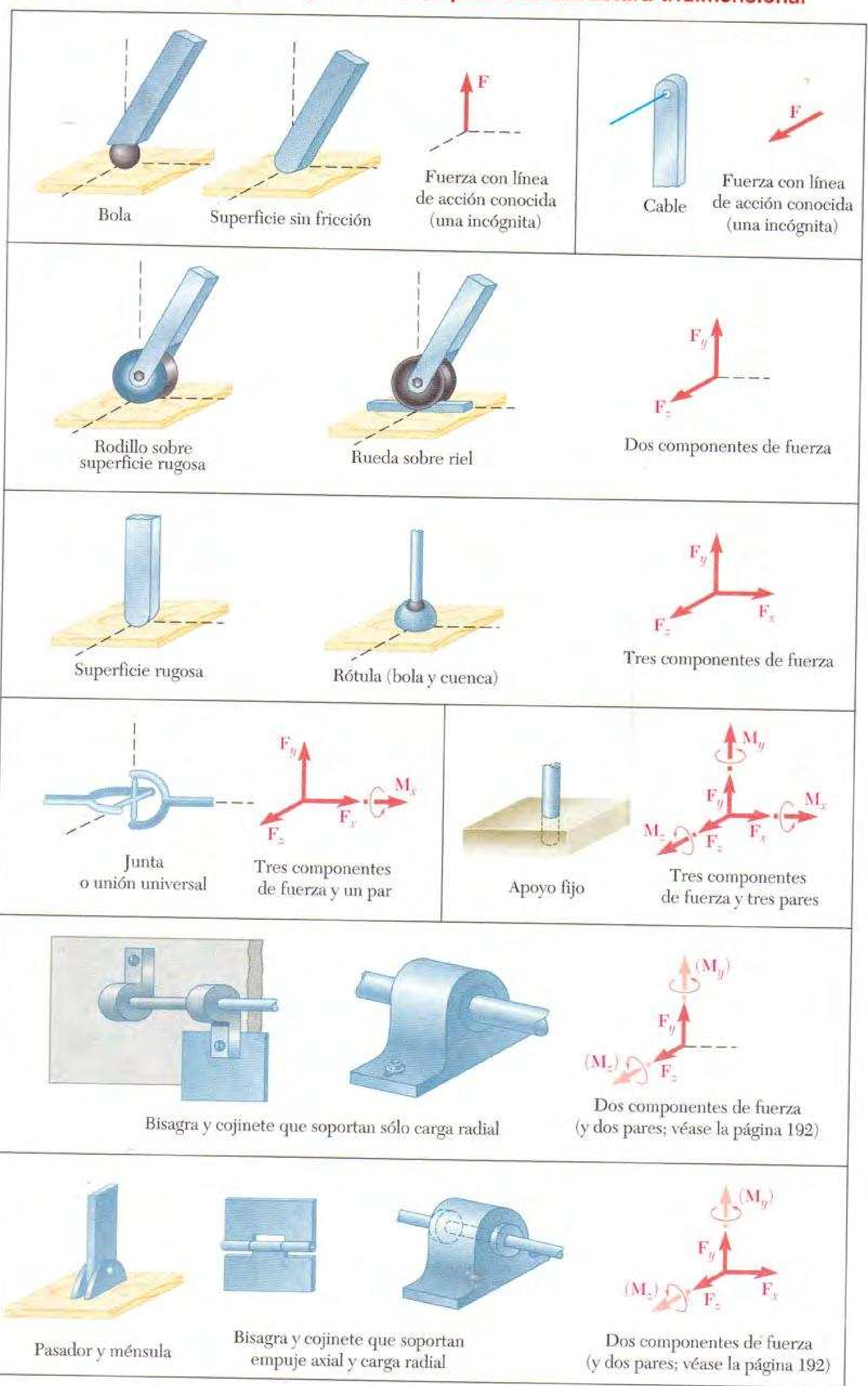

MECÁNICA VECTORIAL
PARA INGENIEROS
ESTÁTICA
By Troud... xD
BEER | JOHNSTON | MAZUREK | EISENBERG
NOVENA EDICIÓN
Mc
Graw
Hill

Reacciones en los apoyos y conexiones para una estructura bidimensional

Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
Rodillos o patines; Balancín; Superficie sin fricción	Fuerza con línea de acción conocida	1
Cable corto; Eslabón corto	Fuerza con línea de acción conocida	1
Collarín sobre una barra sin fricción; Perno sin fricción en una ranura lisa	90° Fuerza con línea de acción conocida	1
Perno sin fricción, articulación o bisagra; Superficie rugosa	o α Fuerza de dirección desconocida	2
Apoyo fijo	o α Fuerza y par	3

El primer paso para la solución de cualquier problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es la construcción de un diagrama de cuerpo libre apropiado. Como parte de este proceso es necesario mostrar en el diagrama las reacciones a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen al posible movimiento del cuerpo. En las figuras de esta página y la siguiente se resumen, respectivamente, las posibles reacciones ejercidas en cuerpos bidimensionales y tridimensionales.

Reacciones en los soportes y conexiones para una estructura tridimensional



REVISIÓN TÉCNICA

ARGENTINA

Ricardo Bosco	*Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires*

COLOMBIA

Carlos Eduardo Muñoz Rodríguez	*Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá*
Jaime Guillermo Guerrero Casadiego	*Universidad Nacional de Colombia*
Rubén Darío Arboleda Vélez	*Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín*
Wilson Rodríguez Calderón	*Universidad de la Salle, Bogotá*

MÉXICO

Antonio Rubén Benítez Gasca	*Universidad Veracruzana*
Carlos Mellado Osuna	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus La Marina*
Constantino Anaya Hill	*Instituto Tecnológico de Culiacán*
Danelia Hernández Suárez	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad Obregón*
Eduardo Soberanes Lugo	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Sinaloa*
Francisco Terán Arévalo	*Instituto Tecnológico Regional de Chihuahua*
Gerardo Gaytán Guerra	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca*
Gladys Karina Ruiz Vargas	*Universidad Anáhuac, campus Norte*
Ignacio Ramírez Vargas	*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Hidalgo*
José Antonio Corona López	*Instituto Tecnológico de Veracruz*
José Luis Carranza Santana	*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional*
Juan Abugaber Francis	*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional*
Juan Ocáriz Castelazo	*Universidad Nacional Autónoma de México*
Klara Goiz Hernández	*Universidad Autónoma de Sinaloa*
Luis Adolfo Torres González	*Universidad Iberoamericana, campus León*
Martín Darío Castillo Sánchez	*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional*
Raúl Escalante Rosas	*Universidad Nacional Autónoma de México*
Raúl Soto López	*Universidad de Occidente, campus Culiacán*
Roberto Carlos Tinoco Guevara	*Universidad Iberoamericana, campus Ciudad de México*

Novena edición

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Estática

FERDINAND P. BEER (finado)
Late of Lehigh University

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
University of Connecticut

DAVID F. MAZUREK
U.S. Coast Guard Academy

ELLIOT R. EISENBERG
The Pennsylvania State University



Revisión técnica:
Javier León Cárdenas
Universidad La Salle, campus Ciudad de México

Felipe de Jesús Hidalgo Cavazos
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey campus Monterrey



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo Eduardo Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Jesús Elmer Murrieta Murrieta

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS
ESTÁTICA
Novena edición



Corporativo Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

La sección de créditos de este libro comienza en la página 603 y es considerada como una extensión de la página legal.

ISBN-13: 978-607-15-0277-3
(ISBN: 970-10-6103-9 edición anterior)

Traducido de la novena edición de Vector mechanics for engineers. Statics, ninth edition.

ISBN: 0-07-352923-0

1234567890 109876543210

Impreso en China *Printed in China*

Acerca de los autores

Los autores de esta obra con frecuencia son cuestionados acerca de cómo fue que, estando uno en Lehigh y otro en la University of Connecticut, empezaron a escribir sus libros juntos y cómo logran seguir colaborando en las revisiones subsecuentes.

La respuesta a estas preguntas es sencilla. Russ Johnston inició su carrera académica en el departamento de ingeniería civil y mecánica de Lehigh University y allí conoció a Ferd Beer, quien había comenzado a trabajar en ese departamento dos años antes y estaba a cargo de los cursos de mecánica.

Ferd se sintió muy complacido al descubrir que el joven contratado para impartir cursos de ingeniería estructural a nivel de posgrado no sólo estaba dispuesto, sino también ansioso por ayudarlo a reorganizar los cursos de mecánica. Ambos creían que dichos cursos deberían impartirse a partir de unos cuantos principios básicos, y que los distintos conceptos involucrados serían mejor comprendidos y recordados por los estudiantes si se les presentaban en forma gráfica. Juntos escribieron apuntes para las clases de estática y dinámica, a los cuales posteriormente agregaron problemas que supusieron resultarían interesantes para los futuros ingenieros, y poco después produjeron el manuscrito de la primera edición de *Mecánica para ingenieros*.

Al publicarse la segunda edición de *Mecánica para ingenieros* y la primera de *Mecánica vectorial para ingenieros*, Russ Johnston estaba en el Worcester Polytechnic Institute y para las ediciones subsecuentes en la University de Connecticut. Mientras tanto, Ferd y Russ habían asumido funciones administrativas en sus respectivos departamentos y se dedicaban a la investigación, la consultoría, y a asesorar estudiantes de posgrado —Ferd en el área de procesos estocásticos y vibraciones aleatorias y Russ en la de estabilidad elástica y en diseño y análisis estructurales—. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había disminuido y continuaron impartiéndolos mientras revisaban sus libros y comenzaban a escribir el manuscrito de la primera edición de *Mecánica de materiales*.

La colaboración entre estos dos autores ha abarcado muchos años y muchas revisiones exitosas de todos sus libros, y las contribuciones de Ferd y Russ a la educación en ingeniería los han hecho acreedores de numerosas distinciones y reconocimientos. Recibieron el Western Electric Fund Award por parte de sus respectivas secciones regionales de la American Society for Engineering Education por su excelencia en la instrucción de estudiantes de ingeniería y, además, el Distinguished Educator Award de la división de mecánica de esa misma asociación. A partir de 2001, el reconocimiento denominado New Mechanics Educator Award de la división de mecánica ha sido nombrado Beer and Johnston en honor a estos autores.

Ferdinand P. Beer. Nacido en Francia y educado en Francia y Suiza, obtuvo una maestría en La Sorbona y un doctorado en ciencias en el área de mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Emigró a Estados Unidos después de servir en el ejército francés durante la primera parte de la Segunda Guerra Mundial, e impartió clases por cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de ingeniería y artes Williams-MIT. Después de su servicio en el Williams College, Ferd ingresó al profesorado de Lehigh University donde enseñó durante 37 años. Ocupó varios puestos, incluyendo el de profesor distinguido de la universidad y director del departamento de mecánica e ingeniería mecánica. En 1995 recibió un grado honorario de Doctor en Ingeniería por la Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nacido en Filadelfia, Russ posee un título de ingeniero civil de la University of Delaware y un doctorado en ciencias en el área de ingeniería estructural del Massachusetts Institute of Technology. Impartió clases en Lehigh University y en Worcester Polytechnic Institute antes de ingresar al profesorado de la University of Connecticut, donde ocupó el puesto de director del departmento de ingeniería civil y enseñó durante 26 años. En 1991 recibió el Outstanding Civil Engineer Award, sección Connecticut, que otorga la American Society of Civil Engineers.

David F. Mazurek. Posee una licenciatura en ingeniería oceánica y una maestría en ingeniería civil del Florida Institute of Technology, además de un doctorado en ingeniería civil de la University of Connecticut. Fue empleado por la Electric Boat Division of General Dynamics Corporation e impartió clases en Lafayette College antes de pertenecer a la U. S. Coast Guard Academy, en donde ha estado desde 1990. Ha prestado sus servicios en American Railway Engineering y Maintenance of Way Association's Committee 15—Steel Structures durante los últimos 14 años. Su interés profesional incluye la ingeniería de puentes, torres esbeltas, ciencia forense estructural y diseño resistente a explosiones.

Elliot R. Eisenberg. Posee una licenciatura y una maestría en ingeniería, ambas de la Cornell University. Elliot ha enfocado sus actividades en el servicio profesional y la enseñanza; en 1992 su trabajo fue reconocido por la American Society of Mechanical Engineers al distinguirlo con la medalla Ben C. Sparks por sus contribuciones a la ingeniería mecánica y a la educación en tecnología de la ingeniería mecánica, así como por sus servicios en la American Society for Engineering Education. Elliot impartió clases durante 32 años, incluyendo 29 en Penn State donde se le han otorgado premios por enseñanza y asesoría.

Contenido

3
CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA
73

4
EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS
157

5
FUERZAS DISTRIBUIDAS : CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD
219

6
ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS
285

7
FUERZAS EN VIGAS Y CABLES
353

8
FRICCIÓN
411

9
FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA
471

Prefacio

OBJETIVOS

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos. Se espera que este texto, diseñado para un primer curso de estática, así como el libro complementario, *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*, permitirán que el profesor alcance este objetivo.

ENFOQUE GENERAL

En la parte inicial del texto se introduce el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la mecánica. Los métodos vectoriales se usan también para resolver diversos problemas, especialmente en tres dimensiones, donde estas técnicas permiten obtener la solución de un modo más conciso y simple. Sin embargo, el énfasis del libro se mantiene en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta práctica.

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial. Una de las características del enfoque usado en estos tomos es que la mecánica de *partículas* se ha separado en forma clara de la mecánica de *cuerpos rígidos*. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *Estática*, la estática de partículas se estudia primero (capítulo 2), después de haber presentado las reglas para la suma y resta de vectores, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucran sólo fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se introducen los productos escalar y vectorial de dos vectores y se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje. La

presentación de estos nuevos conceptos es seguida por la exposición rigurosa y completa de los sistemas de fuerzas equivalentes que conducen, en el capítulo 4, a muchas aplicaciones prácticas que involucran el equilibrio de cuerpos rígidos bajo la acción de sistemas generales de fuerzas.

- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y momentum, y se aplican en primera instancia a la resolución de problemas que sólo involucran partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica, y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples. Como este texto está diseñado para un primer curso sobre estática, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanza una madurez definitiva al analizar los aspectos más relevantes de los problemas considerados, y al ampliar los métodos de aplicabilidad general. Por ejemplo, los conceptos de restricciones parciales y de indeterminación estática se introducen al principio del texto para ser usados en todo el libro.

Los principios fundamentales se ubican en el contexto de aplicaciones simples. Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido a este nivel. Sin embargo, en virtud de que el proceso de aprendizaje es primordialmente *inductivo*, las aplicaciones más simples se consideran primero. Por ejemplo:

- La estática de partículas antecede a la estática de cuerpos rígidos, y los problemas que involucran fuerzas internas se posponen hasta el capítulo 6.
- En el capítulo 4 se consideran primero los problemas de equilibrio que involucran sólo a fuerzas coplanares, y se resuelven por medio del álgebra ordinaria, mientras que los problemas que involucran fuerzas tridimensionales, los cuales requieren el uso completo del álgebra vectorial, se exponen en la segunda parte de dicho capítulo.

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introducen al principio y se enfatiza su importancia a lo largo de todo el texto. No sólo se emplean para resolver problemas de equilibrio sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los princi-

pios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en las "ecuaciones de diagramas de cuerpo libre" en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido hasta la fecha una amplia aceptación entre los profesores de mecánica en Estados Unidos. Por tanto, para la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se utilizan presentaciones en distintos tonos para distinguir los vectores. El color se ha usado no sólo para mejorar la calidad de las ilustraciones, sino también para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden encontrar. En virtud de que no había intención de establecer un código de color para el texto, en un capítulo dado se utiliza el mismo color para representar el mismo tipo de vector. Por ejemplo, a lo largo del tomo de *Estática*, el rojo se utiliza en forma exclusiva para representar fuerzas y pares, mientras que los vectores de posición se muestran en azul y las dimensiones en negro. Esto vuelve más fácil para los estudiantes identificar las fuerzas que actúan sobre una partícula o cuerpo rígido dados y comprender los problemas resueltos y otros ejemplos proporcionados en el libro.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades SI y unidades de uso común en Estados Unidos. Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de Unidades (unidades métricas SI), las unidades SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y 60 por ciento de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que se adecuará mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa más que aplicar factores de conversión. Como el sistema de unidades SI es absoluto basado en el tiempo, la longitud y la masa, mientras que el sistema inglés es un sistema gravitacional basado en el tiempo, la longitud y la fuerza, se requieren diferentes enfoques para la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayor parte de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades de uso común en Estados Unidos, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$). Por tanto, los autores creen que los problemas que se les asignen a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de estática. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las secciones adicionales se encuentran la reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión, aplicaciones a hidrostática, diagramas de fuerza cortante y momento flector, equilibrio de cables, productos de inercia y círculo de Mohr, la determinación de los ejes principales y momentos de inercia de un cuerpo en forma arbitraria, y el método del trabajo virtual. Las secciones sobre vigas son especialmente útiles cuando el curso de estática es seguido inmediatamente por un curso de mecánica de materiales, mientras que las partes que tratan acerca de las propiedades de inercia de cuerpos tridimensionales fueron pensadas primordialmente para los estudiantes que después estudiarán, en dinámica, el movimiento tridimensional de cuerpos rígidos.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo elemental; todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3. En general, se pone mayor énfasis en la comprensión adecuada de los conceptos matemáticos básicos incluidos que en la manipulación de fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.

ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOS Y CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Introducción del capítulo. Cada capítulo comienza con una introducción que establece el propósito y los objetivos del mismo, y en donde se describe en términos sencillos el material que será cubierto y sus aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería. Los lineamientos del capítulo proporcionan a los estudiantes una visión previa de los tópicos que éste incluye.

Lecciones en el capítulo. El cuerpo del texto está dividido en unidades, cada una de las cuales consiste en una o más secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos, y una gran cantidad de problemas de tarea. Cada unidad corresponde a un tema bien definido que, por lo general, puede ser cubierto en una lección. Sin embargo, en ciertos casos el profesor encontrará que es deseable dedicar más de una lección a un tópico en particular.

Problemas resueltos. Los problemas resueltos se plantean de manera muy similar a la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas que se les asignen. Por tanto, estos problemas cumplen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar la forma de traba-

jo clara y ordenada que los estudiantes deben cultivar en sus propias soluciones.

Resolución de problemas en forma independiente. Entre los problemas resueltos y los de tarea, para cada lección se incluye una sección titulada *Resolución de problemas en forma independiente*. El propósito de estas secciones es ayudar a los estudiantes a organizar mentalmente la teoría ya cubierta en el texto y los métodos de resolución de los problemas resueltos, de manera que puedan resolver con mayor éxito los problemas de tarea. Además, en estas secciones también se incluyen sugerencias y estrategias específicas que les permitirán enfrentar de manera más eficiente cualquier problema que se les asigne.

Series de problemas de tarea. La mayoría de los problemas son de naturaleza práctica y deben llamar la atención del estudiante de ingeniería. Sin embargo, están diseñados para ilustrar el material presentado en el texto y para ayudar a los estudiantes a comprender los principios de la mecánica. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las partes del material que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente. Los problemas que requieren atención especial están señalados con asteriscos. Al final del texto se proporcionan las respuestas correspondientes a 70 por ciento de los problemas propuestos; y aquellos para los cuales no se da respuesta se indican en el libro escribiendo su número en cursivas.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo finaliza con un repaso y un resumen del material cubierto en el mismo. Las notas al margen se utilizan para ayudar al estudiante a organizar su trabajo de revisión, además se han incluido referencias cruzadas para ayudarlos a encontrar las partes de material que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye un grupo de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. Cada capítulo incluye un grupo de problemas diseñados para ser resueltos mediante programas de computadora. Muchos de estos problemas son importantes para el proceso de diseño. En estática, por ejemplo, pueden implicar el análisis de una estructura para diferentes configuraciones y cargas o la determinación de las posiciones de equilibrio de un mecanismo que puede requerir un método iterativo de solución. El desarrollo del algoritmo necesario para resolver un problema de mecánica dado beneficiará a los estudiantes en dos formas diferentes: 1) les ayudará a lograr una mejor comprensión de los principios de la mecánica involucrados; 2) les proporcionará la oportunidad de aplicar sus habilidades con la computadora para encontrar la solución de un problema relevante de ingeniería.

MATERIALES DE APOYO

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de éstos,

mismos que se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

CONEXIÓN CON LA INGENIERÍA DE McGRAW-HILL

La conexión de McGraw-Hill con la ingeniería (*McGraw-Hill Connect Engineering*) es una plataforma de tareas y evaluación que proporciona a los estudiantes los medios para conectarse de mejor manera con su curso, sus profesores y los conceptos importantes que necesitarán conocer para su éxito en la actualidad y en el futuro. Mediante la Conexión con la Ingeniería, los profesores pueden entregar con facilidad tareas, tests y exámenes en línea. Los estudiantes pueden practicar habilidades importantes a su propio ritmo y de acuerdo con su propio programa.

La Conexión con la Ingeniería de *Mecánica vectorial para ingenieros* está disponible en **www.mhhe.com/beerjohnston** e incluye problemas algorítmicos del texto, presentaciones en PowerPoint, un banco de imágenes y animaciones.

OPCIONES DE LIBRO ELECTRÓNICO

Los libros electrónicos son una forma innovadora de ahorrarle dinero a los estudiantes y al mismo tiempo crear un medio ambiente más verde. Un libro electrónico puede ahorrarles a los estudiantes cerca de la mitad del costo de un libro de texto tradicional y ofrece características únicas como un poderoso dispositivo de búsqueda, texto resaltado y la capacidad de compartir notas con compañeros de clase que usan libros electrónicos.

McGraw-Hill ofrece dos opciones de libros electrónicos: la compra de un libro descargable de VitalSource o una suscripción al libro de CourseSmart. Para conocer más acerca de las opciones de libros electrónicos, contacte a su distribuidor de McGraw-Hill o visite los sitios en **www.vitalsource.com** y **www.coursesmart.com**.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer de manera especial a Amy Mazurek del Williams Memorial Institute que verificó las soluciones y respuestas de todos los problemas de esta edición y después preparó las soluciones del *Manual para el instructor y de soluciones* adicional al texto; Yohannes Ketema de la University of Minnesota; David Oglesby de la University of Missouri-Rolla; y Daniel W. Yannitell de la Lousiana State University.

Es un placer reconocer el trabajo de Dennis Ormond de Fine Line Illustrations por las artísticas ilustraciones que contribuyen en gran medida a la efectividad del texto.

Los autores agradecen a las diferentes compañías que proporcionaron fotografías para esta edición. También desean reconocer el esfuerzo determinado y la paciencia de Sabina Dowell, quien seleccionó las fotografías.

Un agradecimiento también a los miembros de la organización de McGraw-Hill por su apoyo y dedicación durante la preparación de

esta nueva edición. En particular se agradecen las contribuciones del editor responsable Bill Stenquist, la editora de desarrollo Lara Neveas y la gerente de proyecto Sheila Frank.

Por último, los autores desean expresar su gratitud por los numerosos comentarios y sugerencias que han sido proporcionados por los usuarios de las ediciones anteriores de *Mecánica vectorial para ingenieros*.

E. Russell Johnston, Jr.
David F. Mazurek
Elliot R. Eisenberg

Lista de símbolos

a	Constante; radio; distancia
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	Reacciones en apoyos y uniones
$A, B, C, \ldots$	Puntos
A	Área
b	Ancho; distancia
c	Constante
C	Centroide
d	Distancia
e	Base de logaritmos naturales
$\mathbf{F}$	Fuerza; fuerza de fricción
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; constante de gravitación
h	Altura; flecha de un cable
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados
$I, I_x, \ldots$	Momentos de inercia
$\bar{I}$	Momento de inercia centroidal
$I_{xy}, \ldots$	Productos de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de un resorte
k_x, k_y, k_O	Radios de giro
$\bar{k}$	Radios de giro centroidal
l	Longitud
L	Longitud; claro
m	Masa
$\mathbf{M}$	Momento par
$\mathbf{M}_O$	Momento con respecto al punto O
$\mathbf{M}_O^R$	Momento resultante con respecto al punto O
M	Magnitud de un par o de un momento; masa de la Tierra
M_{OL}	Momento con respecto al eje OL
$\mathbf{N}$	Componente normal de una reacción
O	Origen de coordenadas
p	Presión
$\mathbf{P}$	Fuerza; vector
$\mathbf{Q}$	Fuerza; vector
$\mathbf{r}$	Vector de posición
r	Radio; distancia; coordenada polar
$\mathbf{R}$	Fuerza resultante; vector resultante; reacción

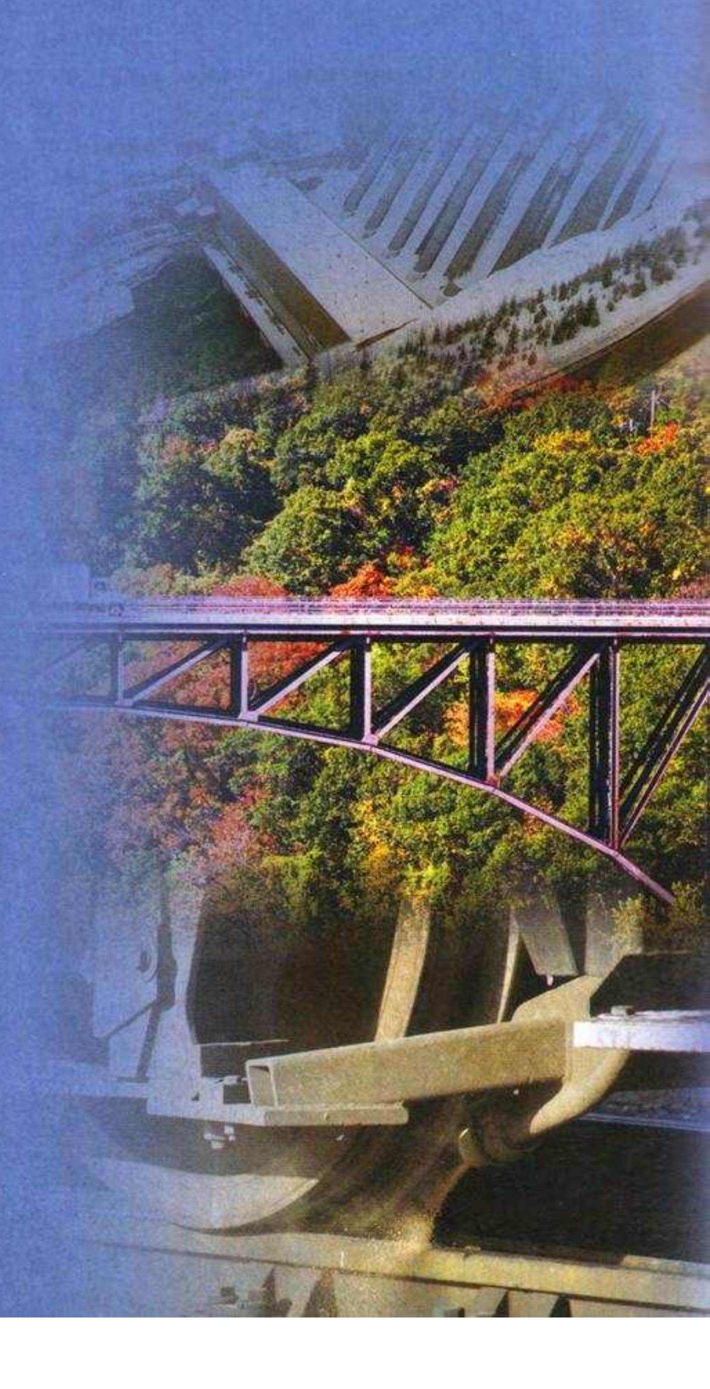


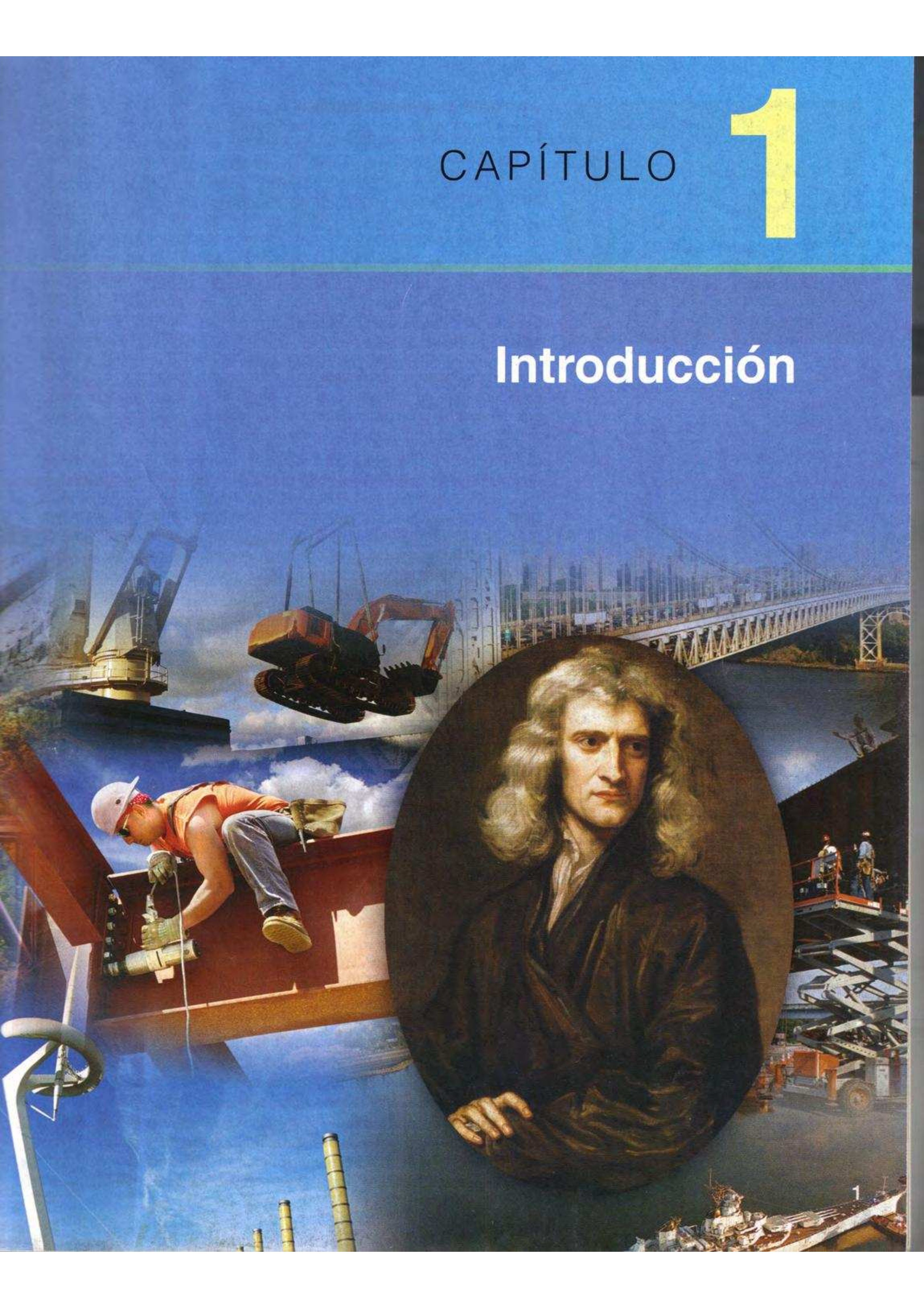
R	Radio de la Tierra
$\mathbf{s}$	Vector de posición
s	Longitud de arco; longitud de un cable
$\mathbf{S}$	Fuerza; vector
t	Espesor
$\mathbf{T}$	Fuerza
T	Tensión
U	Trabajo
$\mathbf{V}$	Producto vectorial; fuerza constante
V	Volumen; energía potencial; cortante
w	Carga por unidad de longitud
$\mathbf{W}, W$	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas rectangulares; distancias
$\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$	Coordenadas rectangulares del centroide o centro de gravedad
α, β, γ	Ángulos
γ	Peso específico
δ	Elongación
$\delta\mathbf{r}$	Desplazamiento virtual
U	Trabajo virtual
λ	Vector unitario a lo largo de una línea
η	Eficiencia
θ	Coordenada angular; ángulo; coordenada polar
μ	Coeficiente de fricción
ρ	Densidad
ϕ	Ángulo de fricción; ángulo

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Estática

A finales del siglo XVII, Sir Isaac Newton estableció los principios fundamentales de la mecánica, los cuales constituyen la base de gran parte de la ingeniería moderna.





CAPÍTULO 1

Introducción

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1. ¿QUÉ ES LA MECÁNICA?

La mecánica se puede definir como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: la mecánica de *cuerpos rígidos*, la mecánica de *cuerpos deformables* y la mecánica de *fluidos*.

La mecánica de cuerpos rígidos se subdivide en *estática* y *dinámica*; la primera estudia los cuerpos en reposo y la segunda los cuerpos en movimiento. En esta parte del estudio de la mecánica se supone que los cuerpos son perfectamente rígidos. Sin embargo, las estructuras y las máquinas reales nunca lo son y se deforman bajo las cargas a las que están sometidas. Estas deformaciones casi siempre son pequeñas y no afectan de manera apreciable las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. Pero son importantes cuando se tiene en cuenta la resistencia de la estructura a las fallas y se estudian en la mecánica de materiales, que es una parte de la mecánica de cuerpos deformables. La tercera parte de la mecánica, la de fluidos, se subdivide en el estudio de los *fluidos incompresibles* y el de los *fluidos compresibles*. La *hidráulica* es una subdivisión importante en el estudio de los fluidos incompresibles y trata problemas relativos a los líquidos.

La mecánica es una ciencia física puesto que estudia fenómenos físicos. Sin embargo, algunos la asocian con las matemáticas, mientras que otros la consideran un tema de ingeniería. Ambos puntos de vista se justifican parcialmente. La mecánica es la base de la mayoría de las ciencias de la ingeniería y es un requisito indispensable para estudiarlas. Sin embargo, no tiene el carácter *empírico* propio de algunas ciencias de la ingeniería, es decir, no se basa sólo en la experiencia u observación; por su rigor y la importancia que da al razonamiento deductivo se parece a las matemáticas. Pero tampoco es una ciencia *abstracta*, ni siquiera una ciencia *pura*; es una ciencia *aplicada*. Su propósito es explicar y predecir los fenómenos físicos y poner las bases para aplicarlas en ingeniería.

1.2. CONCEPTOS Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Aunque el estudio de la mecánica se remonta a los tiempos de Aristóteles (384-322 a.C.) y de Arquímedes (287-212 a.C.), se tuvo que esperar hasta Newton (1642-1727) para encontrar una formulación satisfactoria de sus principios fundamentales, los cuales fueron expresados después en forma modificada por d'Alembert, Lagrange y Hamilton. Su validez permaneció incólume hasta que Einstein formuló su *teoría de la relatividad* (1905). Si bien ahora se han reconocido las limitaciones de la *mecánica newtoniana*, ésta aún es la base de las actuales ciencias de la ingeniería.

Los conceptos básicos que se emplean en la mecánia son *espacio*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estos conceptos no pueden ser definidos en forma exacta; deben aceptarse sobre las bases de nuestra intuición y experiencia y emplearse como un marco de referencia mental en el estudio de la mecánica.

El concepto de *espacio* se asocia con la noción de posición de un punto *P*. La posición de éste puede definirse por tres longitudes medidas desde cierto punto de referencia u *origen*, en tres direcciones dadas. Estas longitudes se reconocen como *coordenadas* de *P*.

Para definir un evento, no es suficiente con indicar su posición en el espacio sino que debe darse también el *tiempo* del evento.

El concepto de *masa* tiene la función de caracterizar y comparar los cuerpos con base en ciertos experimentos mecánicos fundamenta-

les. Por ejemplo, dos cuerpos que tengan la misma masa serían atraídos por la Tierra de igual forma; también presentarán la misma resistencia a un cambio en su movimiento traslacional.

Una *fuerza* representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por contacto real o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud* y *dirección* y se representa con un *vector* (sección 2.3).

En la mecánica newtoniana, espacio, tiempo y masa son conceptos absolutos e independientes entre sí (esto no es así en la *mecánica relativista*, donde el tiempo de un evento depende de su posición y la masa de un cuerpo varía con su velocidad). Por otra parte, el concepto de fuerza no es independiente de los otros tres. En realidad, uno de los principios fundamentales de la mecánica newtoniana, que se enuncian más adelante, indica que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo se relaciona con la masa de éste y con la forma en que varía su velocidad en el tiempo.

Se estudiarán las condiciones de reposo o movimiento de partículas y cuerpos rígidos a partir de los cuatro principios básicos que se han expuesto. Por *partícula* se entiende una pequeñísima cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio. Un *cuerpo rígido* es la combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí. El estudio de la mecánica de las partículas es un requisito previo al de los cuerpos rígidos. Además, los resultados obtenidos para una partícula pueden usarse directamente en muchos problemas que tratan de las condiciones de reposo o movimiento de cuerpos reales.

El estudio de la mecánica elemental descansa sobre seis principios fundamentales basados en la evidencia experimental.

La ley del paralelogramo para la adición de fuerzas. Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser sustituidas por una sola fuerza llamada *resultante*, que se obtiene al trazar la diagonal del paralelogramo que tiene los lados iguales a las fuerzas dadas (sección 2.2).

El principio de transmisibilidad. Establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza que actúa en un punto del cuerpo rígido se sustituye por una fuerza de la misma magnitud y la misma dirección, pero que actúe en un punto diferente, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción (sección 3.3).

Las tres leyes fundamentales de Newton. Fueron formuladas por Sir Isaac Newton a finales del siglo XVII y pueden enunciarse como sigue:

PRIMERA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento) (sección 2.10).

SEGUNDA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de ésta.

Como se verá en la sección 12.2[†] esta ley puede expresarse así

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

[†]La alusión a la sección 11 y posteriores corresponde al tomo *Dinámica*, del mismo autor.

donde **F**, m y **a** representan, respectivamente, la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la masa de ésta y la aceleración de la misma, expresadas en un sistema consistente de unidades.

TERCERA LEY. Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 6.1).

La ley de gravitación de Newton. Establece que dos partículas de masa M y m se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas **F** y **−F** (figura 1.1), de magnitud F dada por la fórmula

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1.2}$$

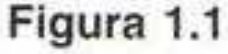


Figura 1.1

donde r = la distancia entre las dos partículas
G = la constante universal llamada *constante de gravitación*

La ley de gravitación de Newton introduce la idea de una acción ejercida a distancia y extiende el alcance de aplicación de la tercera ley: la acción **F** y la reacción **−F** en la figura 1.1 son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción.

Un caso de gran importancia es el de la atracción que la Tierra ejerce sobre una partícula situada en su superficie. La fuerza **F** ejercida por la Tierra sobre la partícula se define como el *peso* **W** de la partícula. Tomando M igual a la masa de la Tierra, m igual a la masa de la partícula, y r igual al radio R de la Tierra e introduciendo la constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{1.3}$$

la magnitud W del peso de una partícula de masa m puede expresarse como†

$$W = mg \tag{1.4}$$



Fotografía 1.1 Cuando están en la órbita terrestre, se dice que las personas y los objetos *no tienen peso*, aun cuando la fuerza gravitacional que actúa sobre ellos es aproximadamente 90% de la que se experimenta en la superficie de la Tierra. Esta aparente contradicción se resolverá en el capítulo 12, cuando se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de partículas.

El valor de R en la fórmula (1.3) depende de la elevación del punto considerado; también depende de su latitud, puesto que la Tierra no es realmente esférica. Así que el valor de g varía con la posición del punto en cuestión. Mientras el punto permanezca sobre la superficie de la Tierra, en la mayoría de los cálculos de ingeniería es suficientemente preciso suponer que g es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2.

Los principios que se acaban de enunciar se irán explicando en el curso del estudio de la mecánica conforme sea necesario. El estudio de la estática de partículas se realiza en el capítulo 2 y se basa sólo en la ley del paralelogramo para la adición y en la primera ley de Newton. El principio de transmisibilidad se expondrá en el capítulo 3, al comenzar el estudio de la estática de cuerpos rígidos, y la tercera ley de Newton se expone en el capítulo 6, cuando se analicen las fuerzas ejercidas entre los diferentes elementos que forman una estructura. En el estudio de la dinámica se introducirán la segunda ley de Newton y la ley de gravitación. Allí se mostrará que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda ley (sección 12.2), y que el principio de transmisibilidad podría derivarse de los otros principios y por lo mis-

†Una definición más precisa del peso **W** debe tomar en cuenta la rotación de la Tierra.

mo quedar eliminado (sección 16.5). Por ahora, las primera y tercera leyes de Newton, la ley del paralelogramo para la adición y el principio de transmisibilidad proporcionarán las bases necesarias y suficientes para el estudio completo de la estática de partículas, de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos.

Como se dijo antes, los seis principios fundamentales enunciados antes se basan en la evidencia experimental. A excepción de la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad, todos son principios independientes y no se pueden obtener matemáticamente de los demás ni de cualquier otro principio físico elemental. En ellos descansa la mayor parte de la intrincada estructura de la mecánica newtoniana. La aplicación de estos principios fundamentales ha permitido resolver, por más de dos siglos, un gran número de problemas relacionados con las condiciones de reposo y movimiento de cuerpos rígidos, cuerpos deformables y fluidos. Muchas de las soluciones obtenidas pueden comprobarse mediante experimentos que proporcionan una verificación ulterior de los principios en que se basaron. Fue sólo hasta el siglo pasado que se encontró que la mecánica de Newton tiene deficiencias en el estudio del movimiento de los átomos y en el de ciertos planetas, y que debe complementarse con la teoría de la relatividad. Pero en la escala humana o en la escala de la ingeniería, donde las velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, la mecánica de Newton aún no ha sido refutada.

1.3. SISTEMAS DE UNIDADES

Con los cuatro conceptos fundamentales introducidos en la sección anterior se asocian las llamadas *unidades cinéticas*, es decir, las unidades de *longitud*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estas unidades no pueden escogerse de manera independiente si la ecuación (1.1) ha de satisfacerse. Tres de ellas pueden definirse en forma arbitraria; se les llama *unidades básicas*. La cuarta unidad, en cambio, debe escogerse de acuerdo con la ecuación (1.1) y se le identifica como *unidad derivada*. Se dice que las unidades cinéticas así seleccionadas forman un *sistema consistente de unidades*.

Sistema Internacional de Unidades (Unidades del SI).[†] En este sistema, que será de uso universal cuando Estados Unidos complete su conversión, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo, y se llaman, respectivamente, *metro* (m), *kilogramo* (kg) y *segundo* (s). Las tres están definidas de manera arbitraria. El segundo, que de manera original se eligió para representar 1/86 400 del día solar medio, se define ahora como la duración de 9 192 631 770 ciclos de la radiación emitida en la transición entre dos niveles del estado fundamental del átomo de cesio-133. El metro, definido en forma original como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador a un polo, se define ahora como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz naranja-roja correspondiente a cierta transición en un átomo de criptón-86. El kilogramo, que es aproximadamente igual a la masa de 0.001 m^3 de agua, se define como la masa de un patrón de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París, Francia. La unidad de fuerza es una unidad derivada y se llama *newton* (N). Se le define como la fuerza que proporciona una



[†]SI significa *Système International d'Unités* (francés).

aceleración de 1 m/s^2 a una masa de un kilogramo (figura 1.2). A partir de la ecuación (1.1) se escribe

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \qquad (1.5)$$

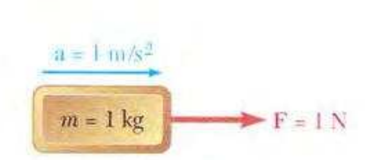


Figura 1.2

Se dice que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades; esto significa que las tres unidades básicas seleccionadas son independientes del lugar en donde se utilicen las medidas. El metro, el kilogramo y el segundo se pueden usar en cualquier lugar de la Tierra; incluso pueden usarse en otro planeta y siempre tendrán el mismo significado.

El *peso* de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* ejercida sobre él, debe expresarse en newtons, como cualquier otra fuerza. De la ecuación (1.4) se obtiene que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (figura 1.3) es

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \\ &= 9.81 \text{ N} \end{aligned}$$

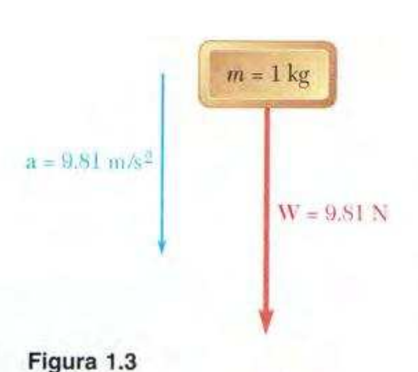


Figura 1.3

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales del SI se pueden obtener con el uso de los prefijos que se definen en la tabla 1.1. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza de mayor uso en ingeniería son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*[†] (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). De acuerdo con la tabla 1.1, se tiene

$$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m} \qquad 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$$
$$1 \text{ Mg} = 1\,000 \text{ kg} \qquad 1 \text{ g} = 0.001 \text{ kg}$$
$$1 \text{ kN} = 1\,000 \text{ N}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, puede realizarse con sólo recorrer el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda. Por ejemplo, para convertir 3.82 km en metros, se recorre el punto decimal tres lugares a la derecha:

$$3.82 \text{ km} = 3\,820 \text{ m}$$

En forma semejante, 47.2 mm se convierten en metros recorriendo el punto decimal tres lugares a la izquierda:

$$47.2 \text{ mm} = 0.0472 \text{ m}$$

Con el uso de la notación científica, se puede escribir

$$3.82 \text{ km} = 3.82 \times 10^3 \text{ m}$$
$$47.2 \text{ mm} = 47.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Los múltiplos de la unidad de tiempo son el *minuto* (min) y la *hora* (h). Puesto que 1 min = 60 s y 1 h = 60 min = 3 600 s, estos múltiplos no pueden convertirse tan fácilmente como los otros.

Con el uso del múltiplo o submúltiplo adecuado de cierta unidad, se puede evitar la escritura de números muy grandes o muy pequeños.

[†]También conocida como *tonelada métrica*.

Tabla 1.1. Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^{9}	giga	G
1 000 000 = 10^{6}	mega	M
1 000 = 10^{3}	kilo	k
100 = 10^{2}	hecto*	h
10 = 10^{1}	deca*	da
0.1 = 10^{-1}	deci*	d
0.01 = 10^{-2}	centi*	c
0.001 = 10^{-3}	mili	m
0.000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0.000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0.000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0.000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	ato	a

*Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Por ejemplo, por lo general se escribe 427.2 km en lugar de 427 200 m, y 2.16 mm en lugar de 0.002 16 m.[†]

Unidades de área y volumen. La unidad de área es el *metro cuadrado* (m^2), que representa el área de un cuadrado de 1 m de lado; la unidad de volumen es el *metro cúbico* (m^3), que es igual al volumen de un cubo de 1 m de lado. Para evitar valores numéricos excesivamente pequeños o demasiado grandes en el cálculo de áreas y volúmenes, se usan sistemas de subunidades que se obtienen elevando, respectivamente, al cuadrado y al cubo no sólo el milímetro sino también dos submúltiplos intermedios del metro, llamados *decímetro* (dm) y *centímetro* (cm). Entonces, por definición,

$$1 \text{ dm} = 0.1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ m}$$
$$1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m}$$
$$1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$$

los submúltiplos de la unidad de área son

$$1 \text{ dm}^2 = (1 \text{ dm})^2 = (10^{-1} \text{ m})^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$$
$$1 \text{ cm}^2 = (1 \text{ cm})^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$
$$1 \text{ mm}^2 = (1 \text{ mm})^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$$

y los submúltiplos de la unidad de volumen son

$$1 \text{ dm}^3 = (1 \text{ dm})^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$
$$1 \text{ cm}^3 = (1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$1 \text{ mm}^3 = (1 \text{ mm})^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$$

[†]Debe observarse que cuando se usan más de cuatro dígitos a ambos lados del punto decimal para expresar una cantidad en unidades del SI (como en 427 200 m o en 0.002 16 m) deben usarse espacios, no comas, para separar los dígitos en grupos de tres. Esto es con el fin de evitar confusiones con la coma, que se usa en muchos países en lugar del punto decimal.

Debe notarse que cuando se mide el volumen de un líquido, el decímetro cúbico (dm^3) se conoce en forma usual como un *litro* (L).

En la tabla 1.2 se muestran otras unidades derivadas del SI, que se usan para medir el momento de una fuerza, el trabajo de una fuerza, etc. Aunque estas unidades se introducirán en capítulos posteriores conforme se vayan necesitando, es necesario describir una regla importante en esta fase: cuando se obtiene una unidad derivada con la división de una unidad básica entre otra unidad básica, debe usarse un prefijo en el numerador de la unidad derivada pero no en su denominador. Por ejemplo, la constante k de un resorte que se elonga 20 mm bajo una carga de 100 N se expresará como

$$k = \frac{100\text{ N}}{20\text{ mm}} = \frac{100\text{ N}}{0.020\text{ m}} = 5\,000\text{ N/m} \qquad \text{o} \qquad k = 5\text{ kN/m}$$

pero nunca como $k = 5$ N/mm.

Unidades de uso común en Estados Unidos. La mayoría de los ingenieros practicantes estadounidenses todavía utiliza un sistema en el que las unidades básicas son las unidades de longitud, fuerza y tiempo. Estas unidades son, respectivamente, el *pie* (ft), la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es idéntico a la correspondiente unidad del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como el *peso* de un patrón de platino, llamado *libra estándar*, que está en el National Institute

Tabla 1.2. Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	rad/s
Área	Metro cuadrado	. . .	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Esfuerzo	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

†Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).
‡Unidad básica.

of Standards and Technology en las afueras de Washington, su masa es de 0.453 592 43 kg. Como el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, la cual varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe estar localizada al nivel del mar y a una latitud de 45° para definir en forma apropiada una fuerza de una libra. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman un sistema de unidades absoluto. Por su dependencia de la atracción gravitacional de la Tierra constituyen un sistema de unidades *gravitacional*.

Aun cuando la libra estándar se emplea también como unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede usarse así en cálculos de ingeniería, debido a que no sería consistente con las unidades básicas definidas en el apartado anterior. De hecho, cuando una fuerza de 1 lb actúa sobre la libra estándar, es decir, cuando está sujeta a la gravedad, recibe la aceleración de la gravedad, $g = 32.2$ ft/s^2 (figura 1.4), ésta no es la unidad de aceleración que se requiere según la ecuación (1.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa que recibe una aceleración de 1 ft/s^2 al aplicársele una fuerza de 1 lb (figura 1.5). Esta unidad, algunas veces llamada *slug*, puede derivarse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 1 ft/s^2 para F y a, respectivamente. Se escribe (1 slug = 32.216).

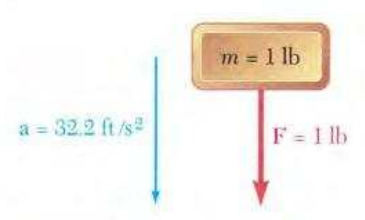


Figura 1.4

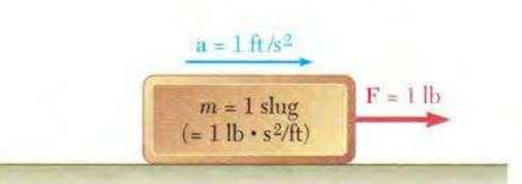


Figura 1.5

$$F = ma \qquad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

y se obtiene

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} \tag{1.6}$$

Comparando las figuras 1.4 y 1.5 se concluye que el *slug* es una masa 32.2 veces mayor que la masa de la libra estándar.

El hecho de que en el sistema de uso común en Estados Unidos, los cuerpos se caractericen por su peso en libras en lugar de por su masa en *slugs*, será ventajoso en el estudio de la estática, en donde se tratará en forma continua con pesos u otras fuerzas, y sólo en ocasiones con masas. Sin embargo, en el estudio de la dinámica, donde intervienen fuerzas, masas y aceleraciones, la masa m de un cuerpo se expresará en *slugs* cuando su peso W esté dado en libras. Recordando la ecuación (1.4) se escribe

$$m = \frac{W}{g} \tag{1.7}$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2$ ft/s^2).

Otras unidades de uso común en Estados Unidos que se presentan en forma frecuente en problemas de ingeniería son la *milla* (mi), igual a 5 280 ft; la *pulgada* (in.), igual a $\frac{1}{12}$ ft, y la *kilolibra* (kip), igual a una fuerza de 1 000 lb.[†] La *tonelada* se usa con frecuencia para representar una masa de 2 000 lb pero, al igual que la libra, debe convertirse a *slugs* en los cálculos de ingeniería.

La conversión en pies, libras y segundos de cantidades expresadas en otras unidades de uso común en Estados Unidos, en forma general es más complicada y requiere mayor atención que la operación correspondiente en las unidades del SI. Por ejemplo, si se da la magnitud de

[†]En este caso se alude a la tonelada corta, ya que la tonelada larga equivale a 2 240 lb.

una velocidad como $v = 30$ mi/h, se convierte en ft/s de la siguiente manera. Primero se escribe

$$v = 30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Puesto que se quieren convertir millas en pies, se debe multiplicar el miembro derecho de la ecuación por una expresión que contenga millas en el denominador y pies en el numerador. Pero, como no se quiere cambiar el valor del miembro derecho, la expresión implicada debe tener un valor igual a uno; el cociente (5 280 ft)/(1 mi) es una expresión de este tipo. Haciendo una operación semejante para transformar la unidad hora en segundos, se escribe

$$v = \left(30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right)\left(\frac{5\,280\text{ ft}}{1\text{ mi}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3\,600\text{ s}}\right)$$

Realizando los cálculos numéricos y cancelando las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$v = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 44 \text{ ft/s}$$

1.4. CONVERSIÓN DE UN SISTEMA DE UNIDADES A OTRO

Existen muchas situaciones en las que un ingeniero necesita convertir en unidades del SI un resultado numérico obtenido en unidades de uso común en Estados Unidos o viceversa. Como la unidad de tiempo es la misma en ambos sistemas, sólo se necesita convertir dos unidades cinéticas básicas y, puesto que todas las otras unidades cinéticas pueden derivarse de estas unidades básicas, sólo se requiere recordar dos factores de conversión.

Unidades de longitud. Por definición, la unidad de longitud de uso común en Estados Unidos es

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} \tag{1.8}$$

De aquí se tiene que

$$1 \text{ mi} = 5\,280 \text{ ft} = 5\,280(0.3048 \text{ m}) = 1\,609 \text{ m}$$

o bien

$$1 \text{ mi} = 1.609 \text{ km} \tag{1.9}$$

También

$$1 \text{ in.} = \tfrac{1}{12} \text{ ft} = \tfrac{1}{12}(0.3048 \text{ m}) = 0.0254 \text{ m}$$

o bien

$$1 \text{ in.} = 25.4 \text{ mm} \tag{1.10}$$

Unidades de fuerza. Recordando que la unidad de fuerza de uso común en Estados Unidos (la libra) se define como el peso de una libra estándar (de masa 0.4536 kg) al nivel del mar y a una latitud de 45° (donde $g = 9.807$ m/s^2) y usando la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg$$
$$1 \text{ lb} = (0.4536 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

o, recordando la ecuación (1.5),

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} \tag{1.11}$$

Unidades de masa. La unidad de masa de uso común en Estados Unidos (el *slug*) es una unidad derivada. Así, con el uso de las ecuaciones (1.6), (1.8) y (1.11), se puede escribir

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = \frac{4.448 \text{ N}}{0.3048 \text{ m/s}^2} = 14.59 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

y por medio de la ecuación (1.5),

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg} \tag{1.12}$$

Aunque no puede usarse como unidad consistente de masa, recordando que la masa de la libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra masa} = 0.4536 \text{ kg} \tag{1.13}$$

Esta constante se puede usar para determinar la *masa* en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que esté caracterizado por su *peso* en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

Para convertir una unidad derivada de uso común en Estados Unidos en unidades del SI, simplemente se multiplica o se divide por los factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir la magnitud del momento de una fuerza que ha sido encontrada como $M = 47$ lb · in. en unidades del SI, se usan las fórmulas (1.10) y (1.11) y se escribe

$$\begin{aligned} M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= 47(4.448 \text{ N})(25.4 \text{ mm}) \\ &= 5\,310 \text{ N} \cdot \text{mm} = 5.31 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Los factores de conversión dados en esta sección se pueden usar también para convertir un resultado numérico obtenido en las unidades del SI a unidades de uso común en Estados Unidos. Por ejemplo, si la magnitud del momento de una fuerza se encontró como $M = 40$ N · m, con el procedimiento usado en el último párrafo de la sección 1.3, se escribe

$$M = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = (40 \text{ N} \cdot \text{m})\left(\frac{1 \text{ lb}}{4.448 \text{ N}}\right)\left(\frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}}\right)$$

Al realizar los cálculos numéricos y cancelar las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$M = 29.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Las unidades de uso común en Estados Unidos que se emplean con mayor frecuencia en la mecánica, y sus equivalentes en las unidades del SI, se enlistan en la tabla 1.3.

1.5. MÉTODO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un problema en mecánica debe abordarse de la misma manera en que se plantearía un problema real de ingeniería. Si se toma como base la experiencia y la intuición propias, será más fácil entender y formular el problema. Sin embargo, una vez que el problema se ha establecido en forma clara, no hay sitio para suposiciones particulares. *La solución se debe basar en los seis principios fundamentales establecidos en la sección 1.2 o*

Tabla 1.3. Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI

Cantidad	Unidad de uso común en EU	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s^2	0.3048 m/s^2
	in./s^2	0.0254 m/s^2
Área	ft^2	0.0929 m^2
	in.^{2}	645.2 mm^2
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	short ton (tonelada corta)	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	in.^{4}	0.4162×10^6 mm^4
de una masa	lb · ft · s^2	1.356 kg · m^2
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft^2	47.88 Pa
	lb/in.^{2} (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft^3	0.02832 m^3
	in.^{3}	16.39 cm^3
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J

en los teoremas derivados de éstos. Cada paso debe estar justificado con estas bases. Deben seguirse reglas estrictas que conduzcan a la solución de una manera casi automática, sin dejar lugar para la intuición o "sentimientos" particulares. Después de obtener una respuesta, ésta debe verificarse. Aquí, de nuevo, se puede utilizar el sentido común y la experiencia personal. Si el resultado obtenido no es completamente satisfactorio, debe verificarse en forma cuidadosa la formulación del problema, la validez del método utilizado para su solución y la exactitud de los cálculos.

El *planteamiento* de un problema debe ser claro y preciso y contener los datos proporcionados, así como indicar la información que se requiere. Debe incluirse un dibujo claro que muestre todas las cantidades involucradas, así como un diagrama para cada uno de los cuerpos que participan, que indique en forma clara las fuerzas que actúan sobre ellos. A estos diagramas se les conoce como *diagramas de cuerpo libre* y se describirán en detalle en las secciones 2.11 y 4.2.

Los *principios fundamentales* de la mecánica que se enlistan en la sección 1.2 *se emplean para escribir ecuaciones* que expresen las con-

diciones de reposo o movimiento de los cuerpos considerados. Cada ecuación debe estar relacionada en forma clara con uno de los diagramas de cuerpo libre. Después se procederá a resolver el problema, observando en forma estricta las reglas usuales de álgebra y con el registro minucioso de los diferentes pasos dados.

Después de haber obtenido la respuesta, ésta debe *comprobarse con todo cuidado*. Con frecuencia se pueden detectar errores en el *razonamiento* mediante la verificación de las unidades. Por ejemplo, para determinar la magnitud del momento de una fuerza de 50 N sobre un punto a 0.60 m de su línea de acción, se escribiría (sección 3.12)

$$M = Fd = (50 \text{ N})(0.60 \text{ m}) = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La unidad N · m que se obtiene al multiplicar newtons por metros es la unidad correcta para el momento de una fuerza; si se hubiera obtenido alguna otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de *cálculo* por lo general se encontrarán al sustituir los valores numéricos en una ecuación que no haya sido usada y verificar si la ecuación es correcta. No es posible exagerar la importancia de los cálculos correctos en ingeniería.

1.6. EXACTITUD NUMÉRICA

La exactitud en la solución de un problema depende de dos factores: 1) la exactitud de los datos proporcionados y 2) la de los cálculos desarrollados.

La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores; por ejemplo, si se sabe que la carga de un puente es de 75 000 lb con un posible error de 100 lb, el error relativo que mide el grado de precisión del dato es

$$\frac{100 \text{ lb}}{75\,000 \text{ lb}} = 0.0013 = 0.13 \text{ por ciento}$$

Entonces, al calcular la reacción en uno de los soportes del puente no tendría sentido anotarla como 14 322 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor de 0.13 por ciento, sin importar con qué exactitud se realicen los cálculos, y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como $(0.13/100)(14\,322 \text{ lb}) \approx 20$ lb. La respuesta debería escribirse como $14\,320 \pm 20$ lb.

En los problemas de ingeniería los datos rara vez se conocen con una exactitud mayor a 0.2 por ciento, por lo que casi nunca se justifica escribir las respuestas a dichos problemas con una exactitud mayor a 0.2 por ciento. Un criterio práctico es utilizar cuatro cifras para registrar números que inicien con un "1" y tres cifras en todos los otros casos. A menos que se indique otra cosa, los datos proporcionados en un problema deben asumirse como conocidos con un grado de exactitud comparable. Por ejemplo, una fuerza de 40 lb se debería leer 40.0 lb, y una fuerza de 15 lb se debería leer 15.00 lb.

Los ingenieros y estudiantes de ingeniería comúnmente usan las calculadoras electrónicas de bolsillo. La exactitud y velocidad de éstas facilita los cálculos numéricos en la solución de muchos problemas. Sin embargo, los estudiantes no deben registrar más cifras significativas de las que se pueden justificar, sólo porque éstas se pueden obtener fácilmente. Como se mencionó con anterioridad, una exactitud mayor que 0.2 por ciento rara vez es necesaria o significativa en la solución de problemas prácticos de ingeniería.

Muchos problemas de ingeniería se resuelven al tomar en cuenta el equilibrio de una “partícula”. En el caso de esta excavadora, que se estiba en un barco, puede obtenerse una relación entre las tensiones de los diferentes cables empleados, al considerar el equilibrio del gancho con el que se unen los cables.





CAPÍTULO 2

Estática de partículas

CAPÍTULO 2 ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. Primero se aprenderá a sustituir dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza equivalente sola es la *resultante* de las fuerzas varias que actúan sobre la partícula. Después se derivarán las relaciones que existen entre las distintas fuerzas que actúan sobre una partícula en un estado de *equilibrio* y se usarán para determinar algunas de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula.

El uso de la palabra "partícula" no significa que este capítulo se limite al estudio de pequeños corpúsculos. Quiere decir que el tamaño y la forma de los cuerpos en consideración no afectará en la solución de los problemas tratados en este capítulo, y que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto. Puesto que tal suposición se verifica en muchas aplicaciones prácticas, se podrán resolver un buen número de problemas de ingeniería.

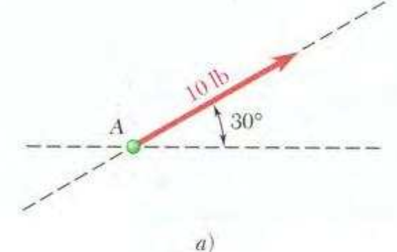
La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las fuerzas obtenidas en un mismo plano y la segunda al análisis de las fuerzas en el espacio tridimensional.

FUERZAS EN UN PLANO

2.2. FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DOS FUERZAS

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud* o *módulo* y *dirección*. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación. Por tanto, cada fuerza considerada en este capítulo estará completamente definida por su magnitud o módulo y dirección.

La magnitud o módulo de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades. Como se indicó en el capítulo 1, las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1 000 lb. La dirección de una fuerza se define por la *línea de acción* y el *sentido* de la fuerza. La línea de acción es la línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo (figura 2.1).

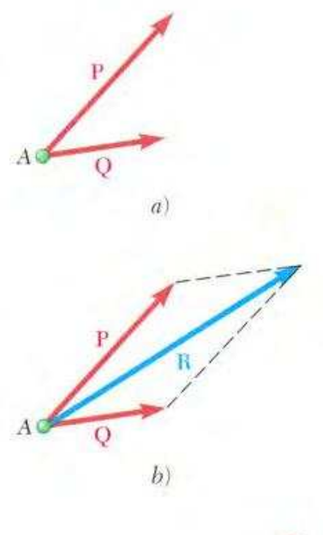


10 lb
A
30°

Figura 2.1 *a)* *b)*

La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en las figuras 2.1*a* y *b*, que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas **P** y **Q** que actúan sobre una partícula *A* (figura 2.2*a*) pueden sustituirse por una sola fuerza **R** que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2*c*). A esta fuerza se le llama *resultante* de las fuerzas **P** y **Q** y puede obtenerse, como se muestra en la figura 2.2*b*, construyendo un paralelogramo con **P** y **Q** como lados. *La diagonal que pasa por A representa la resultante.* Esto se conoce como la *ley del paralelogramo* para la adición de dos fuerzas, y se basa en la evidencia experimental; no puede probarse ni derivarse de manera matemática.



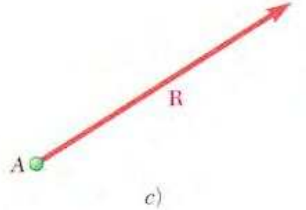


Figura 2.2

2.3. VECTORES

En apariencia las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinaria. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una de 4 lb y otra de 3 lb, suman una fuerza de 5 lb y *no* una de 7 lb. La fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos*, *velocidades*, *aceleraciones* y *momentos* son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por *vectores*, mientras que aquellas cantidades físicas que no tienen dirección, como *volumen*, *masa* o *energía* se representan por números ordinarios o *escalares*.

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo.* Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas (**P**). En la escritura a mano, un vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo ($\vec{P}$) o subrayando la letra ($\underline{P}$). El último método es preferible puesto que el subrayado también puede usarse en una máquina de escribir o computadora. La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector **P** se representa como *P*.

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama vector *fijo* o *ligado*, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares (véase capítulo 3), se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les conoce como *libres*. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido (véase capítu-

lo 3), que están representadas por vectores que pueden moverse o resbalar a lo largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores *deslizantes*.[†]

Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son *iguales*, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.4); los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

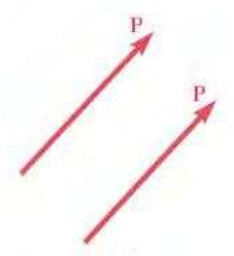


Figura 2.4

El *vector negativo* de un vector **P** se define como aquel que tiene la misma magnitud que **P** y una dirección opuesta a la de **P** (figura 2.5); el negativo del vector **P** se representa por $-\mathbf{P}$. A los vectores **P** y $-\mathbf{P}$ se les llama vectores *iguales y opuestos*. Se tiene

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$



Figura 2.5

2.4. ADICIÓN O SUMA DE VECTORES

En la sección anterior se vio que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto A y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a **P** y a **Q** (figura 2.6). La diagonal que pasa por A representa la suma vectorial de **P** y **Q**, y se representa por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. El hecho de que el signo + se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado. De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ *no* es, en general, igual a la suma $P + Q$ de las magnitudes de los vectores **P** y **Q**.

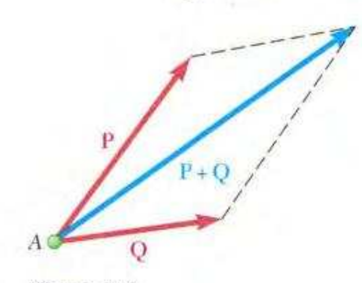


Figura 2.6

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores **P** y **Q** no depende del orden en que **P** y **Q** se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es *conmutativa*, y se escribe

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \tag{2.1}$$

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado

[†]Algunas expresiones tienen magnitud y dirección pero no se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Aunque tales expresiones se pueden representar por medio de flechas, *no* se pueden considerar vectores.

Un grupo de expresiones de este tipo son las rotaciones finitas de un cuerpo rígido. Coloque un libro cerrado enfrente de usted sobre una mesa de manera que se encuentre en la forma habitual, con la portada hacia arriba y el lomo hacia la izquierda. Ahora rote el libro 180° con respecto a un eje paralelo al lomo (figura 2.3*a*); esta rotación puede ser representada por una flecha orientada, como se muestra en la figura, cuya longitud es igual a 180 unidades. Tomando el libro tal y como se encuentra en su nueva posición, rótelo

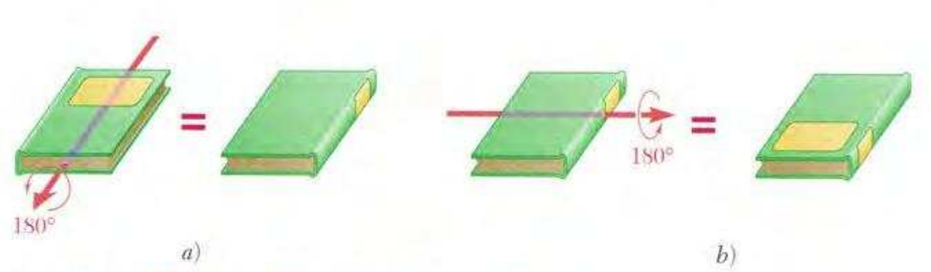


Figura 2.3 Rotaciones finitas de un cuerpo rígido

regla del triángulo se obtiene como sigue: considérese la figura 2.6, donde la suma de los vectores **P** y **Q** ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a **Q** es igual a **Q** en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo (figura 2.7*a*). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse *colocando* **P** *y* **Q** *de punta a cola y uniendo la cola de* **P** *con la punta de* **Q**. En la figura 2.7*b* se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

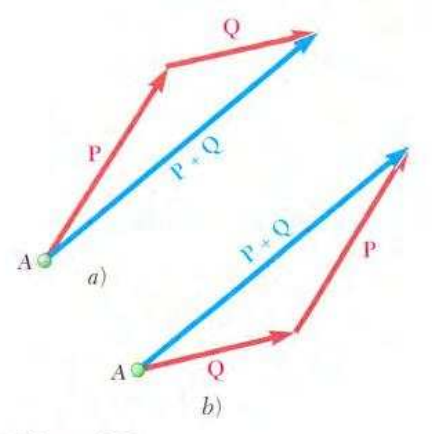


Figura 2.7

La *resta* de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector **P** − **Q** que representa la diferencia de los vectores **P** y **Q** se obtiene agregándole a **P** el vector negativo −**Q** (figura 2.8). Se escribe

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \tag{2.2}$$

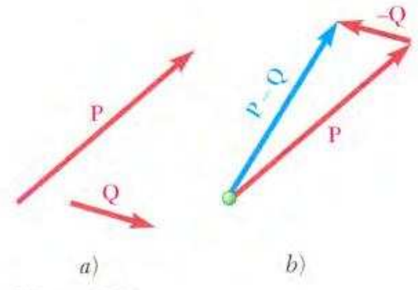


Figura 2.8

Aquí se debe observar otra vez que aunque se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

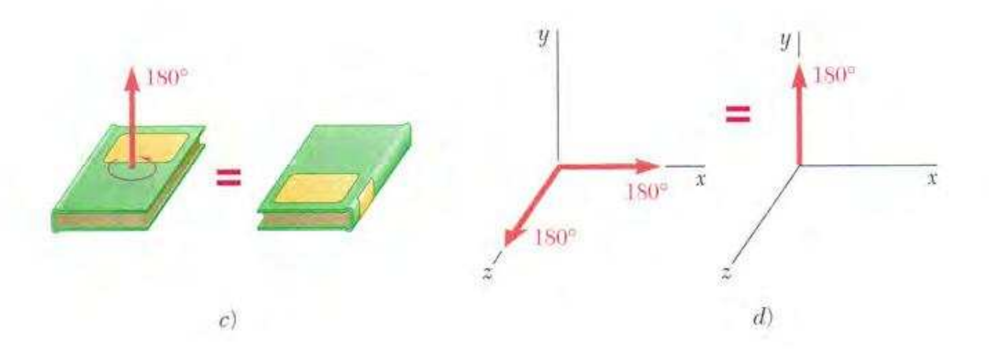
Ahora se considerará la *suma de tres o más vectores.* La suma de tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtendrá *por definición*, sumando primero los vectores **P** y **Q** y agregando el vector **S** al vector **P** + **Q**. De manera que

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \tag{2.3}$$

En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

---

ahora 180° alrededor de un eje horizontal perpendicular al lomo (figura 2.3*b*); esta segunda rotación puede ser representada por medio de una flecha cuya longitud es igual a 180 unidades, orientada como se muestra en la figura. Sin embargo, el libro podría haberse colocado en esta posición final aplicando una sola rotación de 180° con respecto a un eje vertical (figura 2.3*c*). Se concluye que la suma de las dos rotaciones de 180° representadas por flechas rígidas, respectivamente, a lo largo de los ejes *z* y *x*, es una rotación de 180° representada por una flecha dirigida a lo largo del eje *y* (figura 2.3*d*). Es obvio que las rotaciones finitas de un cuerpo rígido *no* obedecen la ley del paralelogramo para la adición; por tanto, éstas *no pueden* ser representadas por medio de vectores.



Si los vectores dados son *coplanares*, es decir, si están contenidos en el mismo plano, su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.9 la suma de los tres vectores **P**, **Q** y **S** se obtuvo de esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma **P** + **Q** de los vectores **P** y **Q**; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores **P** + **Q** y **S**. Sin embargo, la determinación del vector **P** + **Q** pudo haberse omitido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.10, *acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último.* Ésta se conoce como la *regla del polígono* para la adición de vectores.

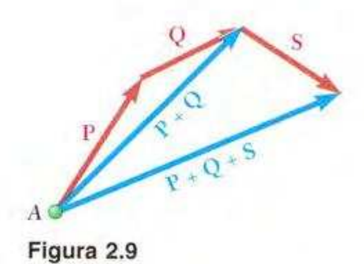


Figura 2.9

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio si, como se muestra en la figura 2.11, los vectores **Q** y **S** se hubieran reemplazado por la suma de **Q** + **S**. Entonces se puede escribir

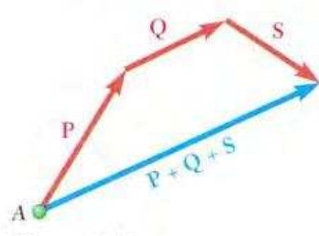


Figura 2.10

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \tag{2.4}$$

esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es *asociativa*. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

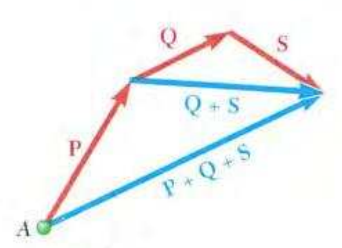


Figura 2.11

$$\begin{aligned}\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P}\end{aligned} \tag{2.5}$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se sumen varios vectores no importa (figura 2.12).

Producto de un escalar y un vector. Como es conveniente representar la suma **P** + **P** como 2**P**, a la suma **P** + **P** + **P** como 3**P**, y en general a la suma de n vectores **P** iguales como el producto n**P**, se definirá el producto n**P** de un entero positivo n y un vector **P**, como un vector que tiene la misma dirección que **P** y magnitud nP (léase n veces P). Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y si recordamos la definición de un vector negativo dada en la sección 2.3, se define el producto k**P** de un escalar k y un vector **P** como un vector que tiene la misma dirección y sentido que **P** (si k es positivo), o la misma dirección pero sentido opuesto al de **P** (si k es negativo) y una magnitud igual al producto de P y el valor absoluto de k (figura 2.13).

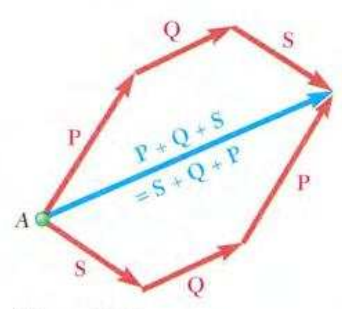


Figura 2.12

2.5. RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES

Considérese una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.14*a*). Como todas estas fuerzas pasan por A, se dice que son *concurrentes*. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden sumarse con la regla del polígono (figura 2.14*b*). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector **R** obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas dadas. Como se in-

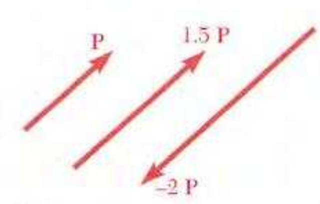


Figura 2.13

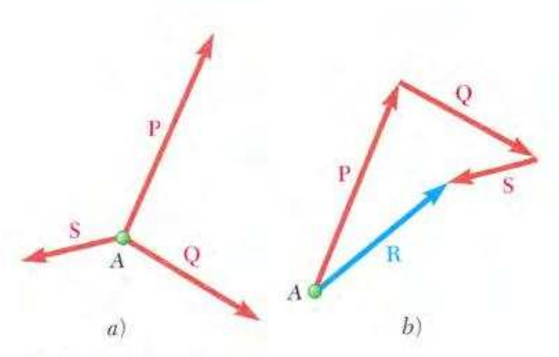


Figura 2.14

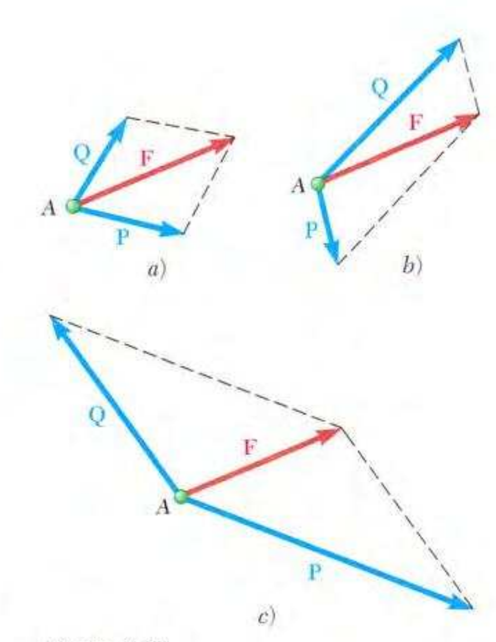


Figura 2.15

dicó antes, no importa el orden en el que se sumen los vectores **P**, **Q** y **S** que representan las fuerzas sobre la partícula.

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza **F** que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama *componentes* de la fuerza original **F**, y al proceso de sustituirlas en lugar de **F** se le llama *descomposición de la fuerza* **F** *en sus componentes.*

En este sentido, para cada fuerza **F** existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de *dos componentes* **P** *y* **Q** son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refiere. Pero aun en este caso, el número de formas en las que una fuerza **F** puede descomponerse en sus componentes es ilimitado (figura 2.15). Dos casos son de especial interés:

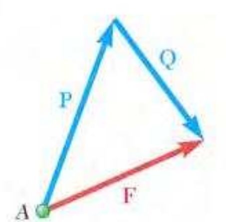


Figura 2.16

1. *Una de las dos componentes,* **P**, *se conoce.* La segunda componente, **Q**, se obtiene aplicando la regla del triángulo y uniendo la punta de **P** a la punta de **F** (figura 2.16); la magnitud, la dirección y el sentido de **Q** se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que **Q** se ha determinado, ambas componentes **P** y **Q** deben aplicarse en A.
2. *Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes.* La magnitud y el sentido de las componentes se obtiene al aplicar la ley del paralelogramo y trazando líneas, por la punta de **F**, paralelas a las líneas de acción dadas (figura 2.17). De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas **P** y **Q**, que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando la ley de los senos.

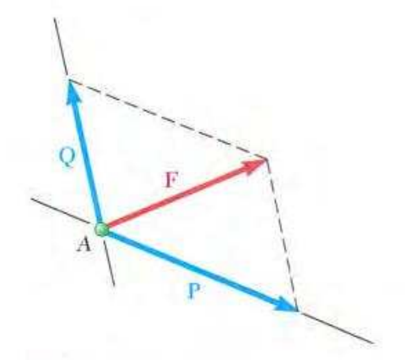
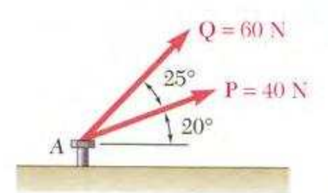


Figura 2.17

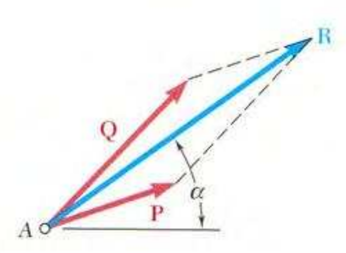
Pueden encontrarse muchos otros casos; por ejemplo, cuando la dirección de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible (véase problema resuelto 2.2). En todos los casos se traza un triángulo o un paralelogramo adecuado que satisfaga las condiciones.



PROBLEMA RESUELTO 2.1

Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el perno *A*. Determínese su resultante.

SOLUCIÓN

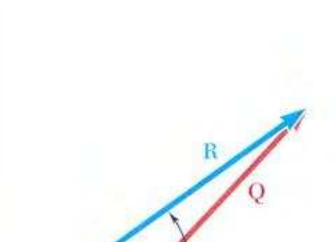


Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q**. La magnitud y la dirección de la resultante se miden y se encuentra que son

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35° \blacktriangleleft$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas **P** y **Q** se dibujan de punta a cola y otra vez se obtienen la magnitud y la dirección de la resultante por medición directa.

$$R = 98 \text{ N} \qquad \alpha = 35° \qquad \mathbf{R} = 98 \text{ N} \measuredangle 35° \blacktriangleleft$$

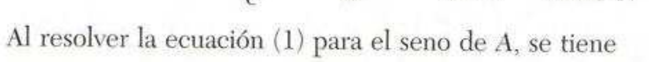


Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los dos lados y el ángulo que se forma entre ellos se conocen. Se aplica la ley de los cosenos.

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$
$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155°$$
$$R = 97.73 \text{ N}$$

Ahora con la aplicación de la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\text{sen}\,A}{Q} = \frac{\text{sen}\,B}{R} \qquad \frac{\text{sen}\,A}{60 \text{ N}} = \frac{\text{sen } 155°}{97.73 \text{ N}} \tag{1}$$



Al resolver la ecuación (1) para el seno de *A*, se tiene

$$\text{sen}\,A = \frac{(60 \text{ N}) \text{ sen } 155°}{97.73 \text{ N}}$$

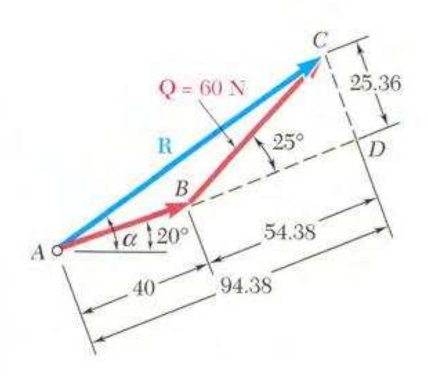
Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego su arco seno y el resultado es

$$A = 15.04° \qquad \alpha = 20° + A = 35.04°$$

Con el uso de tres cifras significativas para escribir el reultado (véase sección 1.6):



$$\mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \measuredangle 35.0° \blacktriangleleft$$



Solución trigonométrica alternativa. Se construye el triángulo rectángulo *BCD* y se calcula

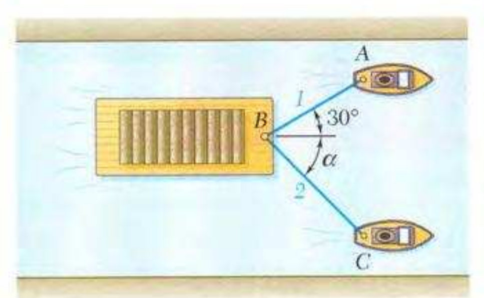
$$CD = (60 \text{ N}) \text{ sen } 25° = 25.36 \text{ N}$$
$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25° = 54.38 \text{ N}$$

Al usar entonces el triángulo *ACD*, se obtiene

$$\tan A = \frac{25.36 \text{ N}}{94.38 \text{ N}} \qquad A = 15.04°$$
$$R = \frac{25.36}{\text{sen}\,A} \qquad R = 97.73 \text{ N}$$

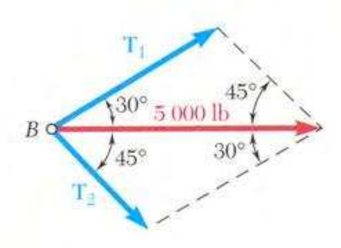
Otra vez, $\alpha = 20° + A = 35.04°$ $\qquad \mathbf{R} = 97.7 \text{ N} \measuredangle 35.0° \blacktriangleleft$

PROBLEMA RESUELTO 2.2



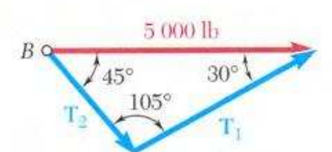
Un lanchón es arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es una fuerza de 5 000 lb dirigida a lo largo del eje del lanchón, determine: *a*) la tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que $\alpha = 45°$, y *b*) el valor de α tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima.

SOLUCIÓN



a*) Tensión para $\alpha = 45°$. *Solución gráfica. Se emplea la ley del paralelogramo; la diagonal (resultante) se sabe que es igual a 5 000 lb y que está dirigida hacia la derecha; los lados se dibujan paralelos a las cuerdas. Si el dibujo se hace a escala puede medirse

$$T_1 = 3\ 700 \text{ lb} \qquad T_2 = 2\ 600 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

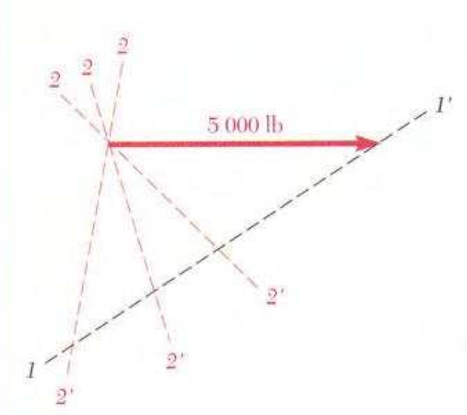


Solución trigonométrica. Puede usarse la regla del triángulo. Obsérvese que el triángulo mostrado representa la mitad del paralelogramo que se presenta antes. Si se emplea la ley de los senos, se escribe

$$\frac{T_1}{\text{sen } 45°} = \frac{T_2}{\text{sen } 30°} = \frac{5\ 000 \text{ lb}}{\text{sen } 105°}$$

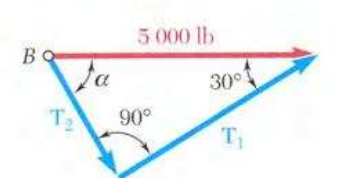
Con la calculadora, primero se calcula y se almacena el valor del último cociente. Al multiplicar este valor sucesivamente por sen 45° y sen 30°, se obtiene

$$T_1 = 3\ 660 \text{ lb} \quad T_2 = 2\ 590 \text{ lb} \blacktriangleleft$$



***b*) Valor de α para T_2 mínima.** Para determinar el valor de α tal que la tensión de la cuerda 2 sea mínima se usa otra vez la regla del triángulo. En el esquema mostrado, la línea *1-1'* es la dirección de $\mathbf{T}_1$. Las líneas *2-2'* indican varias direcciones posibles de $\mathbf{T}_2$. Observe que el mínimo valor de T_2 ocurre cuando $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son perpendiculares. El valor mínimo de T_2 es

$$T_2 = (5\ 000 \text{ lb}) \text{ sen } 30° = 2\ 500 \text{ lb}$$



Los valores correspondientes de T_1 y α son

$$T_1 = (5\ 000 \text{ lb}) \cos 30° = 4\ 330 \text{ lb}$$
$$\alpha = 90° - 30° \qquad \alpha = 60° \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores estuvieron dedicadas a la *ley del paralelogramo* para la adición de vectores y a sus aplicaciones.

Se presentaron dos problemas resueltos. En el problema resuelto 2.1, se usó la ley del paralelogramo para determinar la resultante de dos fuerzas de magnitud y dirección conocidas. En el problema resuelto 2.2, la ley se utilizó para descomponer una fuerza dada en dos componentes de dirección conocida.

Ahora se pedirá la resolución de problemas en forma independiente. Mientras que algunos problemas serán similares a los problemas resueltos, otros no lo serán. Lo que tienen en común todos los problemas resueltos y los problemas propuestos correspondientes a esta sección es que se pueden resolver con la aplicación directa de la ley del paralelogramo.

La solución de un problema propuesto debe basarse en los siguientes pasos:

1. Identificar cuáles de las fuerzas son aplicadas y cuál es la resultante. En muchas ocasiones es útil escribir la ecuación vectorial que muestra la forma en que las fuerzas están relacionadas entre sí. Por ejemplo, en el problema resuelto 2.1 se tendría

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Es deseable tener presente esta relación al momento de formular la siguiente parte de la solución.

2. Dibujar un paralelogramo con las fuerzas aplicadas como dos lados adyacentes y la resultante como la diagonal que parte del origen de los dos vectores (figura 2.2). Se puede usar la *regla del triángulo*, alternativamente, con las fuerzas aplicadas dibujadas con la unión de la parte terminal de uno de los vectores a la parte inicial del otro y dibujando la fuerza resultante extendiéndose desde la parte inicial del primer vector hasta la parte terminal del segundo vector (figura 2.7).

3. Señalar todas las dimensiones. Con el uso de uno de los triángulos del paralelogramo, o el triángulo construido de acuerdo con la regla del triángulo, se deben señalar todas las dimensiones —ya sean lados o ángulos— y determinar las dimensiones desconocidas ya sea en forma gráfica o por trigonometría. Si se usa trigonometría, debe recordarse que la ley de los cosenos se debe aplicar primero si dos lados y el ángulo que éstos forman son conocidos [problema resuelto 2.1], y la ley de los senos debe aplicarse primero si uno de los lados y todos los ángulos son conocidos [problema resuelto 2.2].

Si se tiene un estudio previo de mecánica, se podría estar tentado a ignorar las técnicas de solución de esta sección en favor de descomponer las fuerzas en sus componentes rectangulares. A pesar de que este último método es importante y será considerado en la siguiente sección, el uso de la ley del paralelogramo simplifica la solución de muchos problemas y debe dominarse en estos momentos.

Problemas†

2.1 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto A del gancho que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 75$ N y $Q = 125$ N, determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante mediante *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.2 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto A del gancho que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 60$ lb y $Q = 25$ lb, determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante mediante *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

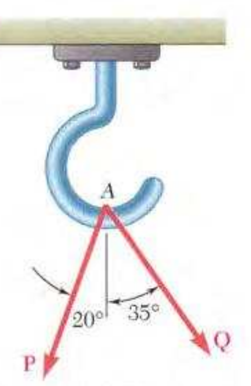


Figura P2.1 y P2.2

2.3 Los tirantes de cable AB y AD ayudan a sostener al poste AC. Si se sabe que la tensión es de 120 lb en AB y 40 lb en AD, determine gráficamente la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los tirantes en A mediante *a*) la ley del paralelogramo y *b*) la regla del triángulo.

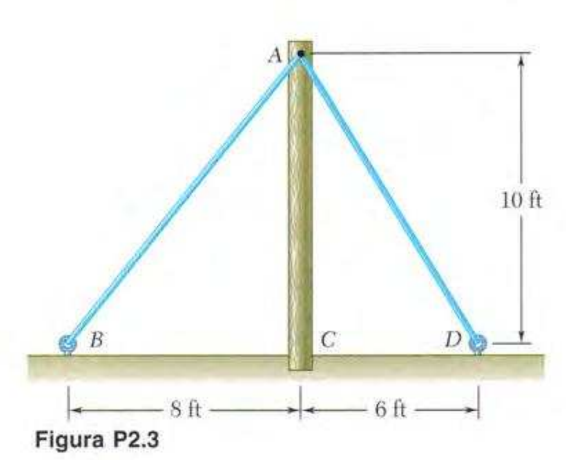


Figura P2.3

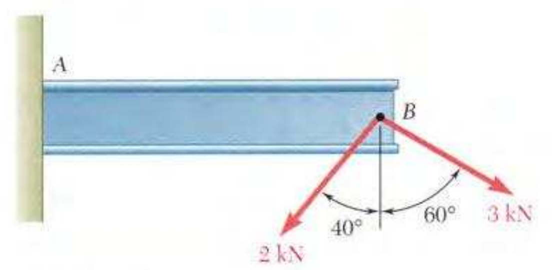


Figura *P2.4*

2.4 Se aplican dos fuerzas en el punto B de la viga AB que se muestra en la figura. Determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante mediante *a*) la ley del paralelogramo, *b*) la regla del triángulo.

2.5 La fuerza de 300 lb se debe descomponer en componentes a lo largo de las líneas *a-a'* y *b-b'*. *a*) Determine por trigonometría el ángulo α si se sabe que la componente a lo largo de *a-a'* es de 240 lb. *b*) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de *b-b'*?

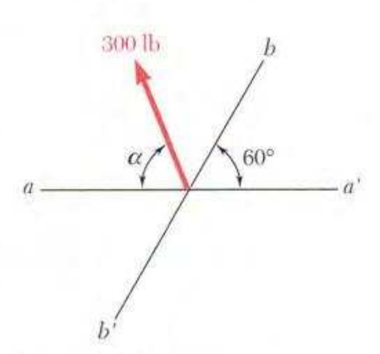


Figura P2.5 y *P2.6*

2.6 La fuerza de 300 lb se debe descomponer en componentes a lo largo de las líneas *a-a'* y *b-b'*. *a*) Determine por trigonometría el ángulo α si se sabe que la componente a lo largo de *b-b'* es de 120 lb. *b*) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de *a-a'*?

2.7 Se aplican dos fuerzas en el gancho de apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que la magnitud de **P** es 35 N, determine por trigonometría *a*) el ángulo α requerido, si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho debe ser horizontal, y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

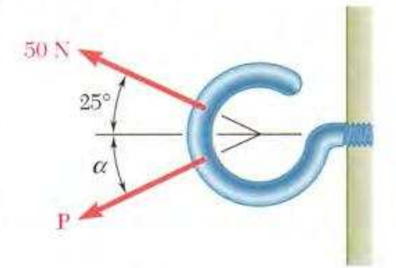


Figura P2.7

†Las respuestas para todos los problemas cuyo número está en tipo redondo (como **2.1**) se proporcionan al final del libro. Las respuestas para los problemas cuyo número está en cursiva (como ***2.4***) no se proporcionan.

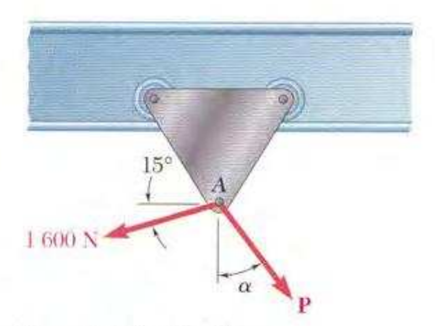


Figura P2.9 y P2.10

2.8 Para el gancho del problema 2.1, se sabe que la magnitud de **P** es 75 N, determine por trigonometría *a*) la magnitud requerida de la fuerza **Q**, si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en *A* debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.9 Un carrito que se mueve a lo largo de una viga horizontal está sometido a dos fuerzas, como se muestra en la figura. *a*) Si se sabe que $\alpha = 25°$, determine por trigonometría la magnitud de la fuerza **P** tal que la fuerza resultante ejercida sobre el carrito sea vertical. *b*) ¿Cuál es la magnitud correspondiente de la resultante?

2.10 Un carrito que se mueve a lo largo de una viga horizontal está sometido a dos fuerzas, como se muestra en la figura. Determine por trigonometría la magnitud de la fuerza **P** tal que la resultante sea una fuerza vertical de 2 500 N.

2.11 Un tanque de acero es colocado dentro de una excavación. Si se sabe que $\alpha = 20°$, determine por trigonometría *a*) la magnitud requerida de la fuerza **P**, si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en *A* debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

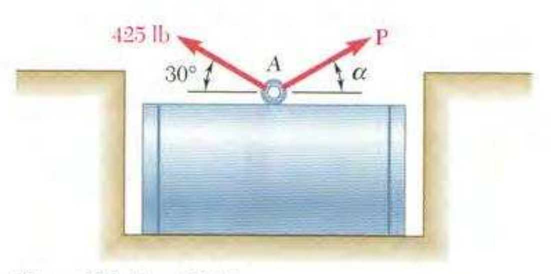


Figura P2.11 y *P2.12*

2.12 Un tanque de acero es colocado dentro de una excavación. Si se sabe que la magnitud de **P** es de 500 lb, determine por trigonometría *a*) el ángulo α requerido, si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en *A* debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.13 Para el gancho del problema 2.7, determine por trigonometría *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza **P** más pequeña, para la cual la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho es horizontal, y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.14 Para el tanque de acero del problema 2.11 determine por trigonometría *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza **P** más pequeña, para la cual la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho es vertical, y *b*) la magnitud correspondiente de **R**.

2.15 Resuelva el problema 2.2 mediante trigonometría.

2.16 Resuelva el problema 2.3 mediante trigonometría.

2.17 Resuelva el problema 2.4 mediante trigonometría.

2.18 Dos elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos están en compresión y que la fuerza en el elemento A es de 15 kN y en el elemento B es de 10 kN, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo por los elementos A y B.

2.19 Los elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos están en compresión y que la fuerza en el elemento A es de 10 kN y en el elemento B es de 15 kN, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo por los elementos A y B.

2.20 Para el gancho del problema 2.7, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en el gancho, si se sabe que $P = 75$ N y $\alpha = 50°$.

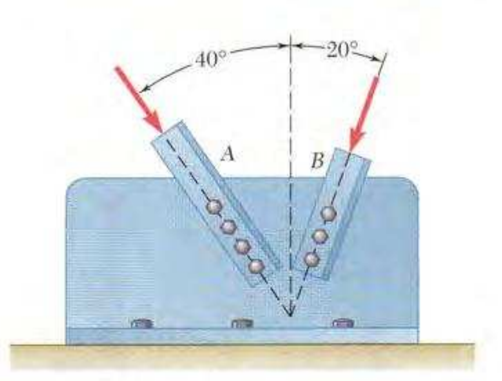


Figura *P2.18* y P2.19

2.7. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA. VECTORES UNITARIOS[†]

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.18, la fuerza $\mathbf{F}$ se ha descompuesto en una componente $\mathbf{F}_x$ a lo largo del eje x y una componente $\mathbf{F}_y$ a lo largo del eje y. El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un *rectángulo*, y las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ se llaman *componentes rectangulares*.

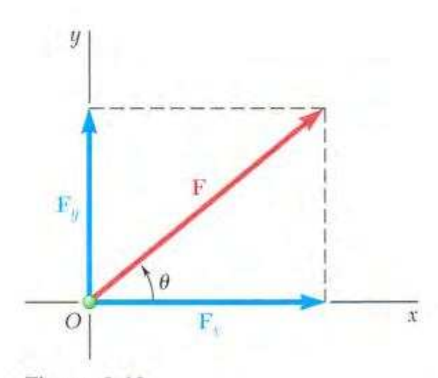


Figura 2.18

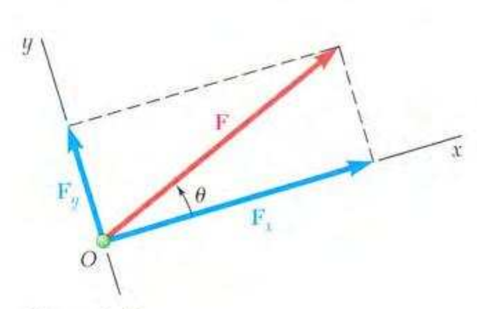


Figura 2.19

Los ejes x y y suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la figura 2.18; sin embargo, pueden seleccionarse en cualesquiera otras dos direcciones perpendiculares, tal como indica la figura 2.19. Para determinar las componentes rectangulares de una fuerza debe pensarse que las líneas de construcción mostradas en las figuras 2.18 y 2.19 son *paralelas* a los ejes x y y en lugar de *perpendiculares* a ellos. Esta práctica ayudará a evitar errores en la determinación de componentes *oblicuas*, como se vio en la sección 2.6.

[†]Las propiedades establecidas en las secciones 2.7 y 2.8 se pueden extender fácilmente a las componentes rectangulares de cualquier otra cantidad vectorial.

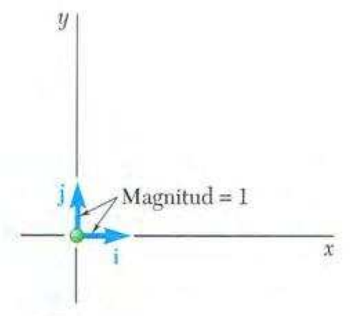


Figura 2.20

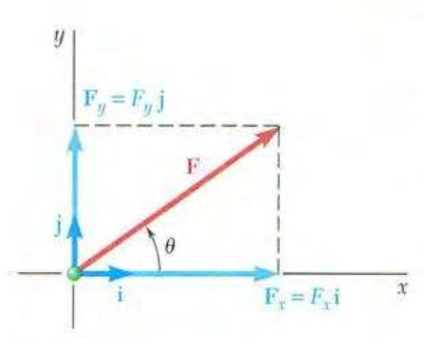


Figura 2.21

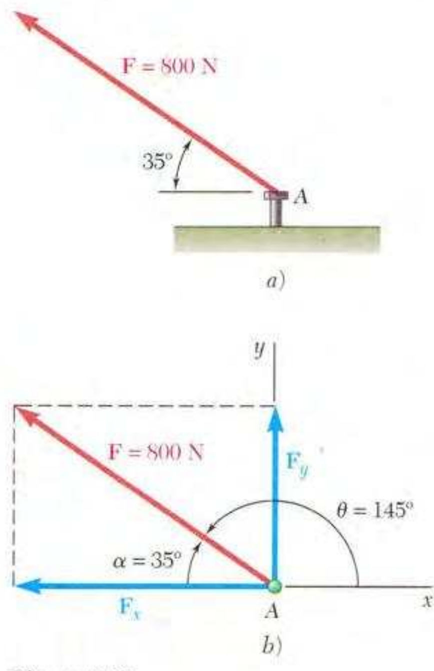


Figura 2.22

En este punto se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y. A estos vectores se les llama *vectores unitarios* y se representan por **i** y **j**, respectivamente (figura 2.20). Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dada en la sección 2.4, se observa que las componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ de una fuerza **F** pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios **i** y **j** por escalares apropiados (figura 2.21). Se escribe

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

y

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

Mientras que los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$, sus valores absolutos son respectivamente iguales a las magnitudes de las componentes de las fuerzas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$. Los escalares F_x y F_y se llaman *componentes escalares* de la fuerza **F**, mientras que las componentes reales de la fuerza $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son las *componentes vectoriales* de **F**. Sin embargo, cuando no existe alguna posibilidad de confusión, a los vectores y a las componentes escalares de **F** puede llamárseles simplemente *componentes* de **F**. Se observa que la componente escalar F_x es positiva cuando la componente vectorial $\mathbf{F}_x$ tiene el mismo sentido que el vector unitario **i** (es decir, el mismo sentido que el eje x positivo) y es negativa cuando $\mathbf{F}_x$ tiene el sentido opuesto. Una conclusión semejante puede obtenerse observando el signo de la componente escalar F_y.

Si se representa con F la magnitud de la fuerza **F** y con θ el ángulo entre **F** y el eje x, medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje x positivo (figura 2.21), se pueden expresar las componentes escalares de **F** como sigue:

$$F_x = F \cos \theta \qquad F_y = F \operatorname{sen} \theta \tag{2.8}$$

Se observa que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángluo θ entre 0 y 360° y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares F_x y F_y.

Ejemplo 1. Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un perno A como se muestra en la figura 2.22*a*. Determínese las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

Para obtener el signo correcto de las componentes escalares F_x y F_y, el valor $180° - 35° = 145°$ debe sustituirse por θ en las ecuaciones (2.8). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de F_x y F_y (figura 2.22*b*) y usar las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 35°$. Por consiguiente se puede escribir

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35° = -655 \text{ N}$$
$$F_y = +F \operatorname{sen} \alpha = +(800 \text{ N}) \operatorname{sen} 35° = +459 \text{ N}$$

Las componentes vectoriales de **F** son entonces

$$\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}$$

y **F** se puede escribir en la forma

$$\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j} \;\blacksquare$$

Ejemplo 2. Un hombre jala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en la figura 2.23*a*. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto *A*?

A partir de la figura 2.23*b* se ve que

$$F_x = +(300\text{ N})\cos\alpha \qquad F_y = -(300\text{ N})\text{ sen }\alpha$$

Observando que $AB = 10$ m, a partir de la figura 2.23*a* se encuentra que

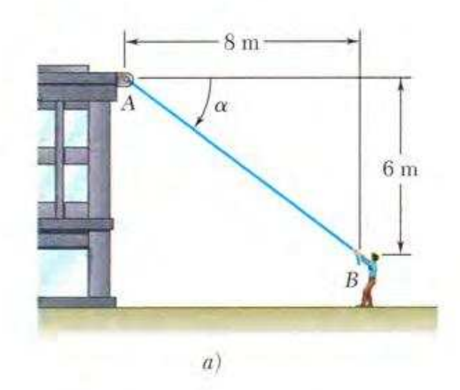
$$\cos\alpha = \frac{8\text{ m}}{AB} = \frac{8\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{4}{5} \qquad \text{sen }\alpha = \frac{6\text{ m}}{AB} = \frac{6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Entonces se obtiene

$$F_x = +(300\text{ N})\tfrac{4}{5} = +240\text{ N} \qquad F_y = -(300\text{ N})\tfrac{3}{5} = -180\text{ N}$$

y se escribe

$$\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (180\text{ N})\mathbf{j}$$ ■



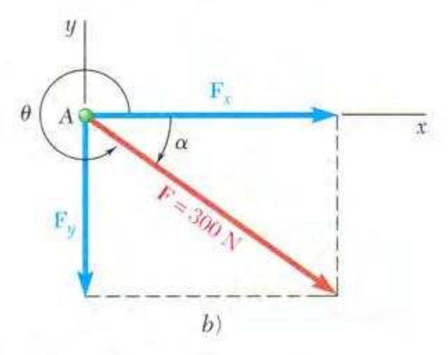


Figura 2.23

Si una fuerza **F** se define por sus componentes rectangulares F_x y F_y (véase figura 2.21), el ángulo θ que define su dirección puede obtenerse escribiendo

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

La magnitud *F* de la fuerza se obtiene con el teorema de Pitágoras y escribiendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

o bien resolviendo para *F* una de las fórmulas de las ecuaciones (2.8).

Ejemplo 3. Una fuerza $\mathbf{F} = (700\text{ lb})\mathbf{i} + (1\,500\text{ lb})\mathbf{j}$ se aplica a un perno A. Determínese la magnitud de la fuerza y el ángulo θ que forma con la horizontal.

Primero se dibuja un diagrama que muestra las dos componentes rectangulares de la fuerza y el ángulo θ (figura 2.24). A partir de la ecuación (2.9), se escribe

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1\,500\text{ lb}}{700\text{ lb}}$$

Con la calculadora,[†] se hace la división de 1 500 lb entre 700 lb; se calcula el arco tangente de este cociente y se obtiene $\theta = 65.0°$. Al resolver la segunda de las ecuaciones (2.8) para *F*, se tiene

$$F = \frac{F_y}{\text{sen }\theta} = \frac{1\,500\text{ lb}}{\text{sen }65.0°} = 1\,655\text{ lb}$$

El último cálculo se facilita si el valor de F_y se almacena en la memoria desde que se introduce, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre sen θ. ■

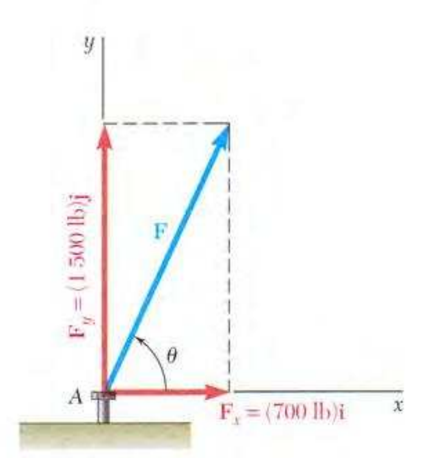
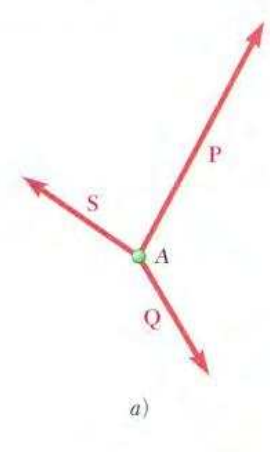


Figura 2.24

[†] Se supone que la calculadora que se está utilizando tiene teclas para el cálculo de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas. Algunas calculadoras también tienen teclas para convertir directamente de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa. Este tipo de calculadoras eliminan la necesidad de calcular funciones trigonométricas en los ejemplos 1, 2 y 3 y en problemas del mismo tipo.

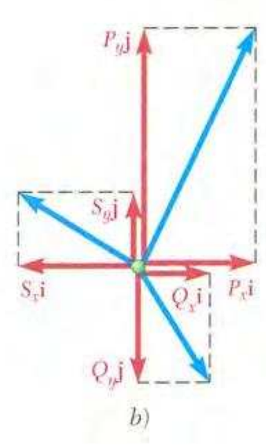
2.8. ADICIÓN DE FUERZAS SUMANDO SUS COMPONENTES *X* Y *Y*

En la sección 2.2 se estudió que las fuerzas deben sumarse de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir de esta ley se derivaron en las secciones 2.4 y 2.5 otros dos métodos más directos aplicables a la solución *gráfica* de los problemas: la regla del triángulo para la suma de dos fuerzas y la regla del polígono para la adición de tres o más fuerzas. También se vio que el triángulo de fuerzas usado para definir la resultante de dos fuerzas podría usarse para obtener una solución *trigonométrica*.



a)

Cuando se van a sumar tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas que define a la fuerza resultante. En este caso puede obtenerse una solución *analítica* del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares. Considere, por ejemplo, las tres fuerzas **P**, **Q** y **S** que actúan sobre una partícula A (figura 2.25*a*). Su resultante **R** está definida por la relación



b)

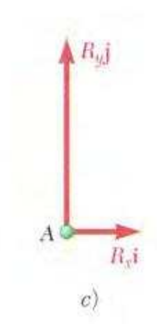
$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \tag{2.11}$$

Si se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} &= P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y \tag{2.12}$$

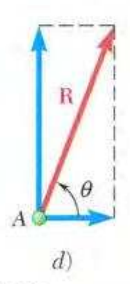


c)

o, en forma breve,

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \tag{2.13}$$

Por tanto, se puede concluir que *las componentes escalares* R_x *y* R_y *de la resultante* **R** *de varias fuerzas que actúan sobre una partícula se obtienen separando de manera algebraica las correspondientes componentes escalares de las fuerzas dadas.*[†]

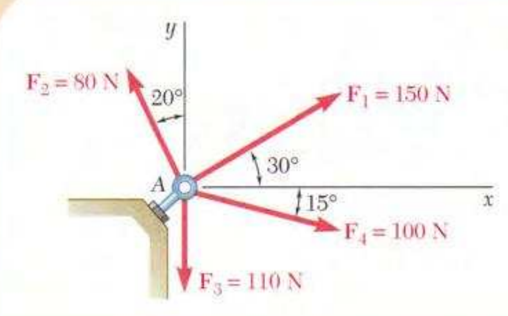


d)

Figura 2.25

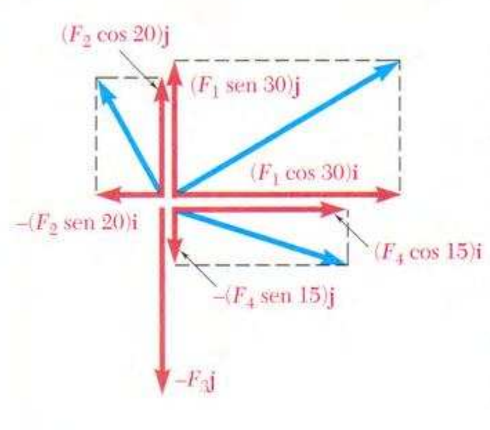
En la práctica, la determinación de la resultante **R** se realiza en tres etapas, como se ilustra en la figura 2.25. Primero, las fuerzas mostradas en la figura 2.25*a* se descomponen en sus componentes x y y (figura 2.25*b*). Con la suma de estas componentes x y y de **R** (figura 2.25*c*). Finalmente, la resultante $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$ se determina aplicando la ley del paralelogramo (figura 2.25*d*). El procedimiento que se acaba de describir se realiza con más eficiencia si los cálculos se tabulan. Aunque éste es el único método analítico práctico para la adición de tres o más fuerzas, con frecuencia también se le prefiere sobre la solución trigonométrica en el caso de la suma de dos fuerzas.

[†]Obviamente, este resultado se puede aplicar también a la adición de otras cantidades vectoriales, aceleraciones o cantidades de movimiento.



PROBLEMA RESUELTO 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno A como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.



SOLUCIÓN

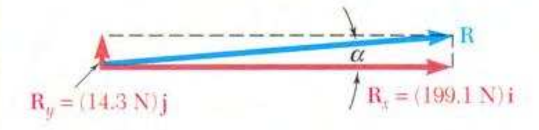
Las componentes x y y de cada fuerza se determinan por trigonometría, como se muestra en la figura y se escriben en la tabla. De acuerdo con la convención adoptada en la sección 2.7, un número escalar que representa la componente de una fuerza es positivo si la componente tiene el mismo sentido que el correspondiente eje de coordenadas. Entonces, las componentes x que actúan a la derecha y las componentes y que actúan hacia arriba se representan por números positivos.

Fuerza	Magnitud, N	Componente x, N	Componente y, N
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	−27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	−25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

En estas condiciones la resultante $\mathbf{R}$ de las cuatro fuerzas es

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (199.1 \text{ N})\mathbf{i} + (14.3 \text{ N})\mathbf{j} \quad ◀$$

La magnitud y la dirección de la resultante ya puede determinarse. Del triángulo mostrado en la figura, se tiene



$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}} \qquad \alpha = 4.1°$$

$$R = \frac{14.3 \text{ N}}{\text{sen } \alpha} = 199.6 \text{ N} \qquad \mathbf{R} = 199.6 \text{ N} \measuredangle 4.1° \quad ◀$$

El último cálculo puede facilitarse con el uso de calculadora, si el valor de R_y se almacena en la memoria al introducirse, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre sen α. (Véase también la nota al pie de la página 29.)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Como se vio en la lección anterior, la resultante de dos fuerzas puede ser determinada gráficamente o a partir de un triángulo oblicuo, con el uso de la trigonometría.

A. Cuando están involucradas tres o más fuerzas, la determinación de su resultante **R** se lleva a cabo de manera más sencilla descomponiendo primero cada una de las fuerzas en sus *componentes rectangulares*. Se pueden encontrar dos casos, que dependen de la forma en que esté definida cada una de las fuerzas dadas:

Caso 1. La fuerza F está definida por medio de su magnitud F y el ángulo α que forma con el eje de las x. Las componentes x y y de la fuerza se pueden obtener, respectivamente, al multiplicar F por cos α y por sen α [ejemplo 1].

Caso 2. La fuerza F se define por medio de su magnitud F y las coordenadas de dos puntos A y B que se encuentran a lo largo de su línea de acción (figura 2.23). Por medio de la trigonometría, primero se puede determinar el ángulo α que **F** forma con el eje x. Sin embargo, las componentes de **F** también se pueden obtener directamente a partir de las proporciones entre las diversas dimensiones involucradas, sin determinar realmente α [ejemplo 2].

B. Componentes rectangulares de la resultante. Las componentes R_x y R_y de la resultante se pueden obtener con la suma algebraica de las componentes correspondientes de las fuerzas dadas [problema resuelto 2.3].

La resultante se puede expresar en *forma vectorial* con los vectores unitarios **i** y **j**, los cuales están dirigidos, respectivamente, a lo largo de los ejes x y y:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j}$$

De manera alternativa, se pueden determinar la *magnitud y la dirección* de la resultante resolviendo para R y para el ángulo que **R** forma con el eje x, el triángulo rectángulo de lados R_x y R_y.

Problemas

2.21 y 2.22 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

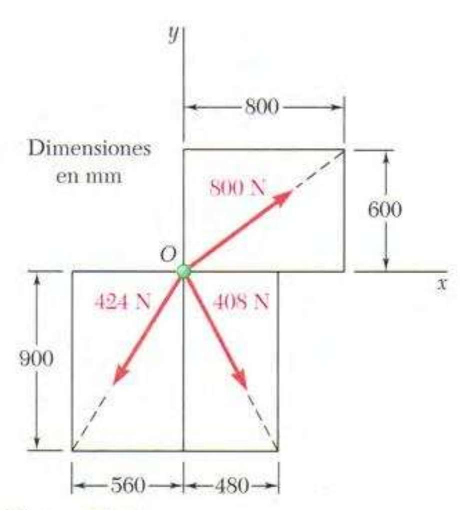


Figura P2.21

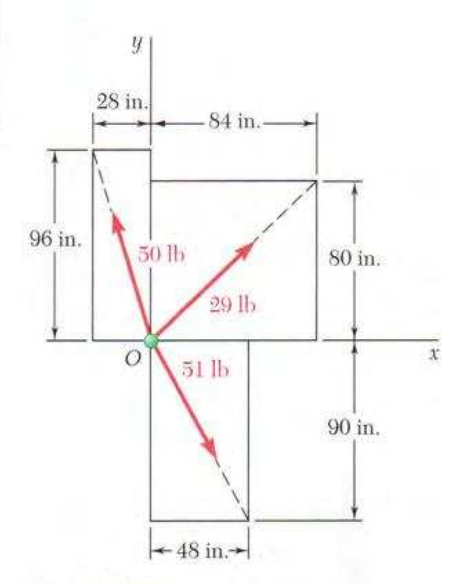


Figura P2.22

2.23 y *2.24* Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

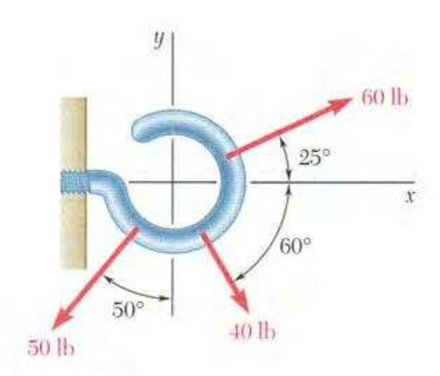


Figura P2.23

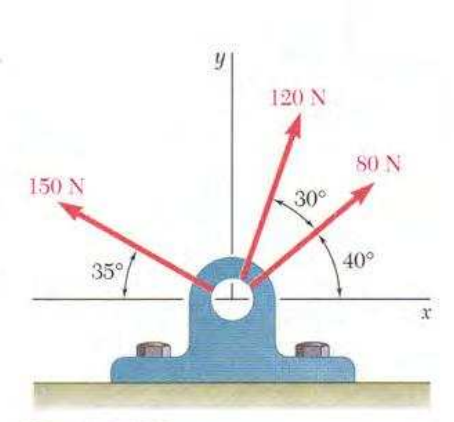


Figura *P2.24*

2.25 El elemento BD ejerce sobre el elemento ABC una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea BD. Si se sabe que **P** debe tener una componente horizontal de 300 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente vertical.

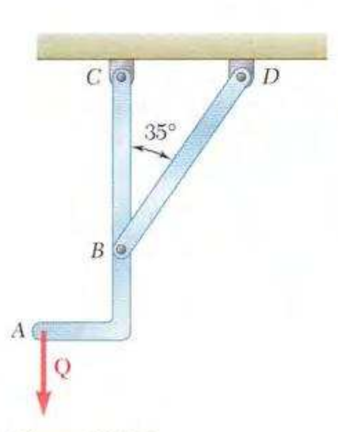


Figura P2.25

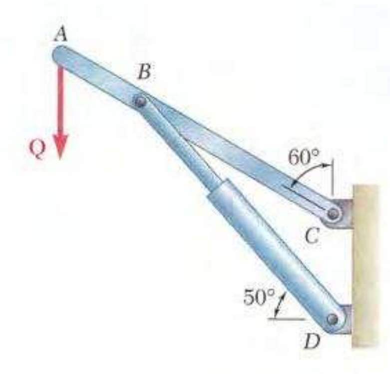


Figura P2.26

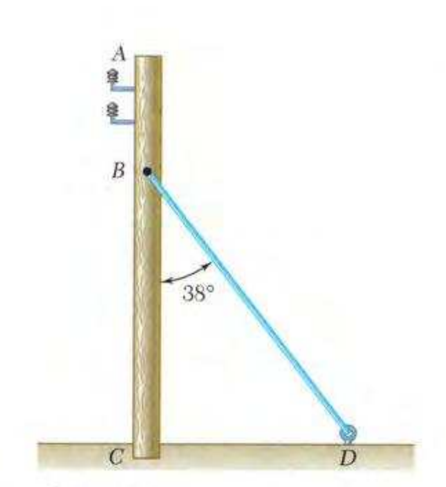


Figura P2.27 y *P2.28*

2.26 El cilindro hidráulico *BD* ejerce una fuerza **P** sobre el elemento *ABC*, dicha fuerza está dirigida a lo largo de la línea *BD*. Si se sabe que **P** debe tener una componente de 750 N perpendicular al elemento *ABC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente paralela a *ABC*.

2.27 El alambre atirantado *BD* ejerce sobre el poste telefónico *AC* una fuerza **P** dirigida a lo largo de *BD*. Si se sabe que **P** tiene una componente de 120 N perpendicular al poste *AC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente a lo largo de la línea *AC*.

2.28 El alambre atirantado *BD* ejerce sobre el poste telefónico *AC* una fuerza **P** dirigida a lo largo de *BD*. Si se sabe que **P** tiene una componente de 180 N a lo largo de la línea *AC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) su componente en una dirección perpendicular a *AC*.

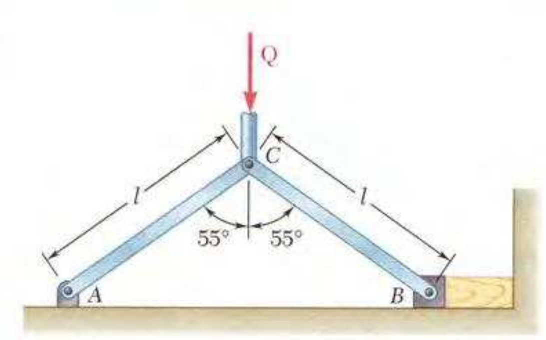


Figura *P2.29*

2.29 El elemento *CB* de la prensa de banco que se muestra en la figura, ejerce sobre el bloque *B* una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea *CB*. Si se sabe que la componente horizontal de **P** debe tener una magnitud de 1 220 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente vertical.

2.30 El cable *AC* ejerce sobre la viga *AB* una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea *AC*. Si se sabe que **P** debe tener una componente vertical de 350 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente horizontal.

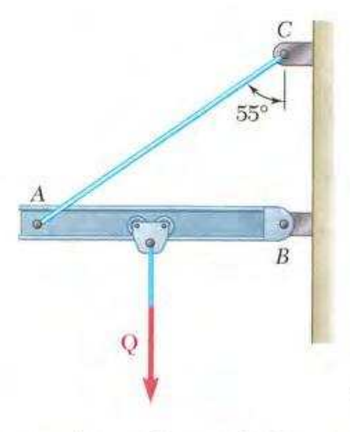


Figura P2.30

2.31 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.22.

2.32 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.24.

2.33 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.23.

2.34 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.21.

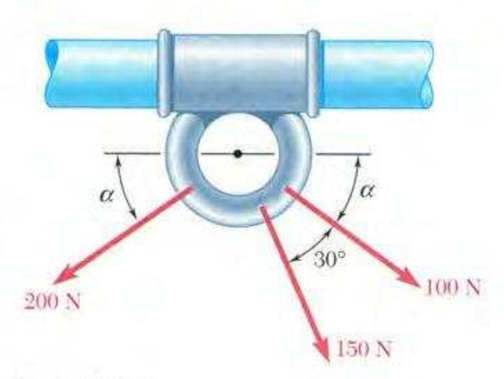


Figura P2.35

2.35 Si se sabe que $\alpha = 35°$, determine la resultante de las tres fuerzas mostradas en la figura.

2.36 Si se sabe que la tensión en el cable BC es de 725 N, determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB.

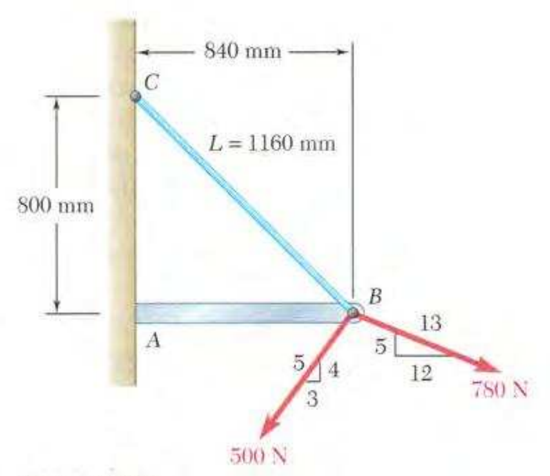


Figura *P2.36*

2.37 Si se sabe que $\alpha = 40°$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.38 Si se sabe que $\alpha = 75°$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

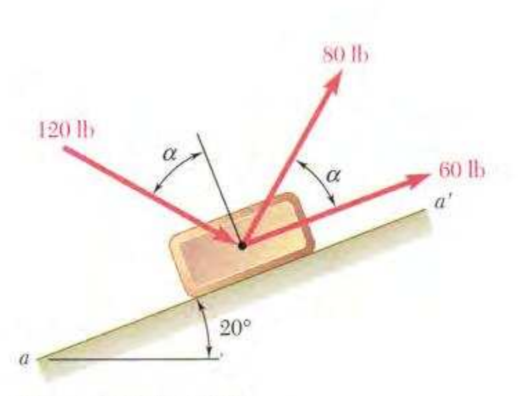


Figura P2.37 y *P2.38*

2.39 Para el collarín del problema 2.35, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.40 Para la viga del problema 2.36, determine *a*) la tensión requerida en el cable BC si la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.41 Determine *a*) la tensión requerida en el cable AC, si se sabe que la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto C del aguilón BC debe estar dirigida a lo largo de BC, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.42 Para el bloque de los problemas 2.37 y 2.38, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser paralela al plano inclinado, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante

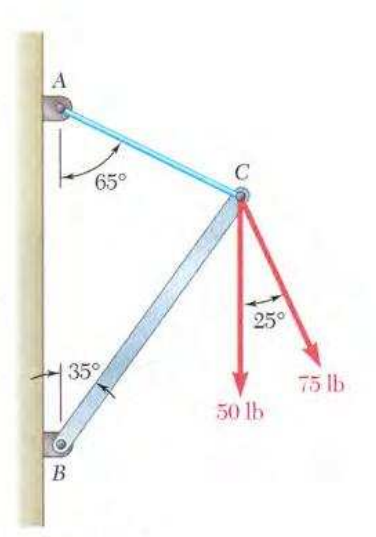


Figura *P2.41*

2.9. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

En las secciones anteriores se expusieron los métodos utilizados para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque no ha ocurrido en ninguno de los problemas examinados hasta ahora, es posible que la resultante sea cero. En tal caso, el efecto neto de las fuerzas dadas es cero, y se dice que la partícula está en equilibrio. Entonces se tiene la siguiente definición: *si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.*

Una partícula sometida a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción, pero sentidos opuestos. Entonces la resultante de las dos fuerzas es cero. En la figura 2.26 se ilustra este caso.

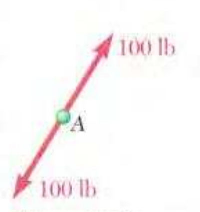


Figura 2.26

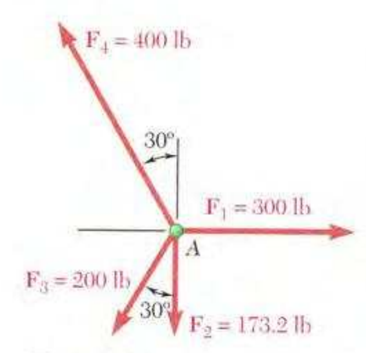


Figura 2.27

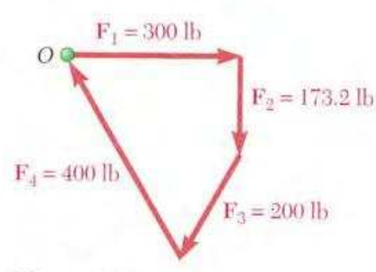


Figura 2.28

Otro caso de una partícula en equilibrio se muestra en la figura 2.27, donde aparecen cuatro fuerzas que actúan sobre A. En la figura 2.28, la resultante de las fuerzas dadas se determina por la regla del polígono. Empezando en el punto O con $\mathbf{F}_1$ y acomodando las fuerzas punta a cola, se encuentra que la punta de $\mathbf{F}_4$ coincide con el punto de partida O, así que la resultante **R** del sistema de fuerzas dado es cero y la partícula está en equilibrio.

El polígono cerrado de la figura 2.28 proporciona una expresión *gráfica* del equilibrio de A. Para expresar en forma *algebraica* las condiciones del equilibrio de una partícula se escribe

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = 0 \tag{2.14}$$

Descomponiendo cada fuerza **F** en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}) = 0 \qquad \text{o} \qquad (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} = 0$$

Se concluye que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

Regresando a la partícula mostrada en la figura 2.27, se comprueba que las condiciones de equilibrio se satisfacen. Se escribe

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \text{ sen } 30° - (400 \text{ lb}) \text{ sen } 30° \\ &= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0 \\ \Sigma F_y &= -173.2 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \cos 30° + (400 \text{ lb}) \cos 30° \\ &= -173.2 \text{ lb} - 173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0\end{aligned}$$

2.10. PRIMERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).

De esta ley y de la definición de equilibrio expuesta en la sección 2.9, se deduce que una partícula en equilibrio puede estar en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante. En la siguiente sección se considerarán varios problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

2.11. PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

En la práctica, un problema de ingeniería mecánica se deriva de una situación física real. Un esquema que muestra las condiciones físicas del problema se conoce como *diagrama espacial.*

Los métodos de análisis estudiados en las secciones anteriores se aplican a un sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula. Un gran número de problemas que tratan de estructuras pueden reducirse a problemas concernientes al equilibrio de una partícula. Esto se hace

escogiendo una partícula significativa y dibujando un diagrama separado que muestra a ésta y a todas las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho diagrama se conoce como *diagrama de cuerpo libre*.

Por ejemplo, considérese el embalaje de madera de 75 kg mostrado en el diagrama espacial de la figura 2.29*a*. Éste descansaba entre dos edificios y ahora es levantado hacia la plataforma de un camión que lo quitará de ahí. El embalaje está soportado por un cable vertical unido en *A* a dos cuerdas que pasan sobre poleas fijas a los edificios en *B* y *C*. Se desea determinar la tensión en cada una de las cuerdas *AB* y *AC*.

Para resolver el problema debe trazarse un diagrama de cuerpo libre que muestre a la partícula en equilibrio. Puesto que se analizan las tensiones en las cuerdas, el diagrama de cuerpo libre debe incluir al menos una de estas tensiones y si es posible a ambas. El punto *A* parece ser un buen cuerpo libre para este problema. El diagrama de cuerpo libre del punto *A* se muestra en la figura 2.29*b*. Ésta muestra al punto *A* y las fuerzas ejercidas sobre *A* por el cable vertical y las dos cuerdas. La fuerza ejercida por el cable está dirigida hacia abajo y es igual al peso **W** del contenedor. De acuerdo con la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

y se indica este valor en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen, pero como son iguales en magnitud a la tensión en la cuerda *AB* y en la cuerda *AC*, se representan con $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$ y se dibujan hacia fuera de *A* en las direcciones mostradas por el diagrama espacial. No se incluyen otros detalles en el diagrama de cuerpo libre.

Puesto que el punto *A* está en equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre él deben formar un triángulo cerrado cuando se dibujan de punta a cola. Este *triángulo de fuerzas* ha sido dibujado en la figura 2.29*c*. Los vectores T_{AB} y T_{AC} de las tensiones en las cuerdas pueden encontrarse gráficamente si el triángulo se dibuja a escala, o pueden encontrarse mediante la trigonometría. Si se escoge el último método de solución, con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 60°} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 40°} = \frac{736 \text{ N}}{\text{sen } 80°}$$

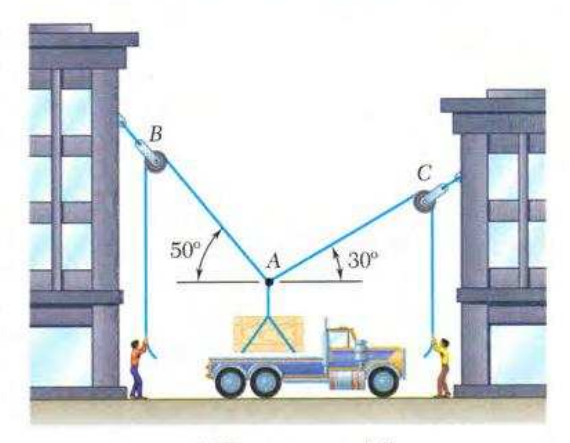
$$T_{AB} = 647 \text{ N} \qquad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Cuando una partícula está en *equilibrio bajo tres fuerzas*, el problema siempre puede resolverse dibujando un triángulo de fuerzas. Cuando una partícula está en *equilibrio bajo más de tres fuerzas*, el problema puede resolverse gráficamente dibujando un polígono de fuerzas. Si se desea una solución analítica, se deben resolver las *ecuaciones de equilibrio* dadas en la sección 2.9:

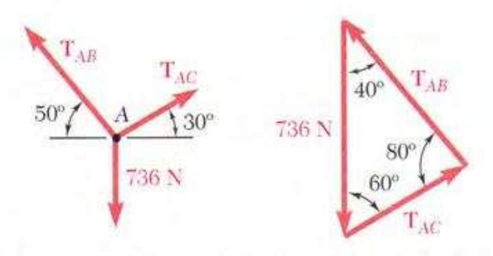
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \tag{2.15}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para no más de *dos incógnitas*; en forma semejante, el triángulo de fuerzas usado en el caso de equilibrio bajo tres fuerzas puede resolverse para dos incógnitas.

Los tipos más comunes de problemas son aquellos donde las dos incógnitas representan 1) las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza, 2) las magnitudes de las dos fuerzas, cada una de dirección conocida. También se encuentran problemas que requieren la determinación del valor máximo o mínimo de la magnitud de una fuerza (véanse problemas 2.57 a 2.61).

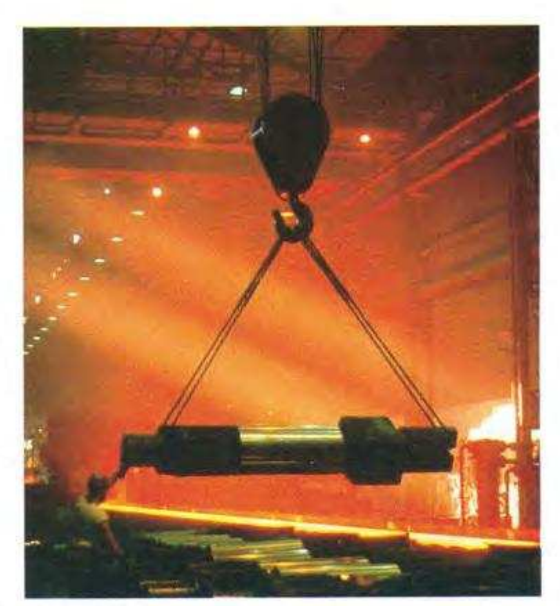


a) Diagrama espacial

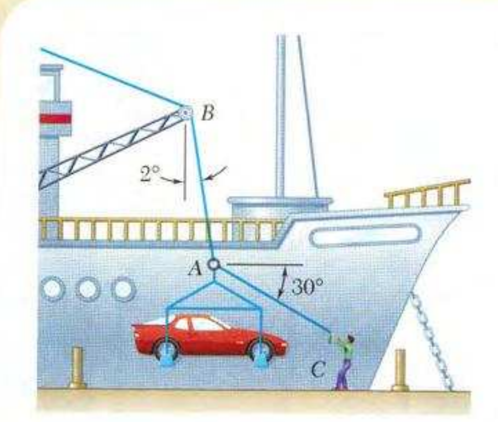


b) Diagrama de cuerpo libre *c*) Triángulo de fuerzas

Figura 2.29

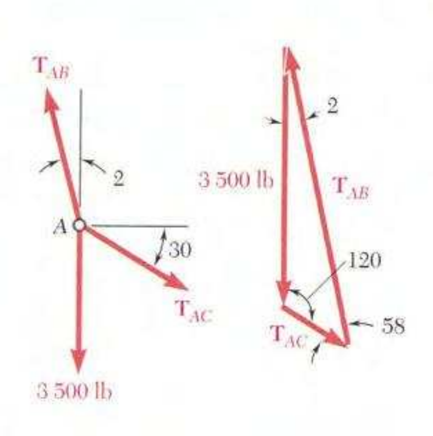


Fotografía 2.1 Como se ilustró en un ejemplo anterior, es posible determinar las tensiones en los cables que sostienen al eje que se muestra en la fotografía, considerando al gancho como una partícula y después aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas que actúan sobre el gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.4

En la operación de descarga de un barco, un automóvil de 3 500 lb es soportado por un cable. Se ata una cuerda al cable en A y se tira para centrar al automóvil sobre la posición deseada. El ángulo entre el cable y la vertical es de 2°, mientras que el ángulo entre la cuerda y la horizontal es de 30°. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?



SOLUCIÓN

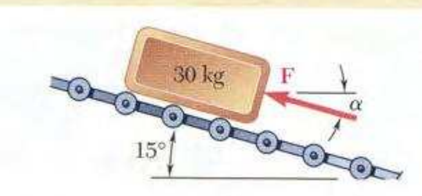
Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre y se dibuja el diagrama completo de cuerpo libre. T_{AB} es la tensión en el cable AB y T_{AC} es la tensión de la cuerda.

Condición de equilibrio. Como sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio. Con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 120°} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 2°} = \frac{3\ 500 \text{ lb}}{\text{sen } 58°}$$

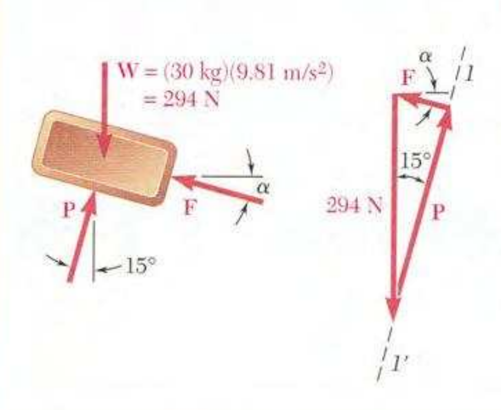
Utilizando una calculadora, primero se calcula y se guarda el valor del último cociente. Se multiplica este valor en forma sucesiva por sen 120° y sen 2°, se obtiene

$$T_{AB} = 3\ 570 \text{ lb} \qquad T_{AC} = 144 \text{ lb} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 2.5

Determine la magnitud, dirección y sentido de la fuerza **F** más pequeña que mantendrá en equilibrio al paquete que se muestra al margen. Nótese que la fuerza ejercida por los rodillos sobre el paquete es perpendicular al plano inclinado.



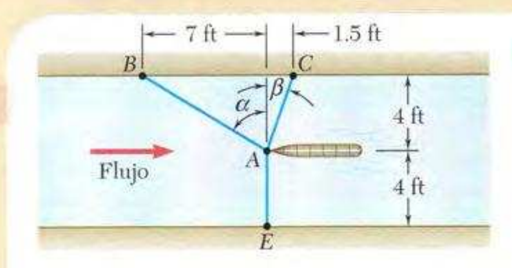
SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el paquete como cuerpo libre, suponiendo que éste se puede tratar como partícula. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

Condición de equilibrio. Puesto que sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que está en equilibrio. La línea *1-1'* representa la dirección conocida de **P**. Para obtener el valor mínimo de la fuerza **F** se escoge la dirección de **F** perpendicular a la de **P**. De la geometría del triángulo obtenido, se encuentra que

$$F = (294 \text{ N}) \text{ sen } 15° = 76.1 \text{ N} \qquad \alpha = 15°$$

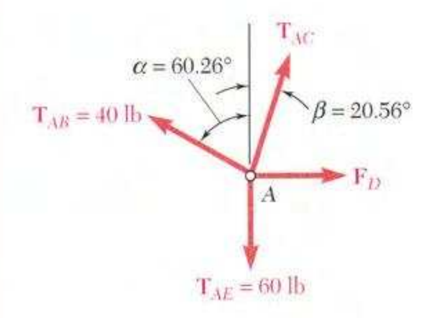
$$\mathbf{F} = 76.1 \text{ N} ∡15° \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 2.6

Como parte del diseño de un nuevo velero, se desea determinar la fuerza de arrastre que puede esperarse a cierta velocidad. Para hacerlo, se coloca un modelo del casco propuesto en un canal de prueba y se usan tres cables para mantener su proa en el eje del centro del canal. Las lecturas de los dinamómetros indican que para una velocidad dada la tensión es de 40 lb en el cable AB y de 60 lb en el cable AE. Determine la fuerza de arrastre ejercida sobre el casco y la tensión en el cable AC.

SOLUCIÓN



Determinación de los ángulos. En primer lugar se determinan los ángulos α y β que definen las direcciones de los cables AB y AC. Se escribe

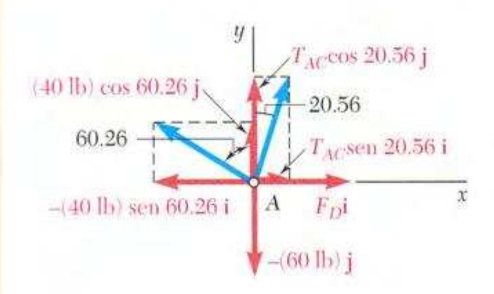
$$\tan \alpha = \frac{7 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 1.75 \qquad \tan \beta = \frac{1.5 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 0.375$$

$$\alpha = 60.26° \qquad \beta = 20.56°$$

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el casco como cuerpo libre, se traza el diagrama del cuerpo libre que incluye las fuerzas ejercidas por los tres cables sobre el casco, así como la fuerza de arrastre $\mathbf{F}_D$ ejercida por el flujo.

Condición de equilibrio. Se expresa que el casco está en equilibrio y la resultante de todas las fuerzas se escribe como cero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \qquad (1)$$



Como aparecen más de tres fuerzas, se obtendrán sus componentes x y y:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= -(40 \text{ lb}) \text{ sen } 60.26°\mathbf{i} + (40 \text{ lb}) \cos 60.26°\mathbf{j} \\
&= -(34.73 \text{ lb})\mathbf{i} + (19.84 \text{ lb})\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC} \text{ sen } 20.56°\mathbf{i} + T_{AC} \cos 20.56°\mathbf{j} \\
&= 0.3512T_{AC}\mathbf{i} + 0.9363T_{AC}\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AE} &= -(60 \text{ lb})\mathbf{j} \\
\mathbf{F}_D &= F_D\mathbf{i}
\end{aligned}$$

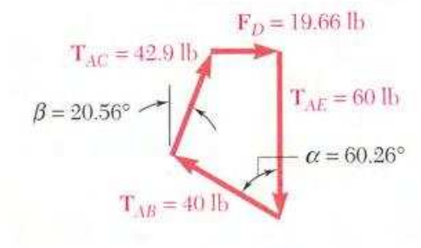
Se sustituyen las expresiones obtenidas en la ecuación (1) y se factorizan los vectores unitarios **i** y **j**, por lo que se tiene

$$(-34.73 \text{ lb} + 0.3512T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (19.84 \text{ lb} + 0.9363T_{AC} - 60 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$

Esta ecuación se cumplirá si, y sólo si, los coeficientes de **i** y **j** son iguales a cero. Así se obtienen las siguientes dos ecuaciones de equilibrio, que expresan, respectivamente, que la suma de las componentes x y la suma de las componentes y de las fuerzas dadas debe ser cero.

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -34.73 \text{ lb} + 0.3512T_{AC} + F_D = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad 19.84 \text{ lb} + 0.9363T_{AC} - 60 \text{ lb} = 0 \qquad (3)$$



De la ecuación (3) se encuentra $\qquad T_{AC} = +42.9 \text{ lb}$ ◄

y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se obtiene $F_D = +19.66 \text{ lb}$ ◄

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre se supuso que había un sentido para cada fuerza desconocida. El signo positivo en la respuesta señala que el sentido supuesto era el correcto. Puede dibujarse el polígono de fuerzas completo y así comprobar los resultados.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser igual a cero. En el caso de una partícula sobre la que actúan *fuerzas coplanares*, expresar este hecho proporcionará dos relaciones entre las fuerzas involucradas. Como se vio en los problemas resueltos recién presentados, estas relaciones pueden utilizarse para determinar dos incógnitas —como la magnitud y la dirección de una fuerza o las magnitudes de dos fuerzas—.

Trazar un diagrama de cuerpo libre es el primer paso a seguir en la solución de un problema que involucre el equilibrio de una partícula. En este diagrama se muestran la partícula y todas las fuerzas que actúan sobre ella. En el diagrama de cuerpo libre debe indicarse la magnitud de las fuerzas conocidas, así como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido deben designarse por medio de un símbolo adecuado. No tiene que incluirse ninguna otra información adicional en el diagrama de cuerpo libre.

Es indispensable trazar un diagrama de cuerpo libre claro y preciso para poder resolver cualquier problema de equilibrio. La omisión de este paso puede ahorrarnos lápiz y papel, pero es muy probable que nos lleve a una solución incorrecta.

Caso 1. ***Si sólo están involucradas tres fuerzas*** en el diagrama de cuerpo libre, el resto de la solución se lleva a cabo más fácilmente uniendo en un dibujo la parte terminal de una fuerza con la parte inicial de otra (punta), para formar un *triángulo de fuerzas*. Este triángulo puede resolverse gráficamente o por trigonometría para un máximo de dos incógnitas [problemas resueltos 2.4 y 2.5].

Caso 2. ***Si están involucradas más de tres fuerzas,*** lo más conveniente es emplear una *solución analítica*. Los ejes x y y se seleccionan y cada una de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre se descompone en sus componentes x y y. Al expresar que tanto la suma de las componentes en x como la suma de las componentes en y de las fuerzas son iguales a cero, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para no más de dos incógnitas [problema resuelto 2.6].

Se recomienda firmemente que al emplear una solución analítica se escriban las ecuaciones de equilibrio en la misma forma que las ecuaciones (2) y (3) del problema resuelto 2.6. La práctica adoptada por algunos estudiantes de colocar al inicio las incógnitas del lado izquierdo de la ecuación y las cantidades conocidas del lado derecho puede llevar a una confusión al momento de asignar el signo correcto a cada uno de los términos.

Se ha señalado que, independientemente del método empleado para resolver un problema de equilibrio bidimensional, sólo puede determinarse un máximo de dos incógnitas. Si un problema bidimensional involucra más de dos incógnitas, deben obtenerse una o más relaciones adicionales a partir de la información contenida en el enunciado del problema.

Problemas

2.43 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 20°$, determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

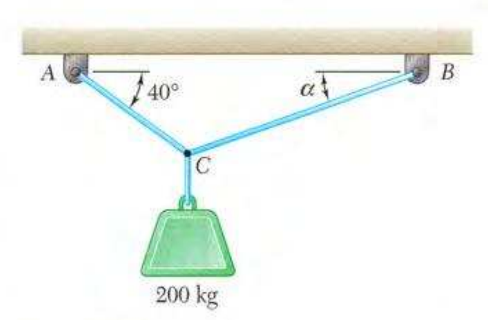


Figura P2.43

2.44 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

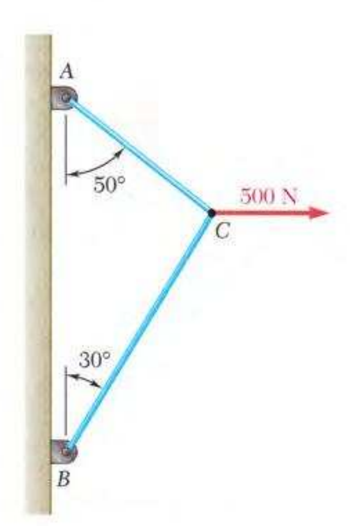


Figura *P2.44*

2.45 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $\mathbf{P} = 500$ N y $\alpha = 60°$, determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

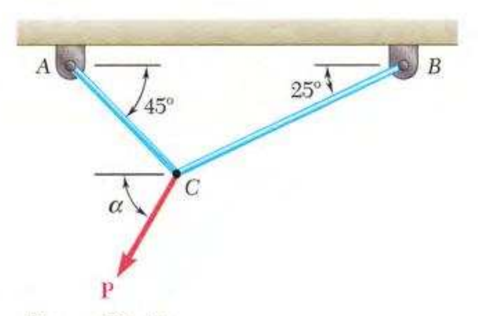
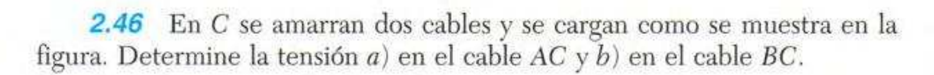


Figura P2.45



2.46 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

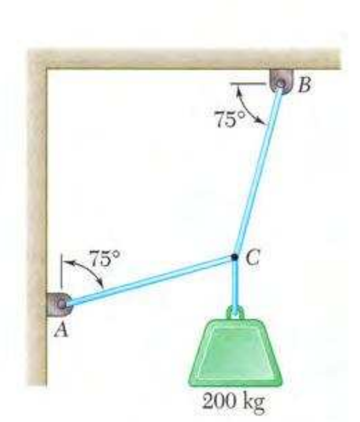


Figura *P2.46*

2.47 Si se sabe que $\alpha = 20°$, determine la tensión *a*) en el cable *AC*, *b*) en la cuerda *BC*.

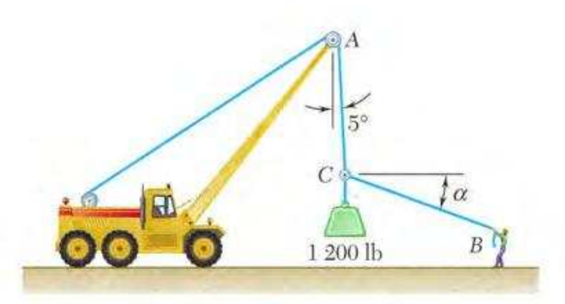


Figura P2.47

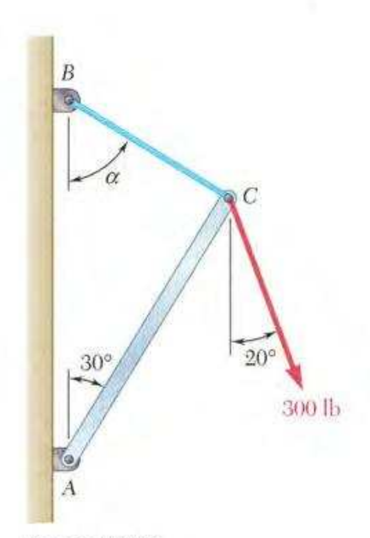


Figura P2.48

2.48 Si se sabe que $\alpha = 55°$ y que el aguilón *AC* ejerce sobre la articulación *C* una fuerza dirigida a lo largo de la línea *AC*, determine *a*) la magnitud de la fuerza y *b*) la tensión en el cable *BC*.

2.49 Las fuerzas **P** y **Q** se aplican al componente de una pieza de ensamble de avión como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ lb y $Q = 650$ lb y que la pieza de ensamble se encuentra en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las varillas *A* y *B*.

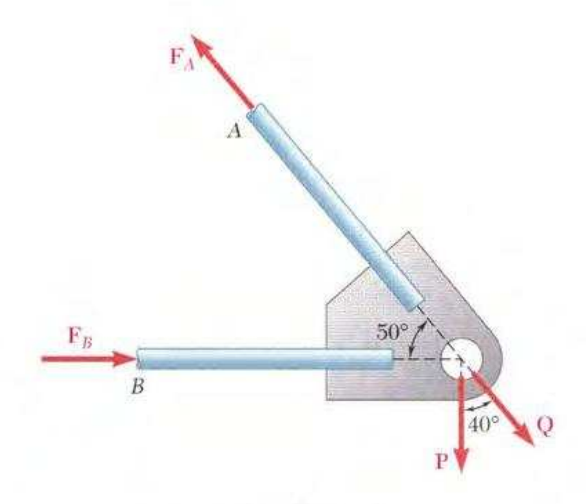


Figura P2.49 y *P2.50*

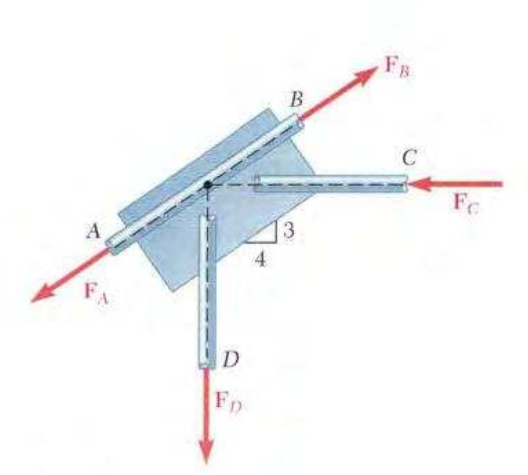


Figura P2.51 y P2.52

2.50 Las fuerzas **P** y **Q** se aplican al componente de una pieza de ensamble de avión como se muestra en la figura. Si se sabe que la pieza de ensamble se encuentra en equilibrio y que las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las barras *A* y *B* son $F_A = 750$ lb y $F_B = 400$ lb, determine las magnitudes de **P** y **Q**.

2.51 Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $F_A = 8$ kN y que $F_B = 16$ kN, determine las magnitudes de las dos fuerzas restantes.

2.52 Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $F_A = 5$ kN y que $F_D = 6$ kN, determine las magnitudes de las dos fuerzas restantes.

2.53 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 60$ lb determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

2.54 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de Q para los cuales la tensión no será mayor que 60 lb en cualquiera de los cables.

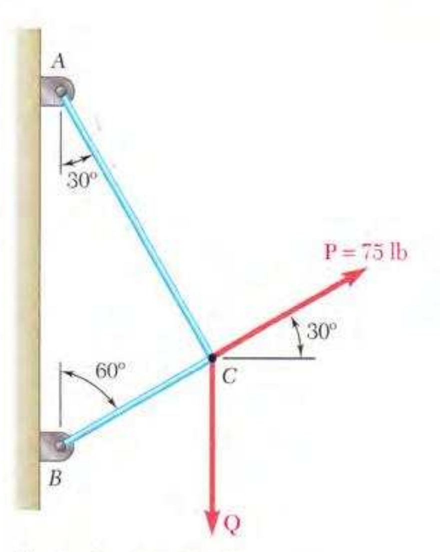


Figura P2.53 y *P2.54*

2.55 Un pescador es rescatado con una silla de contramaestre que se encuentra suspendida de una polea que puede rodar libremente sobre el cable de apoyo ACB y es jalada a una velocidad constante mediante el cable CD. Si se sabe que $\alpha = 30°$ y $\beta = 10°$, y que el peso combinado de la silla y el pescador es de 900 N, determine la tensión *a*) en el cable de soporte ACB, *b*) en el cable de arrastre CD.

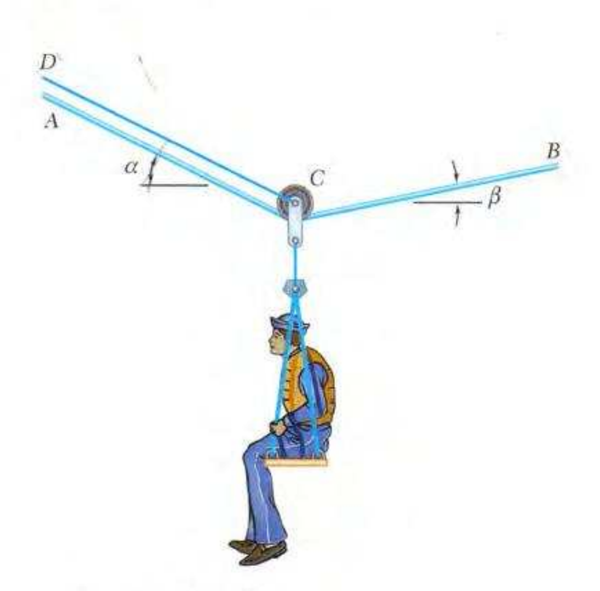


Figura P2.55 y P2.56

2.56 Un pescador es rescatado con una silla de contramaestre que se encuentra suspendida de una polea que puede rodar libremente sobre el cable de apoyo ACB y es jalada a una velocidad constante mediante el cable CD. Si se sabe que $\alpha = 25°$ y $\beta = 15°$, y que la tensión en el cable CD es de 80 N, determine *a*) el peso combinado de la silla y el pescador, *b*) la tensión en el cable de soporte ACB.

2.57 Para los cables del problema 2.45, se sabe que la tensión permisible máxima es de 600 N en el cable AC y 750 N en el cable BC. Determine *a*) la máxima fuerza **P** que puede aplicarse en C, *b*) el valor correspondiente de α.

2.58 Para la situación descrita en la figura P2.47, determine *a*) el valor de α para el cual la tensión en el cable BC es la mínima posible y *b*) el valor correspondiente de la tensión.

2.59 Para la estructura y la carga del problema 2.48, determine *a*) el valor de α para el que la tensión en el cable BC es mínima, *b*) el valor correspondiente de la tensión.

2.60 Si se sabe que las porciones AC y BC del cable ACB deben ser iguales, determine la longitud mínima que debe tener el cable para soportar la carga mostrada, si la tensión en éste no debe ser mayor que 870 N.

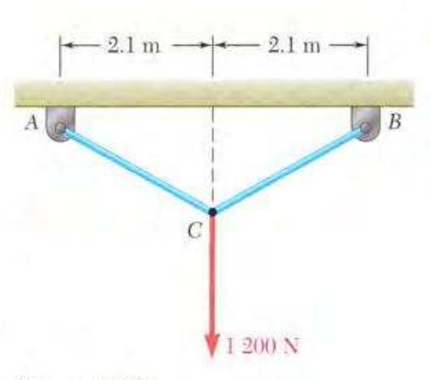


Figura P2.60

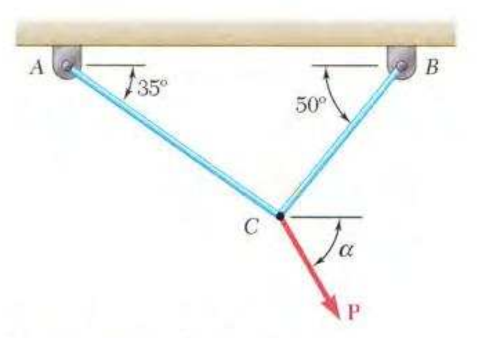


Figura P2.61 y P2.62

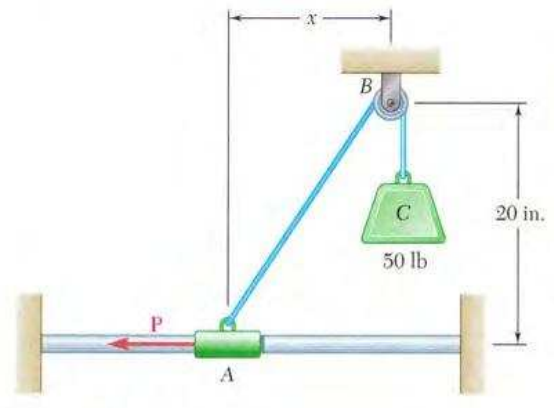


Figura P2.63 y P2.64

2.61 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 800 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en C, *b*) el valor correspondiente de α.

2.62 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en el cable AC es de 1 200 N y que en el cable BC es de 600 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** máxima que puede aplicarse en C, *b*) el valor correspondiente de α.

2.63 El collarín A puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal y está conectado a una carga de 50 lb, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener al collarín en equilibrio cuando *a*) $x = 4.5$ in., *b*) $x = 15$ in.

2.64 El collarín A puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal y está conectado a una carga de 50 lb, como se muestra en la figura. Determine la distancia x para la cual el collarín se conserva en equilibrio cuando $P = 48$ lb.

2.65 Una carga de 160 kg está sostenida por el arreglo de cuerdas y poleas que se muestra en la figura. Si se sabe que $\beta = 20°$, determine la magnitud y la dirección de la fuerza **P** que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda para mantener al sistema en equilibrio. (*Sugerencia*: La tensión es la misma en ambos lados de una cuerda que pasa por una polea simple. Esto puede comprobarse mediante los métodos del capítulo 4.)

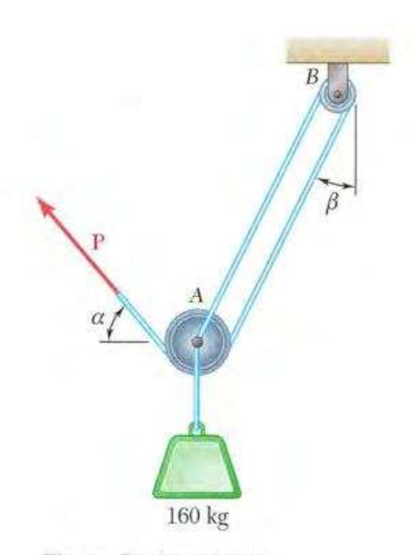


Figura P2.65 y *P2.66*

2.66 Una carga de 160 kg está sostenida por el arreglo de cuerdas y poleas que se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 40°$, determine *a*) el ángulo β y *b*) la magnitud de la fuerza **P** que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda para mantener al sistema en equilibrio. (Vea la sugerencia del problema 2.65.)

2.67 Una caja de madera de 600 lb está sostenida por varios arreglos de poleas y cuerdas, como se muestra en la figura. Determine la tensión en la cuerda para cada arreglo. (Vea la sugerencia del problema 2.65.)

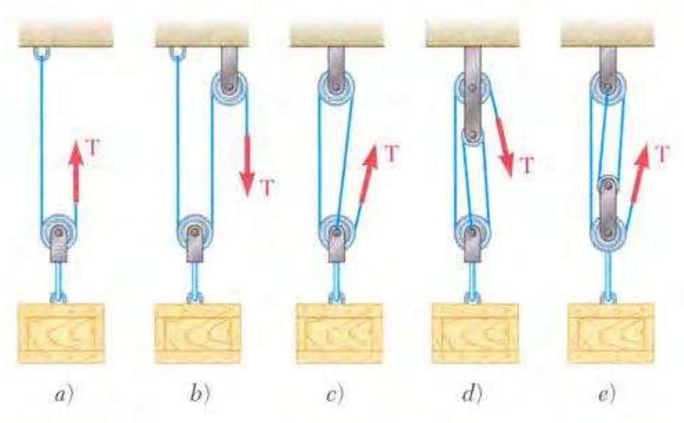


Figura P2.67

2.68 Retome los incisos *b*) y *d*) del problema 2.67, y ahora suponga que el extremo libre de la cuerda está unido a la caja de madera.

2.69 La carga **Q** se aplica a la polea *C*, la cual puede rodar sobre el cable *ACB*. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable *CAD*, el cual pasa a través de la polea *A* y sostiene una carga **P**. Si se sabe que $P = 750$ N, determine *a*) la tensión en el cable *ACB*, *b*) la magnitud de la carga **Q**.

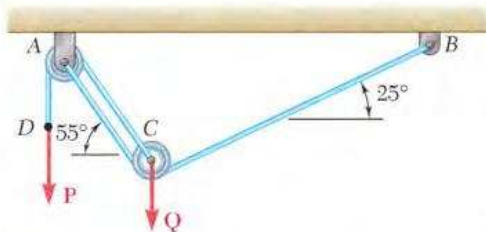


Figura P2.69 y *P2.70*

2.70 Una carga **Q** de 1 800 N se aplica a la polea *C*, la cual puede rodar sobre el cable *ACB*. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable *CAD*, el cual pasa a través de la polea *A* y sostiene una carga **P**. Determine *a*) la tensión en el cable *ACB*, *b*) la magnitud de la carga **P**.

FUERZAS EN EL ESPACIO

2.12. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO

Los problemas considerados en la primera parte de este capítulo involucraron únicamente dos dimensiones y pudieron formularse y resolverse en un solo plano. En esta sección y en las secciones siguientes del capítulo se analizarán problemas que comprenden las tres dimensiones del espacio.

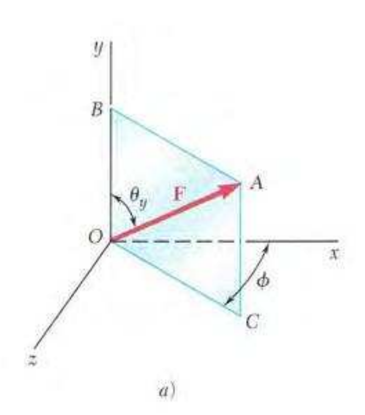
Considere una fuerza **F** que actúa en el origen *O* del sistema de coordenadas rectangulares x, y, z. Para definir la dirección de **F**, se traza el plano vertical *OBAC* que contiene a **F** y que se muestra en la figura 2.30*a*. Este plano pasa a través del eje vertical y; su orientación está definida por el ángulo ϕ que forma con el plano xy, mientras que

la dirección de **F** dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que forma **F** con el eje y. La fuerza **F** puede descomponerse en una componente vertical $\mathbf{F}_y$ y una componente horizontal $\mathbf{F}_h$; esta operación, mostrada en la figura 2.30*b*, se realiza en el plano *OBAC* de acuerdo con las reglas desarrolladas en la primera parte del capítulo. Las componentes escalares correspondientes son

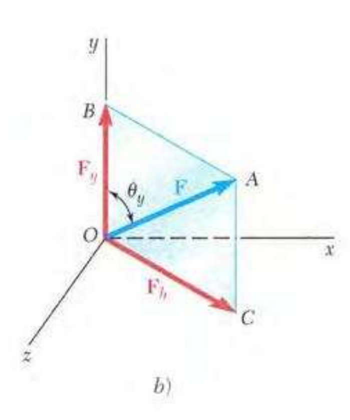
$$F_y = F \cos \theta_y \qquad F_h = F \operatorname{sen} \theta_y \tag{2.16}$$

La $\mathbf{F}_h$ puede descomponerse en sus dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ a lo largo de los ejes x y z, respectivamente. Esta operación, mostrada en la figura 2.30*c*, se realiza en el plano xz. De esta manera se obtienen las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

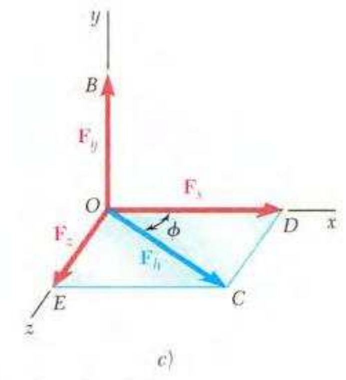
$$\begin{aligned} F_x &= F_h \cos \phi = F \operatorname{sen} \theta_y \cos \phi \\ F_z &= F_h \operatorname{sen} \phi = F \operatorname{sen} \theta_y \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \tag{2.17}$$



a)



b)



c)

Figura 2.30

La fuerza **F** se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos *OAB* y *OCD* de la figura 2.30, se escribe

$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

Si se eliminan F_h^2 de estas dos ecuaciones y se resuelve para F se obtiene la siguiente relación entre la magnitud de **F** y sus componentes rectangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2.18}$$

La relación que existe entre la fuerza **F** y sus tres componentes $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ se presenta más fácil si se traza "una caja" que tiene por aristas $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$, como se muestra en la figura 2.31. La fuerza **F** está representada por la diagonal *OA* de esta caja. La figura 2.31*b* muestra el triángulo rectángulo *OAB* empleado para deducir la primera de las fórmulas (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. En las figuras 2.31*a* y *c* se han trazado otros dos triángulos rectángulos: el *OAD* y *OAE*. Éstos ocupan posiciones semejantes a la del triángulo *OAB*. Si representamos por θ_x y θ_z los ángulos que forma **F** con los ejes x y z, respectivamente, se pueden escribir dos fórmulas semejantes a $F_y = F \cos \theta_y$. Entonces se escribe

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z \tag{2.19}$$

Los tres ángulos θ_x, θ_y y θ_z definen la dirección de la fuerza **F**; y son más usados que los ángulos θ_y y ϕ introducidos al comienzo de esta sección. Los cosenos de θ_x, θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* de la fuerza **F**.

Con el uso de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, dirigidos a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente (figura 2.32), se puede expresar **F** en la forma

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

donde las componentes escalares F_x, F_y y F_z están definidas por las relaciones (2.19).

Ejemplo 1. Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60°, 45° y 120° con los ejes x, y y z, respectivamente. Encuentre las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza.

Sustituyendo $F = 500$ N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$ y $\theta_z = 120°$ en las fórmulas (2.19), se escribe

$$F_x = (500\text{ N})\cos 60° = +250\text{ N}$$
$$F_y = (500\text{ N})\cos 45° = +354\text{ N}$$
$$F_z = (500\text{ N})\cos 120° = -250\text{ N}$$

Usando en la ecuación (2.20) los valores obtenidos para las componentes escalares de **F**, se tiene

$$\mathbf{F} = (250\text{ N})\mathbf{i} + (354\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{k}$$

Como en el caso de los problemas en dos dimensiones, el signo positivo indica que la componente tiene el mismo sentido que el eje correspondiente y el signo negativo tiene el sentido opuesto. ■

El ángulo que una fuerza **F** forma con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje y estará siempre comprendido entre 0 y 180°. Un ángulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que **F** (que se supone unida al origen O) está del mismo lado del plano yz que el eje x positivo, y $\cos\theta_x$ y F_x serán positivos. Un ángulo θ_x mayor que 90° (obtuso) indicará que **F** está al otro lado del plano yz; entonces, $\cos\theta_x$ y F_x serán negativos. En el ejemplo 1 los ángulos θ_x y θ_y son agudos, mientras que θ_z es obtuso; en consecuencia, F_x y F_y son positivos, mientras que F_z es negativo.

Si se sustituye en la ecuación (2.20) las expresiones obtenidas para F_x, F_y y F_z en (2.19), se escribe

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}) \tag{2.21}$$

que muestra que la fuerza **F** puede expresarse como el producto del escalar F y del vector

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k} \tag{2.22}$$

El vector $\boldsymbol{\lambda}$ es evidentemente un vector de magnitud 1 y de la misma dirección que **F** (figura 2.33). El *vector unitario* $\boldsymbol{\lambda}$ se refiere al largo de la línea de acción de **F**. De (2.22) se deduce que las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ son, respectivamente, iguales a los cosenos directores de la línea de acción de **F**:

$$\lambda_x = \cos\theta_x \qquad \lambda_y = \cos\theta_y \qquad \lambda_z = \cos\theta_z \tag{2.23}$$

Se debe observar que los valores de los tres ángulos θ_x, θ_y y θ_z no son independientes. Expresando que la suma de los cuadrados de las componentes de λ es igual al cuadrado de su magnitud, se escribe

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

o sustituyendo para λ_x, λ_y y λ_z de (2.23),

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1 \tag{2.24}$$

En el ejemplo 1 se muestra que una vez que se han seleccionado los valores $\theta_x = 60°$ y $\theta_y = 45°$ el valor de θ_z *debe* ser igual a 60 o 120° para satisfacer la identidad (2.24).

Cuando las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza **F** están dadas, la magnitud F de la fuerza se obtiene de (2.18).[†] Entonces las relaciones (2.19) pueden resolverse para los cosenos directores,

[†] Con una calculadora programada para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares, se verá que el siguiente procedimiento resulta más expedito para calcular F: primero se determina F_h a partir de sus dos componentes rectangulares F_x y F_z (figura 2.30*c*), después se determina F a partir de sus dos componentes rectangulares F_h y F_y (figura 2.30*b*). El orden en el que se introducen F_x, F_y y F_z resulta intrascendente.

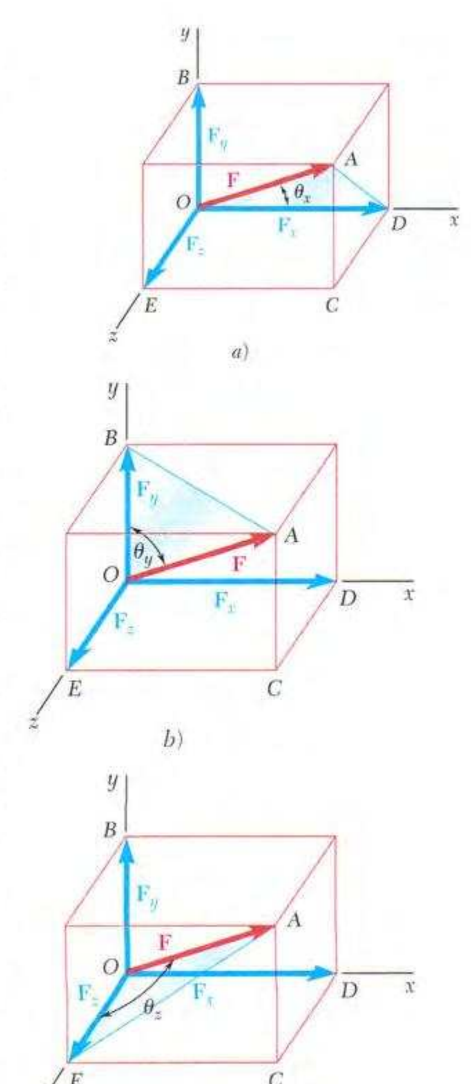


Figura 2.31

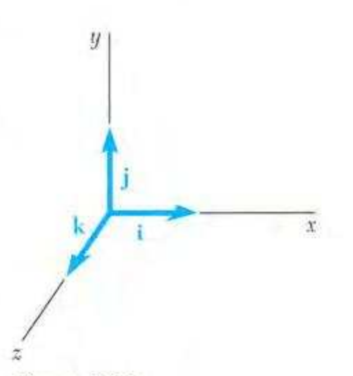


Figura 2.32

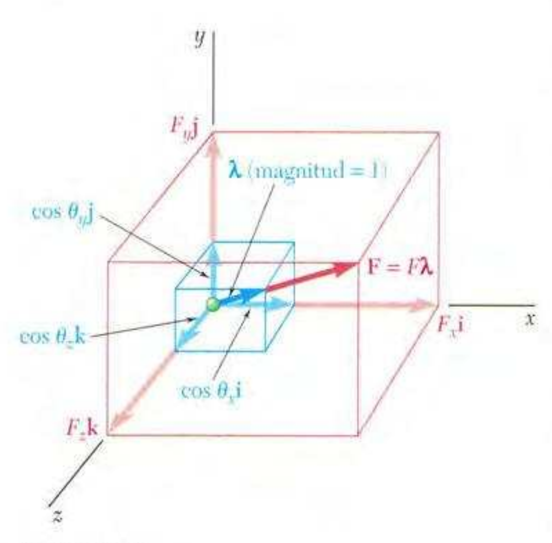


Figura 2.33

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} \tag{2.25}$$

y obtener los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que caracterizan a la dirección de $\mathbf{F}$.

Ejemplo 2. Una fuerza $\mathbf{F}$ tiene las componentes $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = 60$ lb. Determine la magnitud de F y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma con los ejes coordenados.

A partir de la fórmula (2.18) se obtiene†

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20\text{ lb})^2 + (-30\text{ lb})^2 + (60\text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4\,900}\text{ lb} = 70\text{ lb} \end{aligned}$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de $\mathbf{F}$ en las ecuaciones (2.25), se escribe

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20\text{ lb}}{70\text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30\text{ lb}}{70\text{ lb}} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60\text{ lb}}{70\text{ lb}}$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 73.4° \qquad \theta_y = 115.4° \qquad \theta_z = 31.0°$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora. ■

2.13. FUERZA DEFINIDA EN TÉRMINOS DE SU MAGNITUD Y DOS PUNTOS SOBRE SU LÍNEA DE ACCIÓN

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza $\mathbf{F}$ está definida por las coordenadas de dos puntos $M(x_1, y_1, z_1)$ y $N(x_2, y_2, z_2)$, localizadas sobre su línea de acción (figura 2.34). Considere el vector $\overrightarrow{MN}$ que une a M y N y tiene el mismo sentido que $\mathbf{F}$. Si se representan sus componentes escalares por d_x, d_y y d_z, respectivamente, se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \tag{2.26}$$

El vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$ (es decir a lo largo de la línea MN) puede obtenerse al dividir el vector $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud MN. Se sustituye para $\overrightarrow{MN}$ de (2.26) y se observa que MN es igual a la distancia d de M a N, se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.27}$$

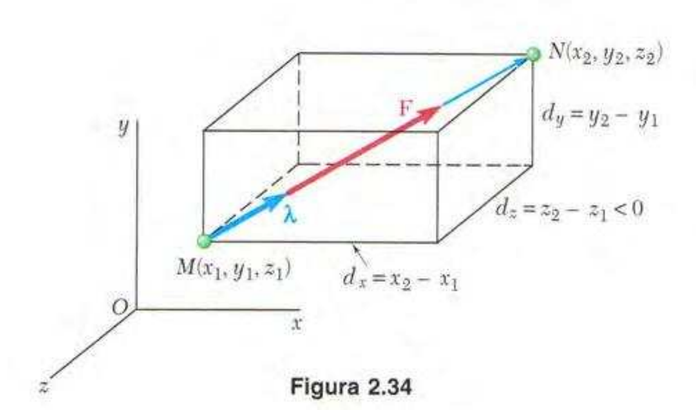


Figura 2.34

Es importante recordar que **F** es igual al producto de F y $\boldsymbol{\lambda}$, por lo que se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \tag{2.28}$$

de la cual se sigue que las componentes de **F** son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \tag{2.29}$$

Las relaciones (2.29) simplifican en forma considerable la determinación de las componentes de las fuerzas **F** de magnitud F cuando la línea de acción de **F** está definida por dos puntos M y N. Restando las coordenadas de M de las de N se determinan primero las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ y la distancia d de M a N:

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$
$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Sustituyendo los valores para F y para d_x, d_y, d_z y d en las relaciones (2.29), se obtienen las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza.

Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forman **F** con los ejes coordenados pueden obtenerse de las ecuaciones (2.25). Comparando las ecuaciones (2.22) y (2.27) también se puede escribir

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d} \tag{2.30}$$

y determinar los ángulos θ_x, θ_y y θ_z directamente de las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{MN}$.

2.14. ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

La resultante **R** de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.8 con fuerzas coplanares. Se establece que

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$

se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})$$
$$= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$

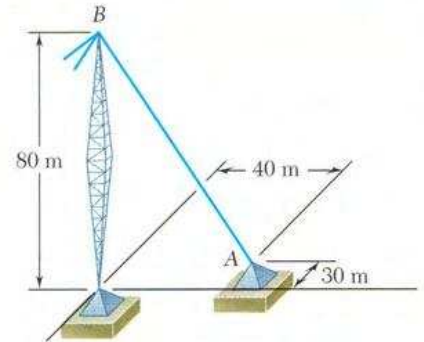
de la cual se desprende que

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \tag{2.31}$$

La magnitud de la resultante y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que ésta forma con el eje de coordenadas se obtienen por el método de la sección 2.12. Se escribe

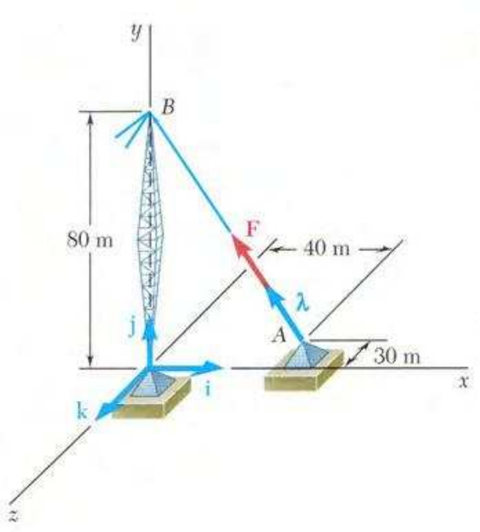
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{2.32}$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \qquad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R} \tag{2.33}$$



PROBLEMA RESUELTO 2.7

El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine *a*) las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza.



SOLUCIÓN

***a*) Componentes de la fuerza.** La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por A y B y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$, que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

Si se sustituye la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

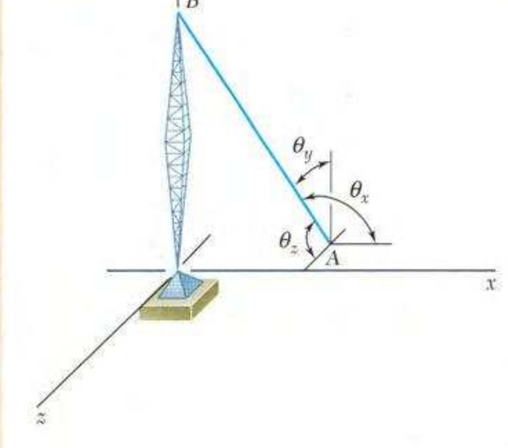
$$\mathbf{F} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}[-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1\,060 \text{ N})\mathbf{i} + (2\,120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de $\mathbf{F}$ son



$$F_x = -1\,060 \text{ N} \qquad F_y = +2\,120 \text{ N} \qquad F_z = +795 \text{ N} \quad ◀$$



***b*) Dirección de la fuerza.** Con las ecuaciones (2.25), se escribe

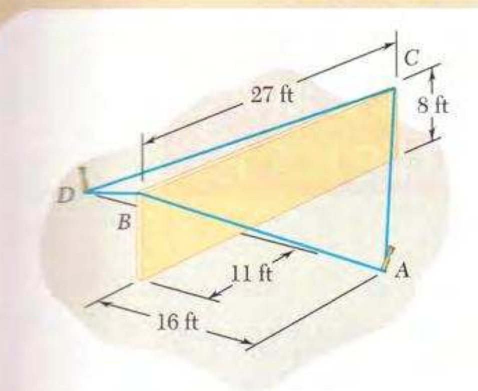
$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1° \qquad \theta_y = 32.0° \qquad \theta_z = 71.5° \quad ◀$$

(*Nota*: El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector $\overrightarrow{AB}$ en lugar de la fuerza $\mathbf{F}$.)



PROBLEMA RESUELTO 2.8

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1 200 lb en el cable AC, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca A.

SOLUCIÓN

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A se descompondrá en sus componentes x, y y z. Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, midiéndolos desde A hacia la sección de la pared. Si se representa por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad AB = 21 \text{ ft}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad AC = 24 \text{ ft}$$

Al representar por $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ al vector unitario a lo largo de la línea AB, se tiene

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

Al sustituir la expresión encontrada para $\overrightarrow{AB}$, se obtiene

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}[-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}$$

Si se representa con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ al vector unitario a lo largo de AC, se obtiene en forma semejante

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\,200 \text{ lb}}{24 \text{ ft}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(800 \text{ lb})\mathbf{i} + (400 \text{ lb})\mathbf{j} - (800 \text{ lb})\mathbf{k}$$

Resultante de las fuerzas. La resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\,440 \text{ lb})\mathbf{i} + (720 \text{ lb})\mathbf{j} - (360 \text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\,440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1\,650 \text{ lb} \quad ◀$$

De las ecuaciones (2.33) se obtiene

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\,440 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8° \qquad \theta_y = 64.1° \qquad \theta_z = 102.6° \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se vio que las *fuerzas en el espacio* pueden ser definidas por su magnitud y su dirección o por las tres componentes rectangulares F_x, F_y y F_z.

A. *Cuando una fuerza se define por su magnitud y su dirección,* sus componentes rectangulares F_x, F_y y F_z se pueden determinar de la siguiente manera:

Caso 1. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por los ángulos θ_y y ϕ mostrados en la figura 2.30, las proyecciones de **F** a través de estos ángulos o sus complementos proporcionarán las componentes de **F** [ecuaciones (2.17)]. Obsérvese que las componentes x y z de **F** se obtienen proyectando primero a **F** sobre el plano horizontal; entonces, la proyección $\mathbf{F}_h$ obtenida de esta forma se descompone en las componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ (figura 2.30*c*).

Caso 2. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que **F** forma con los ejes coordenados, cada componente se puede obtener multiplicando la magnitud F de la fuerza por el coseno del ángulo que le corresponde [ejemplo 1]:

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z$$

Caso 3. Si la dirección de la fuerza **F** está definida por dos puntos M y N ubicados a lo largo de su línea de acción (figura 2.34), primero se expresa al vector $\overrightarrow{MN}$ dibujado desde M hasta N, en términos de sus componentes d_x, d_y y d_z y de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**:

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de **F** dividiendo al vector $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud MN. Si se multiplica a $\boldsymbol{\lambda}$ por la magnitud de **F**, se obtiene la expresión deseada para **F** en términos de sus componentes rectangulares [problema resuelto 2.7]:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

Cuando se determinan las componentes rectangulares de una fuerza, es conveniente emplear un sistema de notación consistente y con significado. El método utilizado en este texto se ilustra en el problema resuelto 2.8 donde, por ejemplo, la fuerza $\mathbf{T}_{AB}$ actúa desde la estaca A hacia el punto B. Obsérvese que los subíndices han sido ordenados para coincidir con la dirección de la fuerza. Se recomienda adoptar la misma notación ya que le ayudará a identificar al punto 1 (el primer subíndice) y al punto 2 (el segundo subíndice).

Cuando el vector que define la línea de acción de una fuerza se forma, puede pensarse en sus componentes escalares como el número de pasos que debe efectuar, en cada dirección coordenada, para ir desde el punto 1 hasta el punto 2. Es esen-

cial que siempre se recuerde asignarle el signo correcto a cada una de las componentes.

B. Cuando una fuerza está definida por sus componentes rectangulares F_x, F_y y F_z, y se puede obtener su magnitud F así

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Los cosenos directores de la línea de acción de **F** se pueden determinar dividiendo las componentes de la fuerza entre F:

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

A partir de los cosenos directores se pueden obtener los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que **F** forma con los ejes coordenados [ejemplo 2].

C. Para determinar la resultante R de dos o más fuerzas en el espacio tridimensional, primero se determinan las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas utilizando alguno de los procedimientos que se acaban de describir. Con la suma de esas componentes se obtendrán las componentes R_x, R_y y R_z de la resultante. Entonces, la magnitud y la dirección de la resultante se puede obtener como se señaló en los incisos anteriores para el caso de una fuerza **F** [problema resuelto 2.8].

Problemas

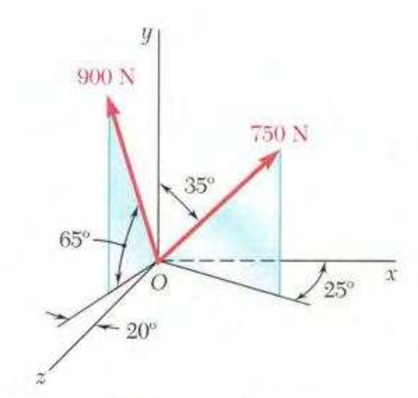


Figura P2.71 y P2.72

2.71 Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza de 750 N y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.72 Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza de 900 N y *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.73 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en *D*. Si se sabe que la componente *x* de la fuerza ejercida por el alambre *AD* sobre la placa es de 110.3 N, determine *a*) la tensión en el alambre *AD*, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en *A* con los ejes coordenados.

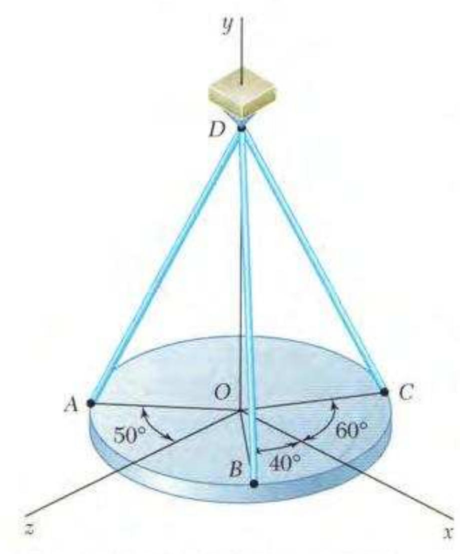


Figura P2.73, P2.74, *P2.75* y P2.76

2.74 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en *D*. Si se sabe que la componente *z* de la fuerza ejercida por el alambre *BD* sobre la placa es de −32.14 N, determine *a*) la tensión en el alambre *BD*, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en *B* con los ejes coordenados.

2.75 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en *D*. Si se sabe que la tensión en el alambre *CD* es de 60 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre la placa, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.76 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en *D*. Si se sabe que la componente *x* de la fuerza ejercida por el alambre *CD* sobre la placa es de –20 lb, determine *a*) la tensión en el alambre *CD*, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en *C* con los ejes coordenados.

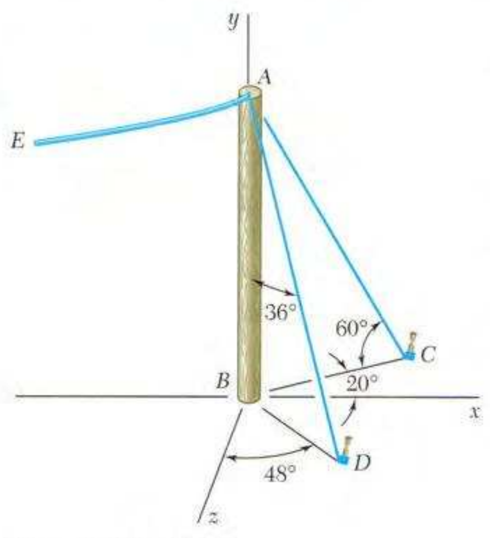


Figura P2.77 y *P2.78*

2.77 El extremo del cable coaxial *AE* se une al poste *AB*, el cual está sostenido por los tirantes de alambre *AC* y *AD*. Si se sabe que la tensión en el alambre *AC* es de 120 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.78 El extremo del cable coaxial *AE* se une al poste *AB*, el cual está sostenido por los tirantes de alambre *AC* y *AD*. Si se sabe que la tensión en el alambre *AD* es de 85 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.79 Determine la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (320\text{ N})\mathbf{i} + (400\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{k}$.

2.80 Determine la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (240\text{ N})\mathbf{i} - (270\text{ N})\mathbf{j} + (680\text{ N})\mathbf{k}$.

2.81 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 70.9°$ y $\theta_y = 144.9°$. Si se sabe que la componente z de la fuerza es de –52 lb, determine *a*) el ángulo θ_z, *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.82 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_y = 55°$ y $\theta_z = 45°$. Si se sabe que la componente x de la fuerza es de –500 lb, determine *a*) el ángulo θ_x, *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.83 Una fuerza **F** de magnitud 210 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que $F_x = 80$ N, $\theta_z = 151.2°$ y $F_y < 0$, determine *a*) las componentes F_y y F_z, *b*) los ángulos θ_x y θ_y.

2.84 Una fuerza **F** de magnitud 230 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que $\theta_x = 32.5°$, $F_y = -60$ N y $F_z > 0$, determine *a*) las componentes F_x y F_z, *b*) los ángulos θ_y y θ_z.

2.85 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres, los cuales están anclados por medio de pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AB* es de 525 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno en *B*.

2.86 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres, los cuales están anclados por medio de pernos en *B*, *C* y *D*. Si la tensión en el alambre *AD* es de 315 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno en *D*.

2.87 Un marco *ABC* está sostenido en parte por el cable *DBE*, el cual pasa a través de un anillo sin fricción en *B*. Si se sabe que la tensión en el cable es de 385 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en *D*.

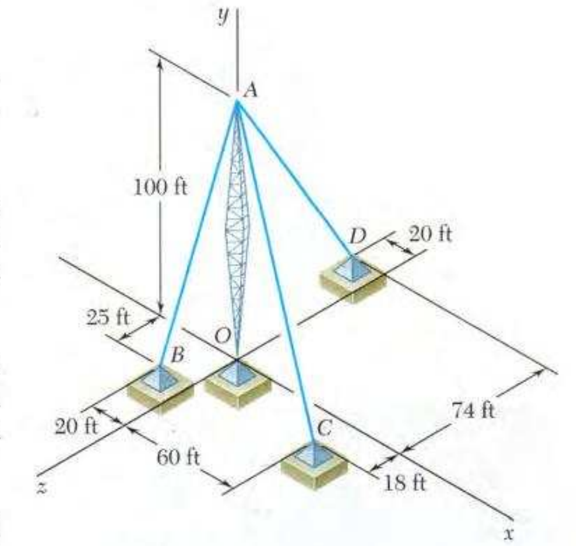


Figura P2.85 y P2.86

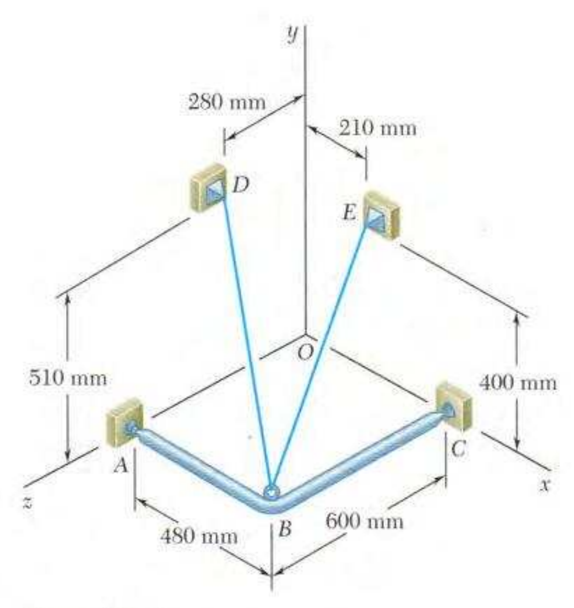


Figura P2.87

2.88 Para el marco y el cable del problema 2.87, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en E.

2.89 Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 1 425 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en B.

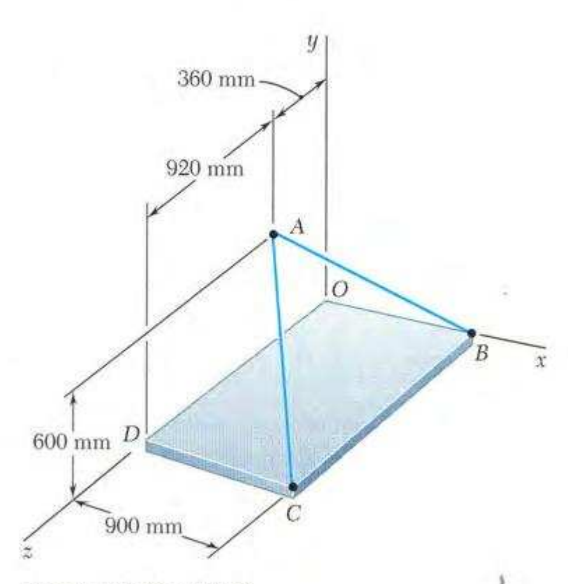


Figura P2.89 y *P2.90*

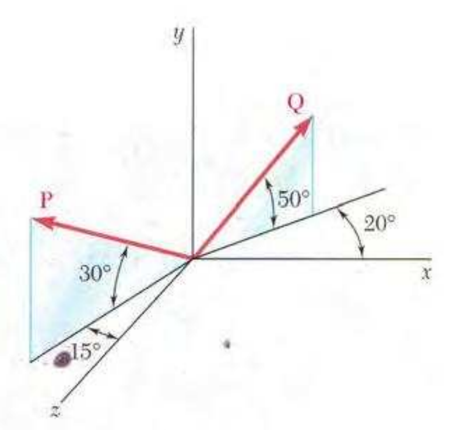


Figura P2.91 y P2.92

2.90 Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 2 130 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en C.

2.91 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 300$ N y $Q = 400$ N.

2.92 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 400$ N y $Q = 300$ N.

2.93 Si se sabe que las tensiones en los cables AB y AC son de 425 lb y de 510 lb respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.94 Si se sabe que las tensiones en los cables AB y AC son de 510 lb y de 425 lb respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.95 Para el marco del problema 2.87, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por el cable en B si la tensión en el cable es de 385 N.

2.96 Si se sabe que, para los cables del problema 2.89, la tensión en el cable AB es de 1 425 N y la tensión en el cable AC es de 2 130 N, determine la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

Figura *P2.93* y P2.94

2.97 El extremo del cable coaxial *AE* se une al poste *AB*, el cual está sostenido por los tirantes de alambre *AC* y *AD*. Si se sabe que la tensión en el alambre *AC* es de 150 lb y que la resultante de las fuerzas ejercidas en *A* por los alambres *AC* y *AD* debe estar contenida en el plano *xy*, determine *a*) la tensión en *AD*, *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.98 El extremo del cable coaxial *AE* se une al poste *AB*, el cual está sostenido por los tirantes de alambre *AC* y *AD*. Si se sabe que la tensión en el alambre *AD* es de 125 lb y que la resultante de las fuerzas ejercidas en *A* por los alambres *AC* y *AD* debe estar contenida en el plano *xy*, determine *a*) la tensión en *AC*, *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

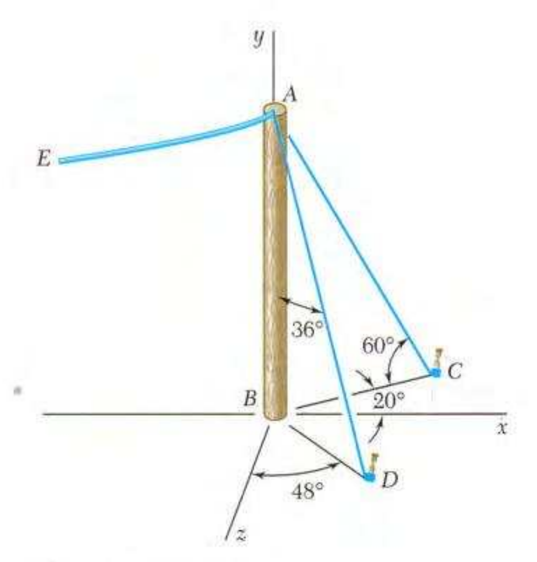


Figura P2.97 y *P2.98*

2.15. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO

De acuerdo con la definición dada en la sección 2.9, una partícula *A* está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre *A* es cero. Las componentes R_x, R_y y R_z de la resultante están dadas por las relaciones (2.31); al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escribe

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{2.34}$$

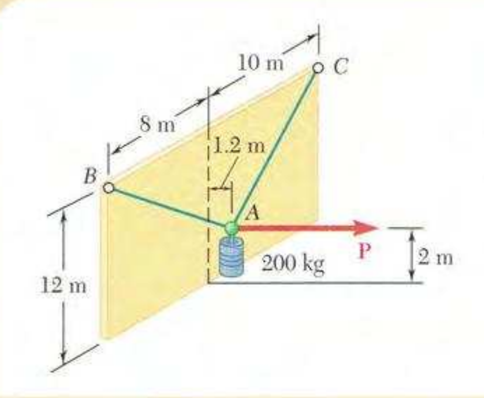
Las ecuaciones (2.34) representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula y en los que intervienen no más de tres incógnitas.

Para resolver tales problemas, se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio (2.34) y despejar las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, esas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.



Fotografía 2.2 Como la tensión presente en los *cuatro* cables que sostienen al automóvil de carga no se puede encontrar mediante las *tres* ecuaciones (2.34), es posible obtener una relación entre las tensiones considerando el equilibrio del gancho.

PROBLEMA RESUELTO 2.9



Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables AB y AC que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal **P** perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de **P** y la tensión en cada cable.

SOLUCIÓN

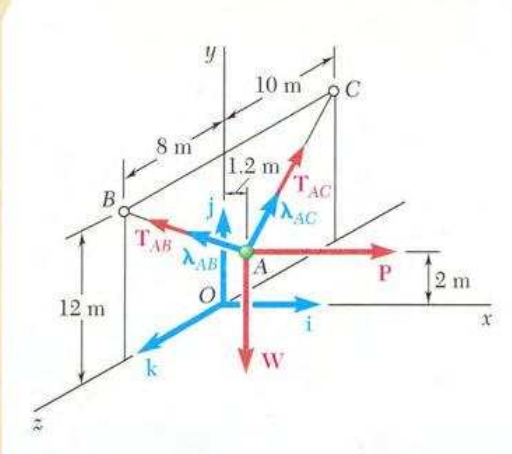


Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre, este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1\,962 \text{ N})\mathbf{j} \qquad (1)$$

En el caso de $\mathbf{T}_{AB}$ y $\mathbf{T}_{AC}$, es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Representando con $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ el vector unitario a lo largo de AB, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 12.862 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862 \text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \qquad (2)$$

Al representar con $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ el vector unitario a lo largo de AC, se escribe en forma semejante

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 14.193 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193 \text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \qquad (3)$$

Condición de equilibrio. Puesto que A está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando **i**, **j** y **k**,

$$(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N})\mathbf{j} + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

Al hacer los coeficientes de **i**, **j** y **k** iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes x, y y z de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \qquad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$
$$\Sigma F_y = 0: \qquad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N} = 0$$
$$\Sigma F_z = 0: \qquad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235 \text{ N} \qquad T_{AB} = 1\,402 \text{ N} \qquad T_{AC} = 1\,238 \text{ N} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Anteriormente se vio que cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la misma debe ser igual a cero. En el caso del equilibrio de una *partícula en el espacio tridimensional*, expresar este hecho proporcionará tres relaciones entre las fuerzas que actúan sobre la partícula. Estas relaciones se pueden utilizar para determinar tres incógnitas, que usualmente son las magnitudes de tres fuerzas.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la partícula.*** Este diagrama muestra la partícula y a todas las fuerzas que actúan sobre la misma. En el diagrama se deben indicar tanto las magnitudes de las fuerzas conocidas, como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido debe ser denotado por un símbolo apropiado. En el diagrama de cuerpo libre no se debe incluir información adicional.

2. ***Descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares.*** Con el método utilizado en la sección anterior, para cada fuerza **F** se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, que define la dirección de dicha fuerza y **F** se expresa como el producto de su magnitud F y el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$. Así se obtiene una expresión con la siguiente forma

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

donde d, d_x, d_y y d_z son dimensiones obtenidas a partir del diagrama de cuerpo libre de la partícula. También mostramos la dirección de **F**, que puede definirse en términos de los ángulos θ_y y ϕ. Si se conoce tanto la magnitud como la dirección de una fuerza, entonces F es conocida y la expresión obtenida para **F** está totalmente definida; de otra forma, F es una de las tres incógnitas a determinar.

3. ***Hacer igual a cero a la resultante o suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula.*** Se obtendrá una ecuación vectorial que consta de términos que contienen los vectores unitarios **i**, **j** o **k**. Los términos que contienen el mismo vector unitario se agruparán y dicho vector se factorizará. Para que la ecuación vectorial sea correcta, se deben igualar a cero los coeficientes de cada uno de los vectores unitarios. Lo anterior generará tres ecuaciones escalares que pueden resolverse para no más de tres incógnitas [Problema resuelto 2.9].

Problemas

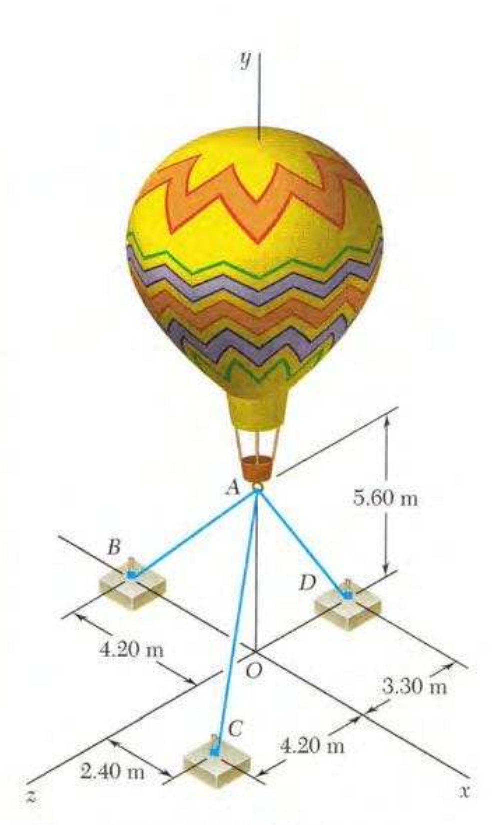


Figura P2.99, *P2.100*, P2.101 y *P2.102*

2.99 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical **P** que ejerce el globo en *A*, si se sabe que la tensión en el cable *AB* es de 259 N.

2.100 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical **P** que ejerce el globo en *A*, si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 444 N.

2.101 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical **P** que ejerce el globo en *A*, si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 481 N.

2.102 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si se sabe que el globo ejerce una fuerza vertical de 800 N en *A*, determine la tensión en cada cable.

2.103 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable *AB* es de 750 lb.

2.104 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 616 lb.

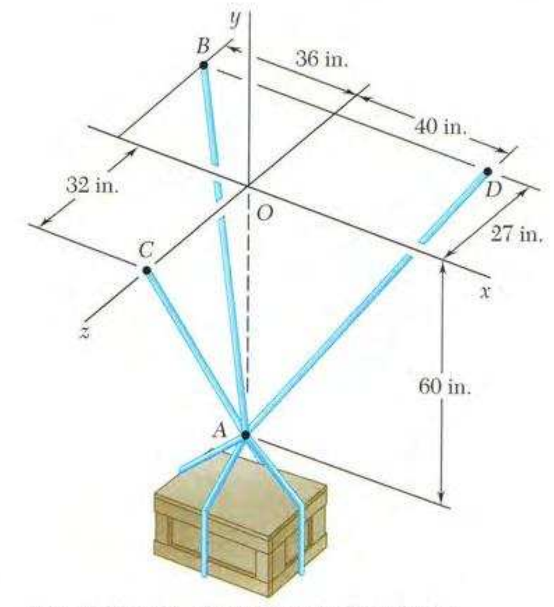


Figura P2.103, P2.104, P2.105 y *P2.106*

2.105 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable *AC* es de 544 lb.

2.106 Tres cables sostienen una caja de 1 600 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable.

2.107 Tres cables están conectados en A, donde se aplican las fuerzas **P** y **Q**, como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 0$, encuentre el valor de P para el cual la tensión en el cable AD es de 305 N.

2.108 Tres cables están conectados en A, donde se aplican las fuerzas **P** y **Q**, como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 1\ 200$ N, encuentre los valores de Q para los cuales el cable AD está tenso.

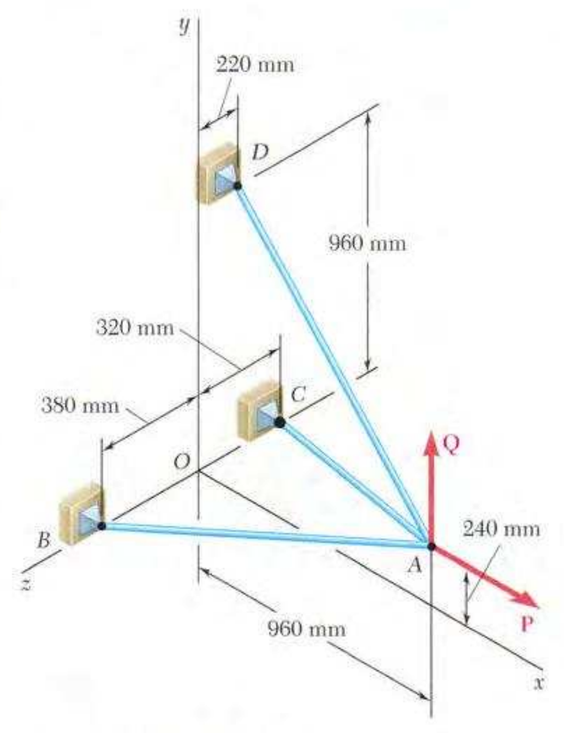


Figura P2.107 y P2.108

2.109 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una articulación en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AB es de 630 lb, determine la fuerza vertical **P** ejercida por la torre sobre la articulación en A.

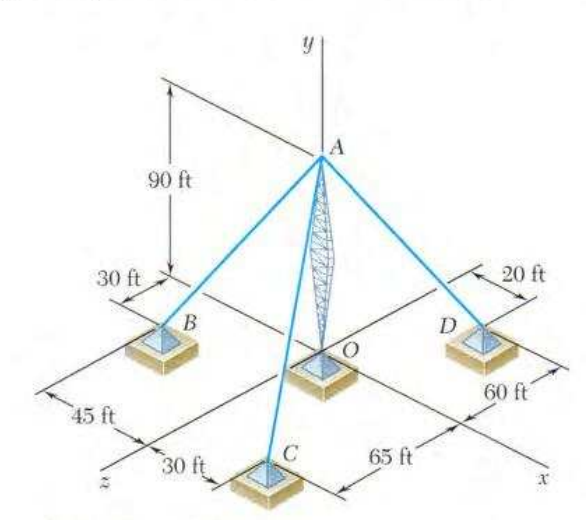


Figura P2.109 y *P2.110*

2.110 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una articulación en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AC es de 920 lb, determine la fuerza vertical **P** ejercida por la torre sobre la articulación en A.

2.111 Una placa rectangular está sostenida por tres cables como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 60 N, determine el peso de la placa.

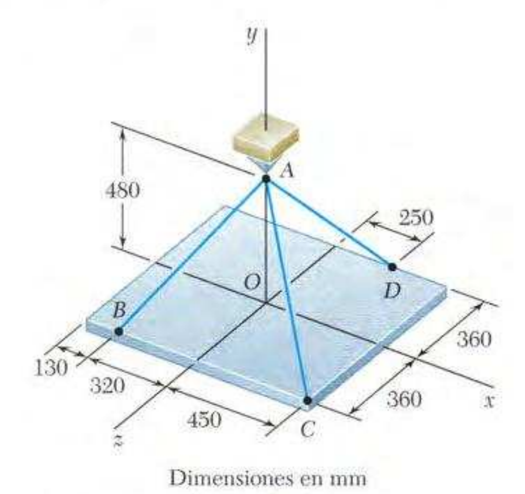


Figura P2.111 y P2.112

2.112 Tres cables sostienen una placa rectangular, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 520 N, determine el peso de la placa.

2.113 Para la torre de transmisión de los problemas 2.109 y 2.110, determine la tensión en cada alambre si se sabe que la torre ejerce una fuerza vertical ascendente de 2 100 lb sobre la articulación en A.

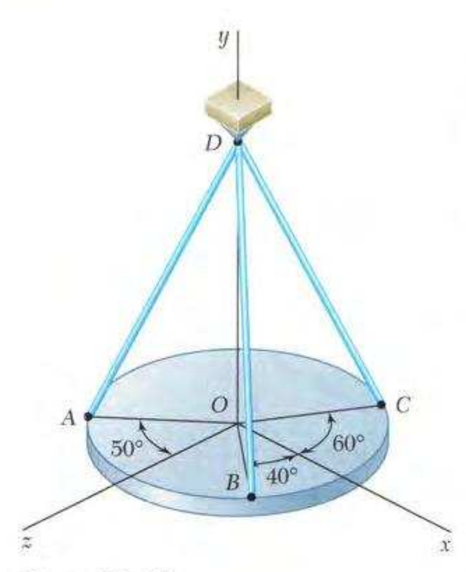


Figura P2.114

2.114 Una placa circular horizontal que pesa 60 lb está suspendida de tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Determine la tensión en cada alambre.

2.115 Para la placa rectangular de los problemas 2.111 y 2.112, determine la tensión en cada uno de los tres cables si se sabe que el peso de la placa es de 792 N.

2.116 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que P = 2 880 N y Q = 0.

2.117 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que P = 2 880 N y Q = 576 N.

2.118 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que P = 2 880 N y Q = −576 N (**Q** tiene una dirección descendente).

2.119 Dos trabajadores descargan de un camión un contrapeso de 200 lb de hierro fundido usando dos cuerdas y una rampa con rodillos. Si se sabe que en el instante mostrado el contrapeso está inmóvil, determine la tensión en cada cuerda si las coordenadas de posición de los puntos son A(0, −20 in., 40 in.), B(−40 in., 50 in., 0) y C(45 in., 40 in., 0), respectivamente. Suponga que no hay fricción entre la rampa y el contrapeso. (*Sugerencia:* Puesto que no hay fricción, la fuerza ejercida por la rampa sobre el contrapeso debe ser perpendicular a éste.)

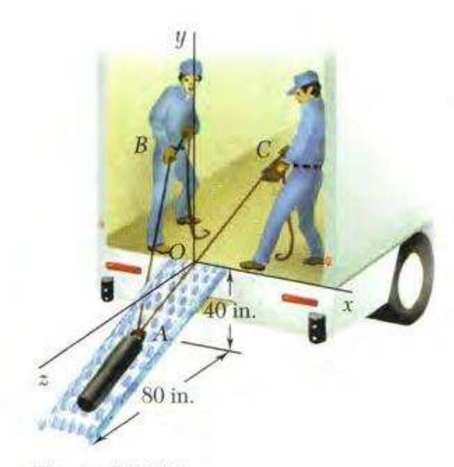


Figura P2.119

2.120 Retome el problema 2.119, ahora suponga que un tercer trabajador ejerce una fuerza $\mathbf{P} = -(40 \text{ lb})\mathbf{i}$ sobre el contrapeso.

2.121 Un contenedor de peso W está suspendido del aro A. El cable BAC pasa a través del aro y se une a los soportes fijos en B y C. Dos fuerzas $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ y $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ se aplican en el aro para mantener al recipiente en la posición mostrada. Determine P y Q, si W = 376 N. (*Sugerencia:* La tensión es la misma en ambos tramos del cable BAC.)

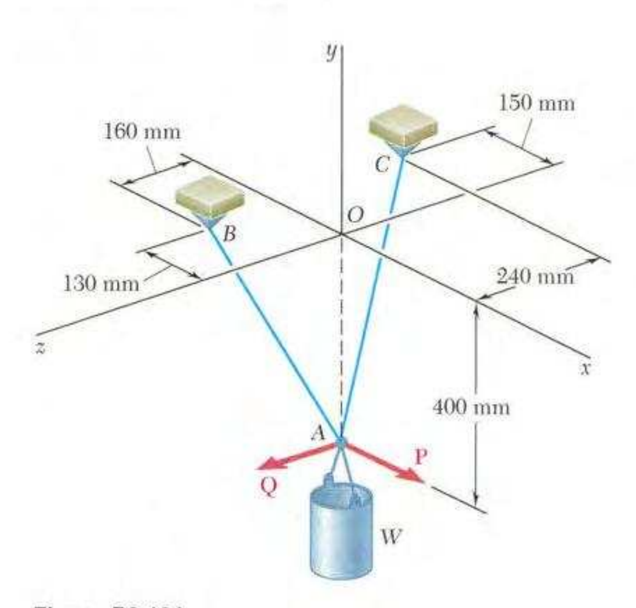


Figura P2.121

2.122 Para el sistema de problema 2.121, determine W y Q si se sabe que $P = 164$ N.

2.123 Un contenedor de peso W está suspendido del aro A, al cual se unen los cables AC y AE. Una fuerza **P** se aplica al extremo F de un tercer cable que pasa sobre una polea en B y a través del anillo A y que está unido al soporte en D. Si se sabe que $W = 1\ 000$ N, determine la magnitud de **P**. (*Sugerencia:* La tensión es la misma en todos los tramos del cable $FBAD$.)

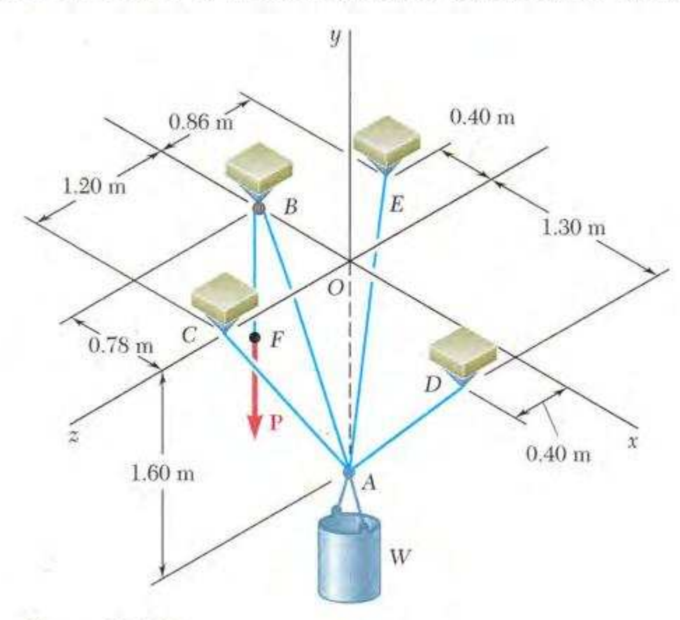


Figura P2.123

2.124 Si la tensión en el cable AC del sistema descrito en el problema 2.123 es de 150 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) el peso W del contenedor.

2.125 Los collarines A y B están unidos por medio de un alambre de 25 in. de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Si una fuerza **Q** de 60 lb se aplica al collarín B como se muestra en la figura, determine *a*) la tensión en el alambre cuando $x = 9$ in. y *b*) la magnitud correspondiente de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del sistema.

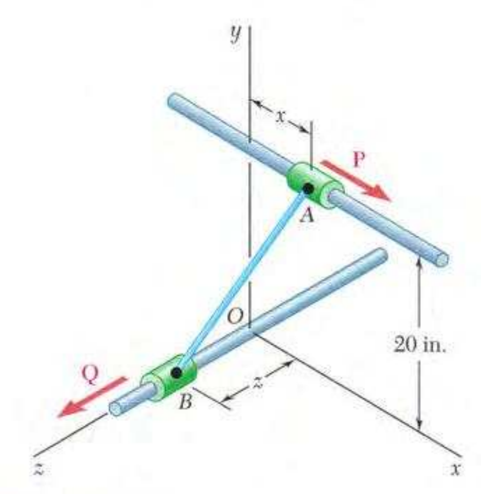


Figura P2.125 y P2.126

2.126 Los collarines A y B están unidos por medio de un alambre de 25 in. de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Determine las distancias x y z para las cuales se mantiene el equilibrio del sistema cuando $P = 120$ lb y $Q = 60$ lb.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas sobre partículas, es decir, sobre cuerpos de forma y tamaño tales que todas las fuerzas que actúan sobre ellos se puede suponer que se aplican en el mismo punto.

Resultante de dos fuerzas

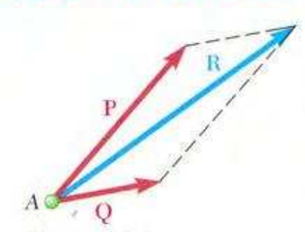


Figura 2.35

Las fuerzas son *cantidades vectoriales* que se caracterizan por un *punto de aplicación*, una *magnitud* y una *dirección*, y se suman de acuerdo con la *ley del paralelogramo* (figura 2.35). La magnitud y dirección de la resultante **R** de dos fuerzas **P** y **Q** se pueden determinar ya sea gráficamente o por trigonometría, utilizando sucesivamente la ley de los cosenos y la ley de los senos (problema resuelto 2.1).

Componentes de una fuerza

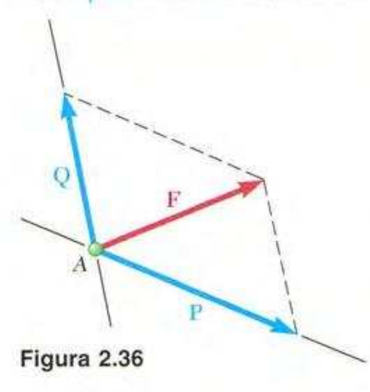


Figura 2.36

Cualquier fuerza dada que actúe sobre una partícula puede descomponerse en dos o más *componentes*, es decir, se puede reemplazar por dos o más fuerzas que tengan el mismo efecto sobre la partícula. Se puede descomponer una fuerza **F** en dos componentes **P** y **Q** al dibujar un paralelogramo que tenga a **F** por su diagonal; entonces, las componentes **P** y **Q** son representadas por los dos lados adyacentes del paralelogramo (figura 2.36) y se pueden determinar ya sea en gráficas o por trigonometría (sección 2.6).

Componentes rectangulares. Vectores unitarios

Se dice que una fuerza **F** se ha dividido en dos *componentes rectangulares* si sus componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$ son perpendiculares entre sí y se dirigen a lo largo de los ejes coordenados (figura 2.37). Al introducir los *vectores unitarios* **i** y **j** a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, se escribe (sección 2.7)

$$\mathbf{F}_x = F_x\mathbf{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\mathbf{j} \tag{2.6}$$

y

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} \tag{2.7}$$

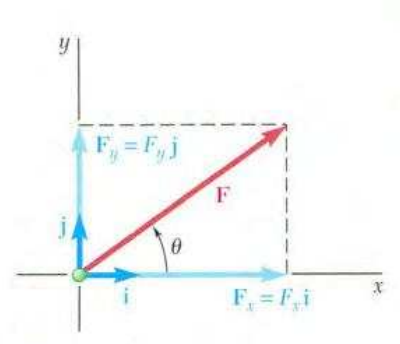


Figura 2.37

donde F_x y F_y son las *componentes escalares* de **F**. Estas componentes, que pueden ser positivas o negativas, se definen por las relaciones

$$F_x = F \cos\theta \qquad F_y = F \operatorname{sen}\theta \tag{2.8}$$

Cuando se dan las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza **F**, el ángulo θ que define la dirección de la fuerza se puede obtener al escribir

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} \tag{2.9}$$

La magnitud F de la fuerza se puede obtener al resolver una de las ecuaciones (2.8) o al aplicar el teorema de Pitágoras y escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \tag{2.10}$$

Resultantes de varias fuerzas coplanares

Cuando *tres o más fuerzas coplanares* actúan sobre una partícula, las componentes rectangulares de su resultante **R** se pueden

obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (sección 2.8). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \tag{2.13}$$

La magnitud y dirección de **R** se pueden determinar entonces por relaciones similares a las ecuaciones (2.9) y (2.10) (problema resuelto 2.3).

Fuerzas en el espacio

Una fuerza **F** en un *espacio tridimensional* se puede descomponer en componentes rectangulares $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ (sección 2.12). Al simbolizar por medio de θ_x, θ_y y θ_z, respectivamente, los ángulos que **F** forma con los ejes *x*, *y* y *z* (figura 2.38), se tiene

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z \tag{2.19}$$

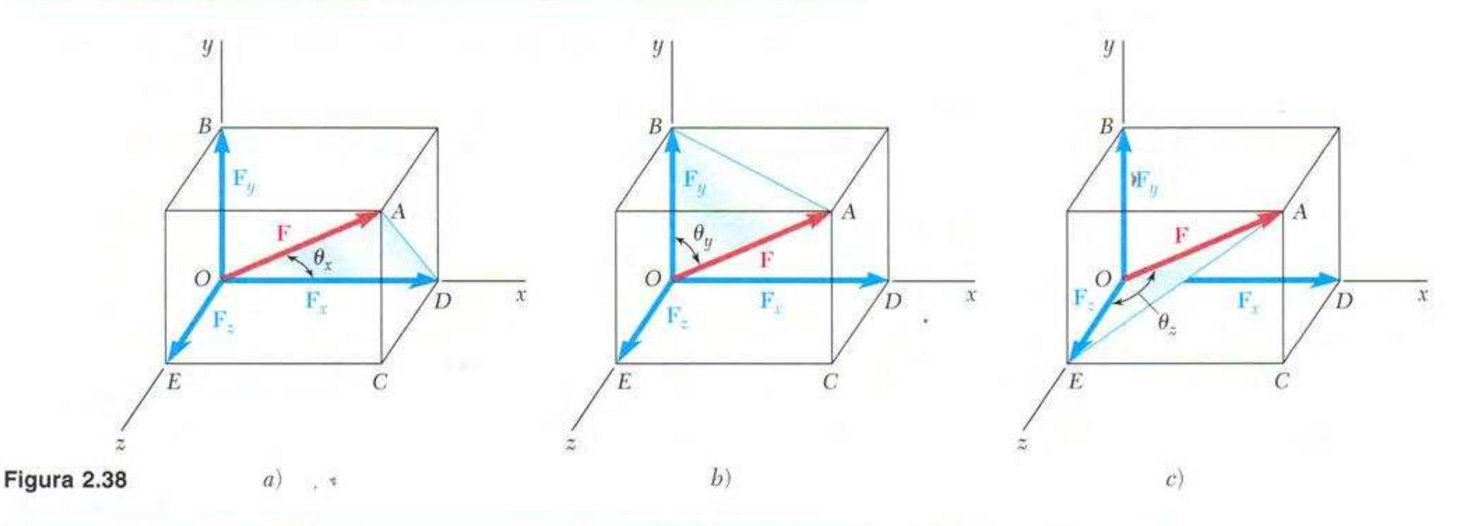


Figura 2.38

Cosenos directores

Los cosenos de θ_x, θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* (*direccionales*) de la fuerza **F**. Con la introducción de los vectores unitaríos **i**, **j** y **k** a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

o

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x\mathbf{i} + \cos \theta_y\mathbf{j} + \cos \theta_z\mathbf{k}) \tag{2.21}$$

lo que demuestra (figura 2.39) que **F** es el producto de su magnitud *F* y del vector unitario

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x\mathbf{i} + \cos \theta_y\mathbf{j} + \cos \theta_z\mathbf{k}$$

Puesto que la magnitud de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a la unidad, se tiene que

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \tag{2.24}$$

Cuando las componentes rectangulares F_x, F_y y F_z de una fuerza **F** se proporcionan, la magnitud *F* de la fuerza se encuentra al escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2.18}$$

y los cosenos directores de **F** se obtienen a partir de las ecuaciones (2.19). Se tiene

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \tag{2.25}$$

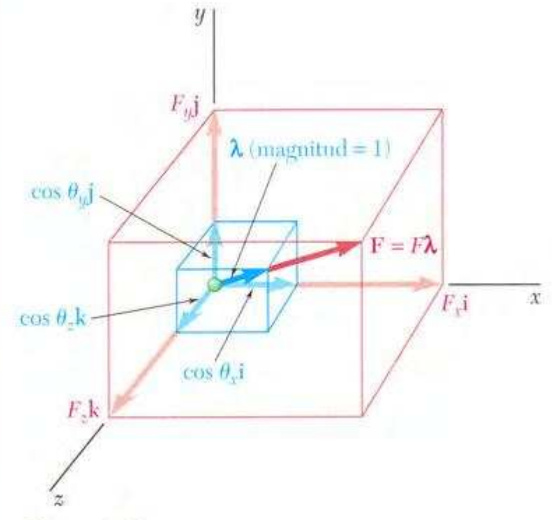


Figura 2.39

Cuando una fuerza **F** se define en un espacio tridimensional por medio de su magnitud *F* y de dos puntos *M* y *N* sobre su línea

de acción (sección 2.13), sus componentes rectangulares se pueden obtener de la siguiente manera: primero se expresa el vector $\overrightarrow{MN}$ que une los puntos M y N en términos de sus componentes d_x, d_y y d_z (figura 2.40); se escribe

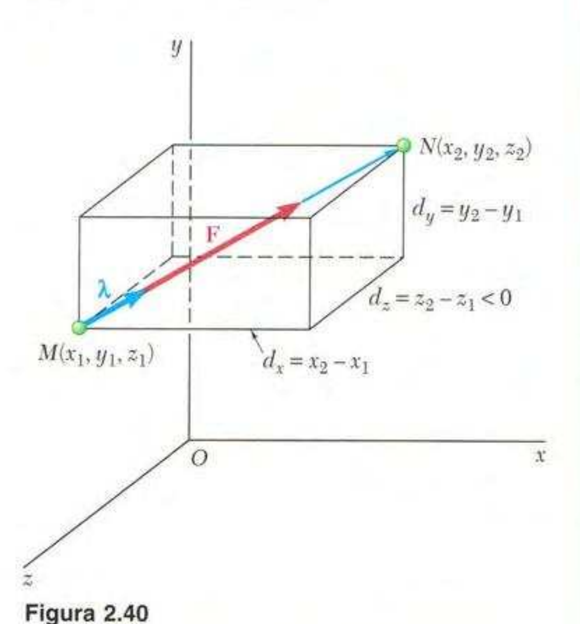


Figura 2.40

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k} \qquad (2.26)$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$ al dividir $\overrightarrow{MN}$ entre su magnitud $MN = d$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (2.27)$$

Recordando que $\mathbf{F}$ es igual al producto de F y $\boldsymbol{\lambda}$, se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \qquad (2.28)$$

de lo cual se desprende (problemas resueltos 2.7 y 2.8) que las componentes escalares de $\mathbf{F}$ son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d} \qquad (2.29)$$

Resultante de fuerzas en el espacio

Cuando *dos o más fuerzas* actúan sobre una partícula en el *espacio tridimensional*, las componentes rectangulares de su resultante $\mathbf{R}$ se pueden obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas (sección 2.14). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z \qquad (2.31)$$

La magnitud y dirección de $\mathbf{R}$ se pueden determinar entonces a partir de relaciones similares a las ecuaciones (2.18) y (2.25) (véase problema resuelto 2.8).

Equilibrio de una partícula

Se dice que una partícula está en *equilibrio* cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero (sección 2.9). La partícula entonces permanecerá en reposo (si originalmente se encuentra en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si se encontraba originalmente en movimiento) (sección 2.10).

Diagrama de cuerpo libre

Para resolver un problema que se refiera a una partícula en equilibrio, primero se deberá dibujar un *diagrama de cuerpo libre* de la partícula que muestre todas las fuerzas que actúan sobre ella (sección 2.11). Si *sólo actúan tres fuerzas coplanares* sobre la partícula, se puede dibujar un *triángulo de fuerzas* para expresar que la partícula se encuentra en equilibrio. Este triángulo se puede resolver gráficamente o por trigonometría para no más de dos incógnitas (véase problema resuelto 2.4). Si se incluyen *más de tres fuerzas coplanares*, se deberán utilizar y resolver las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

Equilibrio en el espacio

Cuando una partícula está en *equilibrio en el espacio tridimensional* (sección 2.15), deberán usarse y resolverse las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad (2.34)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.9).

Problemas de repaso

2.127 La dirección de las fuerzas de 75 lb puede variar, pero el ángulo entre las fuerzas siempre es de 50°. Determine el valor de α para el cual la resultante de las fuerzas que actúan en A tiene una dirección horizontal hacia la izquierda.

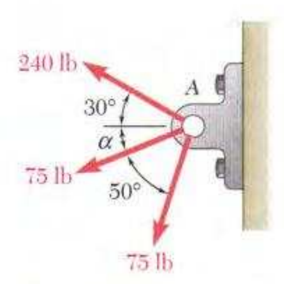


Figura P2.127

2.128 Se pretende sacar una estaca del suelo por medio de dos cuerdas, como se muestra en la figura. Si se conoce la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre una cuerda, determine la magnitud y dirección de la fuerza **P** que debe ejercerse en la otra cuerda si la resultante de las dos fuerzas debe ser una fuerza vertical de 40 lb.

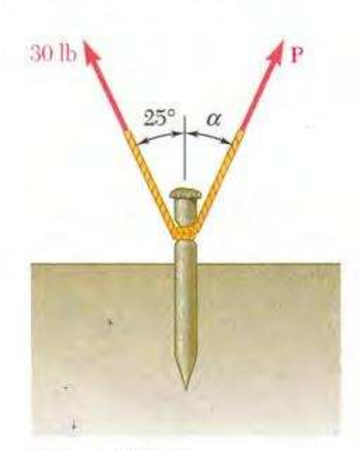


Figura *P2.128*

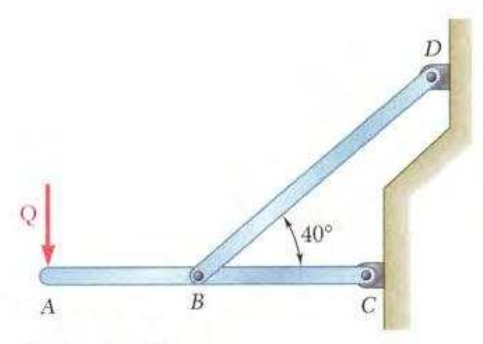
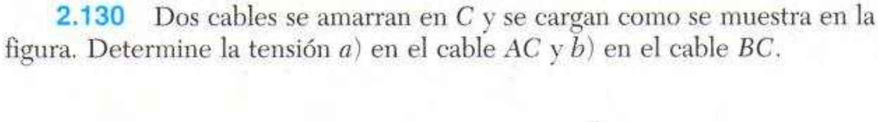


Figura *P2.129*

2.129 El elemento BD ejerce sobre el elemento ABC una fuerza **P** dirigida a lo largo de la línea BD. Si se sabe que **P** debe tener una componente vertical de 240 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P** y *b*) su componente horizontal.



2.130 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión *a*) en el cable AC y *b*) en el cable BC.

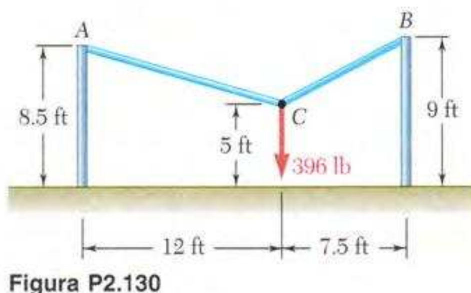


Figura P2.130

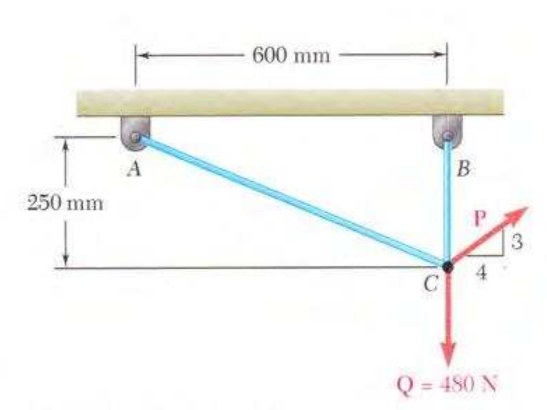
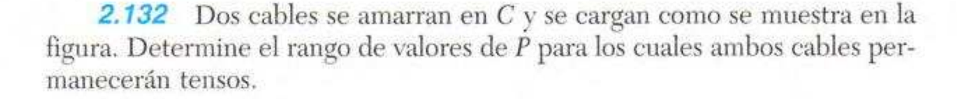


Figura P2.131 y *P2.132*

2.131 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 360$ N, determine la tensión *a*) en el cable AC, *b*) en el cable BC.



2.132 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de P para los cuales ambos cables permanecerán tensos.

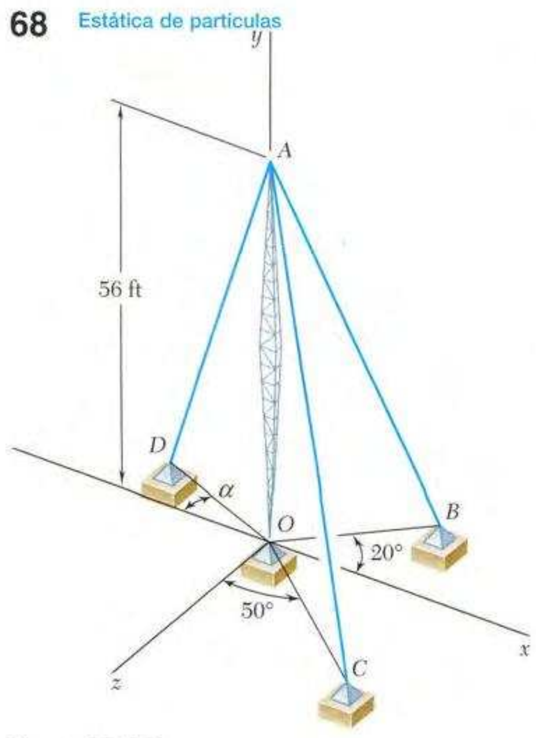


Figura P2.134

2.133 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 69.3°$ y $\theta_z = 57.9°$. Si se sabe que la componente y de la fuerza es de –174 lb, determine *a*) el ángulo θ_y, *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.134 El cable AB tiene 65 ft de largo y una tensión de 3 900 lb. Determine *a*) las componentes x, y y z de la fuerza ejercida por el cable sobre el ancla B, *b*) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que definen la dirección de esa fuerza.

2.135 A fin de mover un camión volcado, se atan dos cables en A y se jalan mediante las grúas B y C como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 10 kN y en el cable AC es de 7.5 kN, determine la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

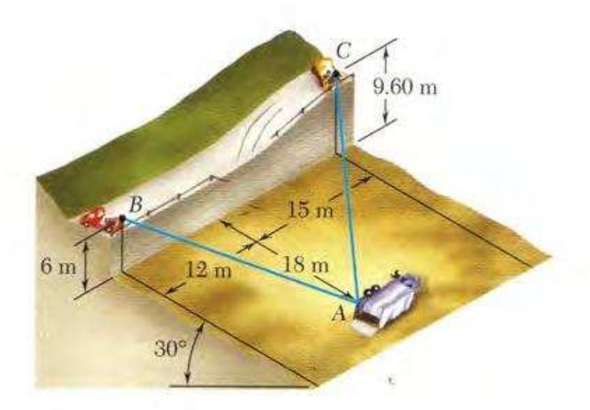


Figura P2.135

2.136 Un contenedor de peso W = 1 165 N se sostiene por medio de tres cables como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable.

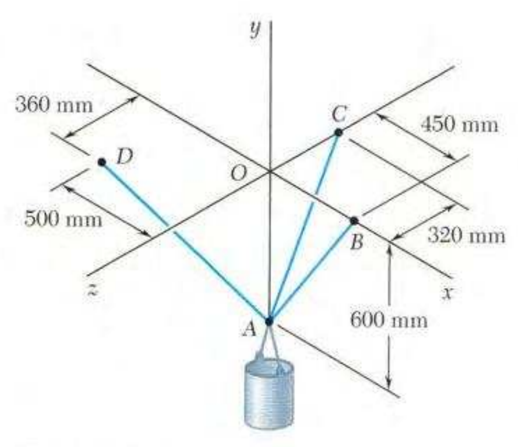


Figura P2.136

2.137 Los collarines *A* y *B* se conectan por medio de un alambre de 525 mm de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Si una fuerza **P** = (341 N)**j** se aplica al collarín A, determine *a*) la tensión en el alambre cuando y = 155 mm y *b*) la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio del sistema.

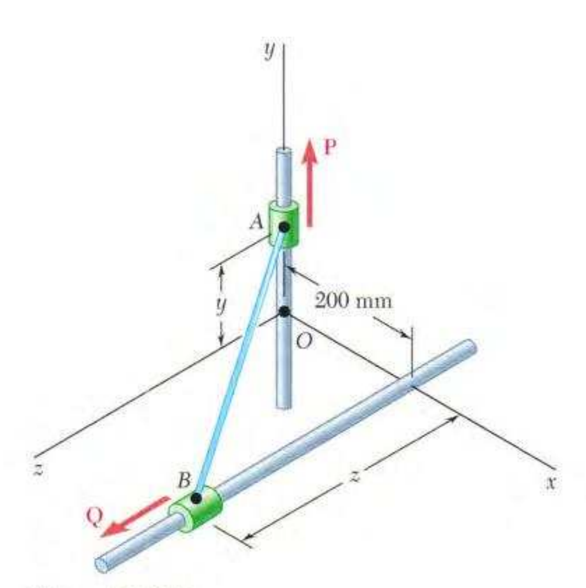


Figura P2.137

2.138 Retome el problema 2.137, ahora suponga que y = 275 mm.



Las maniobras del *USS New Jersey*, un barco de guerra, en el muelle naval de Bremerton las realizan cuatro remolcadores. En este capítulo se mostrará que las fuerzas ejercidas por los remolcadores sobre el barco podrían sustituirse por una fuerza equivalente ejercida por un solo remolcador más potente.



CAPÍTULO 3

Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza

CAPÍTULO 3 CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se supuso que cada uno de los cuerpos considerados podía ser tratado como si fuera una sola partícula. Sin embargo, esto no siempre es posible y, en general, un cuerpo debe tratarse como la combinación de varias partículas. Tendrá que tomarse en consideración el tamaño del cuerpo y también el hecho de que las fuerzas actúan sobre distintas partículas y, por tanto, tienen distintos puntos de aplicación.

Al definir que un *cuerpo rígido* es aquel que no se deforma, se supone que la mayoría de los cuerpos considerados en la mecánica elemental son *rígidos*. Sin embargo, las estructuras y máquinas reales nunca son absolutamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. A pesar de ello, por lo general esas deformaciones son pequeñas y no afectan las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. No obstante, tales deformaciones son importantes en lo concerniente a la resistencia a la falla de las estructuras y están consideradas en el estudio de la mecánica de materiales.

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido y se aprenderá cómo reemplazar un sistema de fuerzas dado por un sistema equivalente más simple. Este análisis estará basado en la suposición fundamental de que el efecto de una fuerza dada sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si dicha fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (*principio de transmisibilidad*). Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden representarse por *vectores deslizantes*, como se mencionó en la sección 2.3.

Dos conceptos fundamentales asociados con el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido son el *momento de una fuerza con respecto a un punto* (sección 3.6) y el *momento de una fuerza con respecto a un eje* (sección 3.11). Como la determinación de estas cantidades involucra el cálculo de productos escalares y vectoriales de dos vectores, en este capítulo se presentarán los aspectos fundamentales del álgebra vectorial aplicados a la solución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

Otro concepto que se presentará en este capítulo es el de un *par*, esto es, la combinación de dos fuerzas que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos (sección 3.12). Como se verá, cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por un sistema equivalente que consta de una fuerza, que actúa en cierto punto, y un par. Este sistema básico recibe el nombre de *sistema fuerza-par*. En el caso de fuerzas concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza, denominada la *resultante* del sistema, o a un solo par, llamado el *par resultante* del sistema.

3.2. FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se pueden dividir en dos grupos: 1) *fuerzas externas* y 2) *fuerzas internas*.

1. Las *fuerzas externas* representan la acción que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Ellas son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Las fuerzas externas causan que el cuerpo se mueva o aseguran que éste permanezca en reposo. En el presente capítulo y en los capítulos 4 y 5 se considerarán sólo las fuerzas externas.

2. Las *fuerzas internas* son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido. Si éste está constituido en su estructura por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se definen como fuerzas internas. Este grupo de fuerzas se estudiará en los capítulos 6 y 7.

Como ejemplo de fuerzas externas, considérense las fuerzas que actúan sobre un camión descompuesto que es arrastrado hacia delante por varios hombres mediante cuerdas unidas a la defensa delantera (figura 3.1). Las fuerzas externas que actúan sobre el camión se muestran en un *diagrama de cuerpo libre* (figura 3.2). En primer lugar, se debe considerar el *peso* del camión. A pesar de que el peso representa el efecto de la atracción de la Tierra sobre cada una de las partículas que constituyen al camión, éste se puede representar por medio de una sola fuerza **W**. El *punto de aplicación* de esta fuerza, esto es, el punto en el que actúa la fuerza, se define como el *centro de gravedad* del camión. En el capítulo 5 se verá cómo se pueden determinar los centros de gravedad. El peso **W** hace que el camión se mueva hacia abajo. De hecho, si no fuera por la presencia del piso, el peso podría ocasionar que el camión se moviera hacia abajo, esto es, que cayera. El piso se opone a la caída del camión por medio de las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Estas fuerzas se ejecen *por* el piso *sobre* el camión y, por tanto, deben ser incluidas entre las fuerzas externas que actúan sobre el camión.

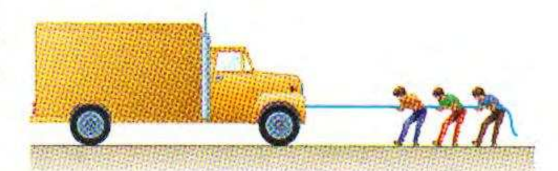


Figura 3.1

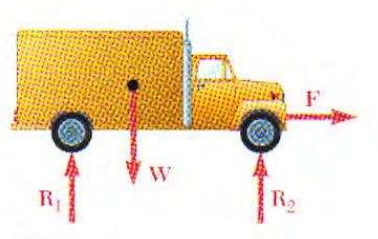


Figura 3.2

Los hombres ejercen la fuerza **F** al tirar de la cuerda. El punto de aplicación de **F** está en la defensa delantera. La fuerza **F** tiende a hacer que el camión se mueva hacia delante en línea recta y, en realidad, logra moverlo puesto que no existe una fuerza externa que se oponga a dicho movimiento. (Para simplificar, en este caso se ha despreciado la resistencia a la rodadura.) Este movimiento del camión hacia delante, donde cada línea recta mantiene su orientación original (el piso del camión permanece horizontal y sus lados se mantienen verticales), se conoce como *traslación*. Otras fuerzas podrían ocasionar que el camión se moviera en forma diferente. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un gato colocado debajo del eje delantero podría ocasionar que el camión rotara alrededor de su eje trasero. Este movimiento es una *rotación*. Por tanto, se puede concluir que cada una de las *fuerzas externas* que actúan sobre un *cuerpo rígido* puede ocasionar un movimiento de traslación, rotación o ambos, siempre y cuando dichas fuerzas no encuentren alguna oposición.

3.3. PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD. FUERZAS EQUIVALENTES

El *principio de transmisibilidad* establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza **F** que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza **F**′ que tiene la misma magnitud y dirección, pero que actúa en un punto distinto, *siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción* (figura 3.3). Las dos fuerzas, **F** y **F**′, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son *equivalentes*. Este principio establece que la acción de una fuerza puede ser *transmitida* a lo largo de su línea de acción, lo cual está basado en la evidencia experimental; *no puede* ser derivado a partir de las propiedades establecidas hasta ahora en este libro y, por tanto, debe ser aceptado como una ley experimental. Sin embargo, como se verá en la sección 16.5, el principio de transmisibilidad puede ser derivado a partir del estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos, pero dicho estudio requiere la introduc-

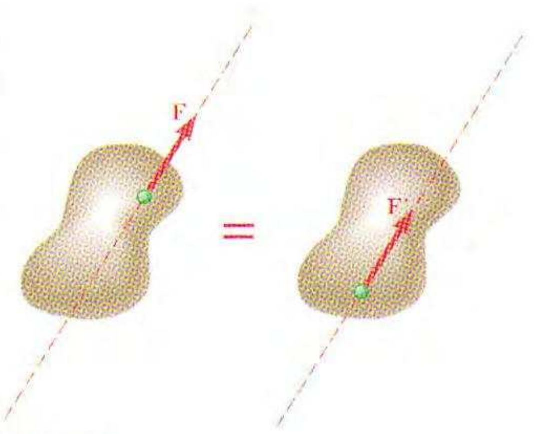


Figura 3.3

ción de la segunda y tercera leyes de Newton y también algunos otros conceptos. Por consiguiente, el estudio de la estática de los cuerpos rígidos estará basado en los tres principios que se han presentado hasta ahora, que son la ley del paralelogramo para la adición de vectores, la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad.

En el capítulo 2 se mencionó que las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido deben ser representadas por una clase de vector diferente, el *vector deslizante*, puesto que permite que las fuerzas se deslicen a lo largo de su línea de acción. Es importante señalar que todas las propiedades que serán derivadas en las siguientes secciones para las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido serán, en general, válidas para cualquier sistema de vectores deslizantes. Sin embargo, para mantener la presentación más intuitiva, ésta se llevará a cabo en términos de fuerzas físicas en lugar de las entidades matemáticas conocidas como vectores deslizantes.

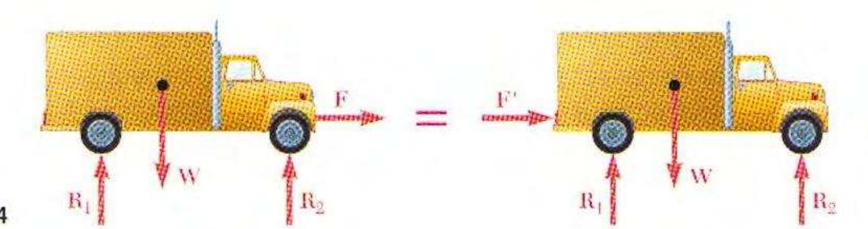


Figura 3.4

En el ejemplo del camión, en primer lugar se observa que la línea de acción de la fuerza **F** es una línea horizontal que pasa a través de las defensas delantera y trasera del camión (figura 3.4). Por tanto, empleando el principio de transmisibilidad se puede reemplazar **F** por una *fuerza equivalente* **F**′ que actúa sobre la defensa trasera. En otras palabras, las condiciones de movimiento y todas las demás fuerzas externas que actúan sobre el camión (**W**, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$) permanecen inalteradas si los hombres empujan la defensa trasera en lugar de tirar de la defensa delantera.

El principio de transmisibilidad y el concepto de fuerzas equivalentes tienen limitaciones. Por ejemplo, considere una barra corta AB sobre la cual actúan dos fuerzas axiales iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ como se muestra en la figura 3.5*a*. De acuerdo con el principio de transmisibilidad, la fuerza $\mathbf{P}_2$ se puede reemplazar por una fuerza $\mathbf{P}_2'$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en A en lugar de en B (figura 3.5*b*). Las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2'$ que actúan sobre la misma partícula pueden sumarse de acuerdo a las reglas del capítulo 2 y, como dichas

Figura 3.5 *a*) *b*) *c*) *d*) *e*) *f*)

fuerzas son iguales y opuestas, su suma es igual a cero. Por tanto, en términos del comportamiento externo de la barra el sistema de fuerzas original mostrado en la figura 3.5*a* es equivalente a que no existiera fuerza alguna que actúe sobre la barra (figura 3.5*c*).

Considere ahora las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que actúan sobre la barra *AB*, como se muestra en la figura 3.5*d*. La fuerza $\mathbf{P}_2$ puede ser reemplazada por una fuerza $\mathbf{P}'_2$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en *B* en lugar de en *A* (figura 3.5*e*). Entonces, las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}'_2$ pueden sumarse y, nuevamente, su suma es igual a cero (figura 3.5*f*). De esta manera, desde el punto de vista de la mecánica de los cuerpos rígidos, los sistemas mostrados en la figura 3.5*a* y *d* son equivalentes. Sin embargo, resulta obvio que las *fuerzas internas* y las *deformaciones* producidas por los dos sistemas son diferentes. La barra de la figura 3.5*a* está en *tensión* y, si no es en su totalidad rígida, se incrementará ligeramente su longitud; la barra de la figura 3.5*d* está en *compresión* y, si no es rígida, disminuirá en poco su longitud. De esta forma, aunque el principio de transmisibilidad se puede usar en forma libre para determinar las condiciones de movimiento o de equilibrio de los cuerpos rígidos y para calcular las fuerzas externas que actúan sobre los mismos, debe evitarse, o por lo menos, emplearse con cuidado, al momento de determinar fuerzas internas y deformaciones.

3.4. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Para entender mejor el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido, a continuación se introducirá un nuevo concepto: el *momento de una fuerza con respecto a un punto*. Este concepto se podrá entender más fácilmente y podrá aplicarse en una forma más efectiva si primero se agrega a las herramientas matemáticas que se tienen disponibles, el *producto vectorial* de dos vectores.

El producto vectorial de los vectores **P** y **Q** se define como el vector **V** que satisface las siguientes condiciones.

1. La línea de acción de **V** es perpendicular al plano que contiene a **P** y **Q** (figura 3.6*a*).
2. La magnitud de **V** es el producto de las magnitudes de **P** y **Q** por el seno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (cuya medida siempre deberá ser menor o igual a 180°); por tanto, se tiene

$$V = PQ \text{ sen } \theta \tag{3.1}$$

3. La dirección de **V** se obtiene a partir de la *regla de la mano derecha*. Cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el primer sentido que la rotación a través del ángulo θ que haría al vector **P** colineal con el vector **Q**; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector **V** (figura 3.6*b*). Obsérvese que si **P** y **Q** no tienen un punto de aplicación común, estos primeros se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores **P**, **Q** y **V** —tomados en ese orden— forman una *tríada a mano derecha*.[†]

V = P × Q

Q

θ

P

a)

V

b)

Figura 3.6

[†]Se debe señalar que los ejes *x*, *y* y *z* utilizados en el capítulo 2 forman un sistema de ejes ortogonales a mano derecha y que los vectores unitarios **i**, **j** y **k** definidos en la sección 2.12 forman una tríada ortogonal a mano derecha.

Como se mencionó anteriormente, el vector **V** que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el producto vectorial de **P** y **Q** y se representa por la expresión matemática

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \tag{3.2}$$

En virtud de la notación utilizada, el producto vectorial de dos vectores **P** y **Q** también se conoce como el *producto cruz* de **P** y **Q**.

A partir de la ecuación (3.1) se concluye que cuando dos vectores **P** y **Q** tienen la misma dirección, o direcciones opuestas, su producto vectorial es igual a cero. En el caso general, cuando el ángulo θ formado por los dos vectores no es 0° ni 180°, a la ecuación (3.1) se le puede dar una interpretación geométrica simple: la magnitud V del producto vectorial de **P** y **Q** es igual al área del paralelogramo que tiene como lados a **P** y **Q** (figura 3.7). Por tanto, el producto vectorial **P** × **Q** permanece inalterado si **Q** se reemplaza por un vector **Q**′ que sea coplanar a **P** y **Q** y tal que la línea que une a las partes terminales de **Q** y **Q**′ sea paralelo a **P**. Así, se escribe

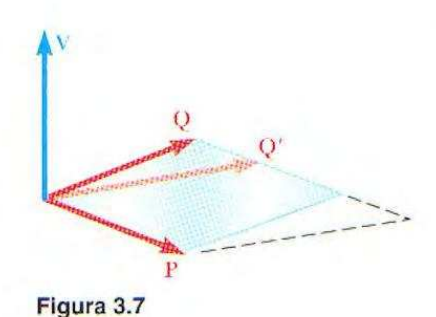


Figura 3.7

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \tag{3.3}$$

A partir de la tercera condición empleada para definir al producto vectorial **V** de **P** y **Q**, esto es, la condición que establece que **P**, **Q** y **V** deben formar una tríada a mano derecha, se concluye que los productos vectoriales *no son comunitarios*, es decir, **Q** × **P** no es igual a **P** × **Q**. De hecho, se puede verificar fácilmente que **Q** × **P** está representado por el vector −**V**, que es igual y opuesto a **V**, entonces se escribe

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

Ejemplo. Calcúlese el producto vectorial **V** = **P** × **Q** cuando el vector **P** tiene una magnitud de 6 y se encuentra en el plano zx que forma un ángulo de 30° con el eje x y el vector **Q** tiene una magnitud de 4 y se encuentra a lo largo del eje x (figura 3.8).

A partir de la definición del producto vectorial se concluye que el vector **V** debe estar a lo largo del eje y, tener la magnitud

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta = (6)(4) \operatorname{sen} 30° = 12$$

y que debe estar dirigido hacia arriba.

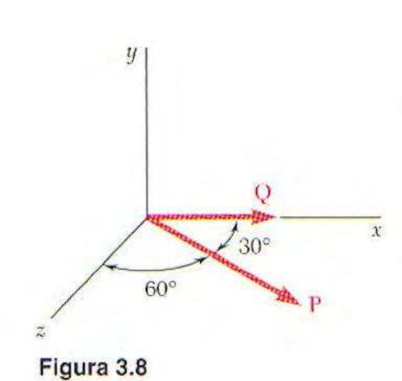


Figura 3.8

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Ahora se puede preguntar si la propiedad *distributiva* se cumple, esto es, si la relación

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \tag{3.5}$$

es válida. La respuesta es *sí*. Probablemente muchos lectores están dispuestos a aceptar sin demostración formal una respuesta que de manera intuitiva puede parecer correcta. Sin embargo, dado que la estructura del álgebra vectorial y de la estática depende de la relación (3.5), se debe tomar el tiempo necesario para su deducción.

Sin perder la generalidad se puede suponer que **P** está dirigida a lo largo del eje y (figura 3.9a). Representando con **Q** la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$, se trazan perpendiculares a partir de los extremos terminales de **Q**, $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ hacia el plano zx, quedando definidos de esta forma los vectores **Q**′, $\mathbf{Q}_1'$, $\mathbf{Q}_2'$. Se hará referencia a estos vectores, respectivamente, como las *proyecciones* de la ecuación (3.3), se observa que el término del lado izquierdo de la ecuación (3.5) puede ser reemplazado por **P** × **Q**′ y que, en forma similar, los productos vectoriales **P** ×

$\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2$ del lado derecho pueden ser reemplazados, respectivamente, por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2$. De esta forma, la relación que debe ser demostrada puede escribirse de la siguiente manera

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}'_2 \qquad (3.5')$$

Ahora se observa que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ se puede obtener a partir de $\mathbf{Q}'$ multiplicando a este vector por el escalar P y rotándolo 90° en el plano zx en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.9*b*); los otros dos productos vectoriales en (3.5′) se pueden obtener

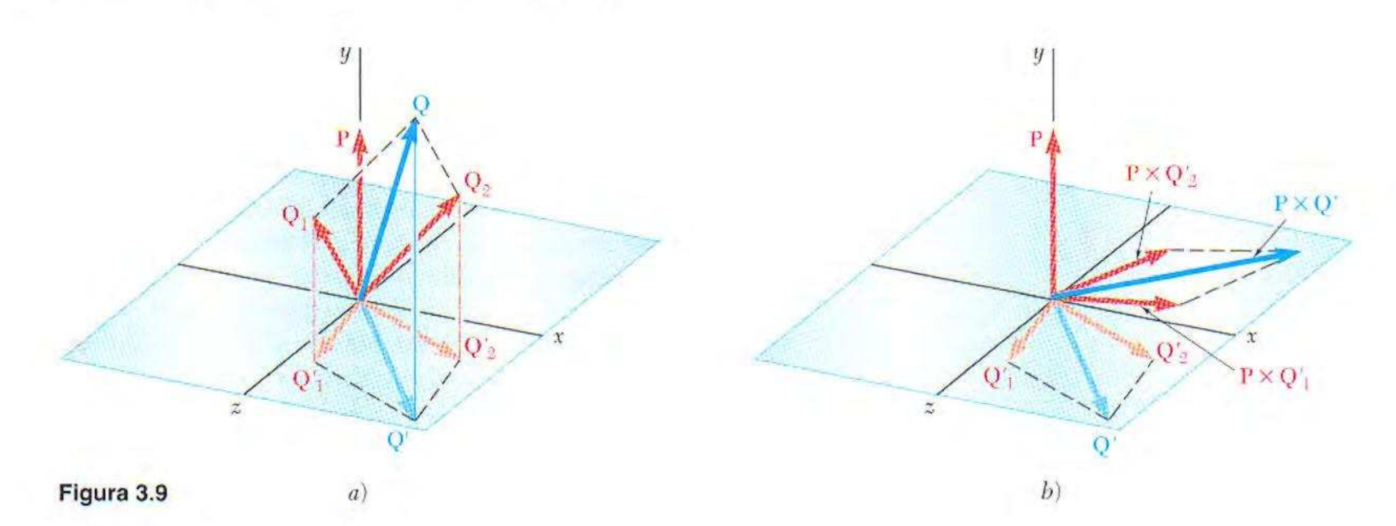


Figura 3.9 *a*) *b*)

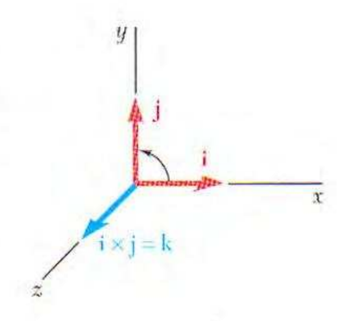
en forma similar a partir de $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$, respectivamante. Ahora, en virtud de que la proyección de un paralelogramo sobre cualquier plano arbitrario es otro paralelogramo, la proyección $\mathbf{Q}'$ de la suma $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ debe ser la suma de las proyecciones y $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$ de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ sobre el mismo plano (figura 3.9*a*). Esta relación entre los tres vectores $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}'_1$ y $\mathbf{Q}'_2$ seguirá siendo válida después de que los tres vectores hayan sido multiplicados por el escalar P y hayan sido rotados a través de un ángulo de 90° (figura 3.9*b*). Por tanto, se ha demostrado la relación (3.5′) y se puede tener la certeza de que la propiedad distributiva es válida para los productos vectoriales.

Una tercera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales; en general, se tiene que

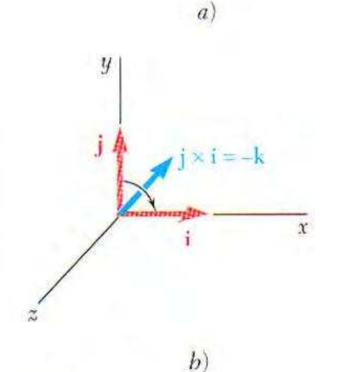
$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \qquad (3.6)$$

3.5. PRODUCTOS VECTORIALES EXPRESADOS EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGULARES

A continuación se procederá a determinar el producto vectorial de cualquier par de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, que fueron definidos en el capítulo 2. Considérese primero el producto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (figura 3.10*a*). Como ambos vectores tienen una magnitud igual a 1 y dado que éstos forman ángulos rectos entre sí, su producto vectorial también deberá ser un vector unitario. Dicho vector unitario debe ser **k**, puesto que los vectores **i**, **j** y **k** son mutuamente perpendiculares y forman una tríada a mano derecha. Por otra parte, a partir de la regla de la mano derecha presentada en el punto 3 de la sección 3.4, se concluye que el producto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ debe ser igual a $-\mathbf{k}$ (figura 3.10*b*). Por último, se debe ob-



a)



b)

Figura 3.10

servar que el producto vectorial de un vector consigo mismo, como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, es igual a cero debido a que ambos vectores tienen la misma dirección. Los productos vectoriales para los diversos pares posibles de vectores unitarios son

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} \tag{3.7}$$

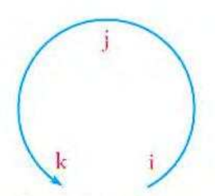


Figura 3.11

Si se ordena las tres letras que representan a los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.11) se puede facilitar la determinación del signo del producto vectorial de dos vectores unitarios: el producto de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno a otro en un orden contrario al movimiento de las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en un orden en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora se puede expresar fácilmente el producto vectorial **V** de dos vectores dados **P** y **Q** en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Al descomponer a **P** y **Q** en sus componentes rectangulares, primero se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \times (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, **V** se expresa como la suma de productos vectoriales, como $P_x\mathbf{i} \times Q_y\mathbf{j}$. Se observa que cada una de las expresiones obtenidas es igual al producto vectorial de dos vectores unitarios, como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicados por el producto de dos escalares, como P_xQ_y, y recordando las identidades (3.7) después de factorizar a **i**, **j** y **k**, se obtiene

$$\mathbf{V} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\mathbf{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\mathbf{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\mathbf{k} \tag{3.8}$$

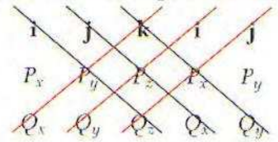
Por tanto, las componentes rectangulares del producto vectorial **V** están dadas por

$$\begin{aligned} V_x &= P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y &= P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z &= P_xQ_y - P_yQ_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

De regreso a la ecuación (3.8), se observa que el término del lado derecho representa el desarrollo de un determinante. Por tanto, el producto vectorial **V** puede expresarse de la siguiente forma, que es más sencilla de memorizar:[†]

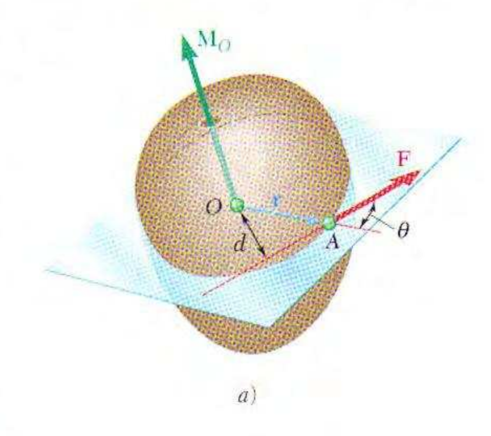
$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

[†]Cualquier determinante que conste de tres renglones y tres columnas se puede evaluar repitiendo la primera y la segunda columnas, y formando productos a lo largo de cada línea diagonal. Entonces, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea roja se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de las líneas negras.



3.6. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido (figura 3.12*a*). Como se sabe, la fuerza **F** está representada por un vector que define la magnitud y su dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido también depende de su punto de aplicación *A*. La posición de *A* puede definirse de manera conveniente por medio del vector **r** que une al punto de referencia fijo *O* con *A*; a este vector se le conoce como el *vector de posición* de *A*.[†] El vector de posición **r** y la fuerza **F** definen el plano mostrado en la figura 3.12*a*.



a)



b)

Figura 3.12

El *momento de* **F** *con respecto a O* se define como el producto vectorial de **r** y **F**:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (3.11)$$

De acuerdo con la definición del producto vectorial dada en la sección 3.4, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene el punto *O* y a la fuerza **F**. El sentido de $\mathbf{M}_O$ está definido por el sentido de la rotación que haría al vector **r** colineal con el vector **F**; un observador localizado en el extremo de $\mathbf{M}_O$ ve a esta rotación como una rotación *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Otra forma de definir el sentido de $\mathbf{M}_O$ se logra por medio de la regla de la mano derecha: cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que **F** le impartiría al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$; su dedo pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$ (figura 3.12*b*).

Por último, representado con θ el ángulo entre las líneas de acción del vector de posición **r** y la fuerza **F**, se encuentra que la magnitud del momento de **F** con respecto a *O* está dada por

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \qquad (3.12)$$

donde *d* representa la distancia perpendicular desde *O* hasta la línea de acción de **F**. En virtud de que la tendencia de la fuerza **F** a hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo perpendicular a la fuerza depende tanto de la distancia de **F** a dicho eje como de la magnitud de **F**, se observa que *la magnitud de* $\mathbf{M}_O$ *mide la tendencia de la fuerza* **F** *a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de* $\mathbf{M}_O$.

En el sistema de unidades del SI, donde la fuerza se expresa en newtons (N) y la distancia se expresa en metros (m), el momento de una fuerza estará expresado en newtons-metro (N · m). En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, donde la fuerza se expresa en libras y la distancia en pies o en pulgadas, el momento de una fuerza se expresa en lb · ft o en lb · in.

Se puede observar que a pesar de que el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza, dicho momento *no* depende de la posición que tiene el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. En consecuencia, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F** no caracteriza a la posición del punto de aplicación de **F**.

[†]Se puede comprobar que los vectores de posición obedecen la ley de la adición de vectores y, por tanto, realmente son vectores. Considérese, por ejemplo, los vectores de posición **r** y **r**′ de *A* con respecto a dos puntos de referencia *O* y *O*′ y al vector de posición **s** de *O* con respecto a *O*′ (figura 3.40*a*, sección. 3.16). Se comprueba que el vector de posición $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A}$ puede obtenerse a partir de los vectores de posición $\mathbf{s} = \overrightarrow{O'O}$ y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ aplicando la regla del triángulo para la suma de vectores.

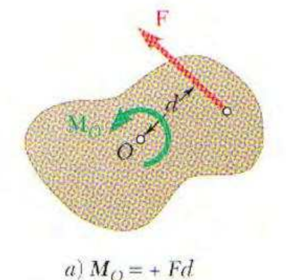
Sin embargo, como se verá a continuación, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F** de magnitud y dirección conocida *define completamente a la línea de acción de* **F**. Además la línea de acción de **F** debe estar en un plano que pasa por el punto O y es perpendicular al momento $\mathbf{M}_O$. La distancia d medida desde O hasta la línea de acción de la fuerza debe ser igual al cociente de las magnitudes de $\mathbf{M}_O$ y **F**, esto es, debe ser igual a M_O/F. El sentido de $\mathbf{M}_O$ determina si la línea de acción debe trazarse del lado de **F** del lado del punto O.

Recuérdese la sección 3.3, donde se señala que el principio de transmisibilidad establece que dos fuerzas **F** y **F′** son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido) si tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción. Este principio se puede expresar ahora de la siguiente forma: *dos fuerzas* **F** *y* **F′** *son equivalentes si, y sólo si, son iguales* (es decir, tienen la misma magnitud y la misma dirección) *y, además, tienen momentos iguales con respecto a un punto O*. Las condiciones necesarias y suficientes para que dos fuerzas **F** y **F′** sean equivalentes son

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O \tag{3.13}$$

Debe señalarse que el enunciado anterior implica que si las relaciones (3.13) se cumplen para cierto punto O, también se cumplirán para cualquier otro punto.

Problemas en dos dimensiones. Muchas aplicaciones tratan con estructuras bidimensionales, es decir, estructuras cuyo espesor es despreciable en comparación con su longitud y su anchura, las cuales están sujetas a fuerzas contenidas en su mismo plano. Dichas estructuras bidimensionales y las fuerzas que actúan sobre ellas pueden representarse fácilmente sobre una hoja de papel o sobre una pizarra. Por tanto, su análisis es más simple que el correspondiente al caso de las estructuras y fuerzas tridimensionales.



a) $\mathbf{M}_O = +Fd$



b) $\mathbf{M}_O = -Fd$

Figura 3.13

Considere, por ejemplo, una placa rígida sobre la que actúa una fuerza **F** (figura 3.13). El momento de **F** con respecto a un punto O seleccionado en el plano de la figura está representado por el vector $\mathbf{M}_O$ de magnitud Fd, que es perpendicular a dicho plano. En la figura 3.13*a* el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *afuera* del plano de papel, mientras que en la figura 3.13*b* éste apunta hacia *adentro* del plano de papel. Como se observa en la figura, en el primer caso, la fuerza de la figura 3.13*a* tiende a hacer rotar la placa en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj mientras que, en el segundo caso, la fuerza de la figura 3.13*b* tiende a hacer rotar la placa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Por consiguiente, es natural referirse al sentido del momento **F** con respecto a O en la figura 3.13*a* como opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj (antihorario) ↺, y en la figura 3.13*b* como siguiendo la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (horario) ↻.

Puesto que el momento de la fuerza **F** que actúa en el plano de la figura debe ser perpendicular a dicho plano, sólo se necesita especificar la *magnitud* y el *sentido* del momento **F** con respecto a O. Esto se

puede hacer asignándole a la magnitud M_O del momento un signo positivo o negativo, según el vector $\mathbf{M}_O$ apunte hacia afuera o hacia adentro del plano de papel.

3.7. TEOREMA DE VARIGNON

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias *fuerzas concurrentes*. Si las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots$ se aplican en el mismo punto A (figura 3.14) y si se representa por $\mathbf{r}$ al vector de posición A, a partir de la ecuación (3.5) de la sección 3.4, se puede concluir que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots \tag{3.14}$$

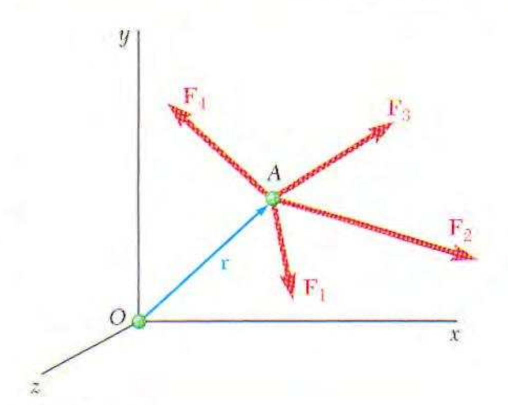


Figura 3.14

Esto es, *el momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O*. Esta propiedad la descubrió el matemático francés Pierre Varignon (1654-1722) mucho antes de inventarse el álgebra vectorial, por lo que se le conoce como el *teorema de Varignon*.

La relación (3.14) permite reemplazar el cálculo directo del momento de una fuerza $\mathbf{F}$ por el cálculo de los momentos de dos o más fuerzas componentes. Como se verá en la siguiente sección, por lo general la fuerza $\mathbf{F}$ será separada en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Sin embargo, será mucho más rápido en algunos casos descomponer a $\mathbf{F}$ en componentes no paralelas a los ejes coordenados (véase el problema resuelto 3.3).

3.8. COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

En general, la determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares x, y y z. Por ejemplo, considere el momento $\mathbf{M}_O$ con respecto a O de una fuerza $\mathbf{F}$ con componentes F_x, F_y y F_z que está aplicada en el punto A de coordenadas x, y y z (figura 3.15). Se observa que las componentes del vector de posición $\mathbf{r}$ son iguales, respectivamente, a las coordenadas x, y y z del punto A, se escribe

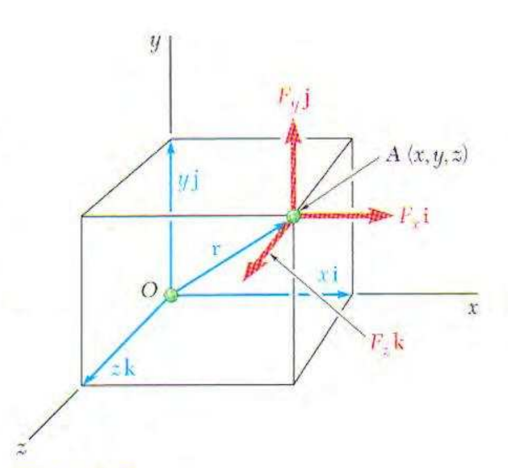


Figura 3.15

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.15}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.16}$$

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$ a partir de (3.15) y (3.16) en

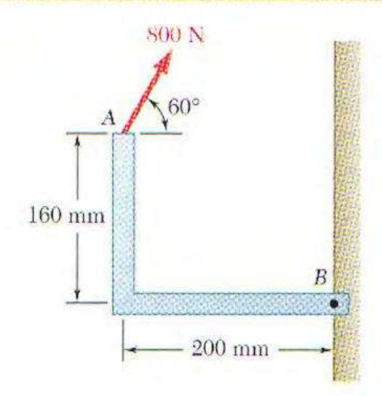
$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

y recordar los resultados obtenidos en la sección 3.5, se puede escribir el momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O de la siguiente forma

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \tag{3.17}$$

donde las componentes escalares M_x, M_y y M_z están definidas por las relaciones

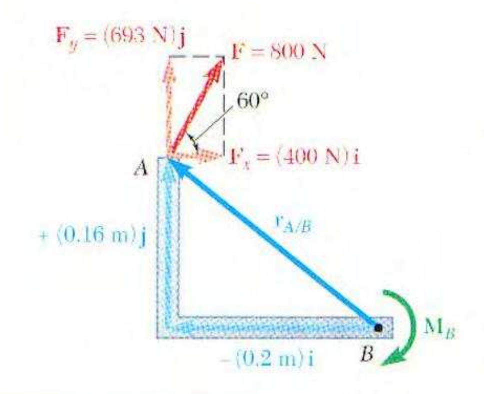
$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$



PROBLEMA RESUELTO 3.2

Una fuerza de 800 N actúa sobre la ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B.

SOLUCIÓN



El momento $\mathbf{M}_B$ de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a B se obtiene a través del producto vectorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

desde $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector trazado desde B hasta A. Al descomponer a $\mathbf{r}_{A/B}$ y a $\mathbf{F}$ en sus componentes rectangulares, se tiene que

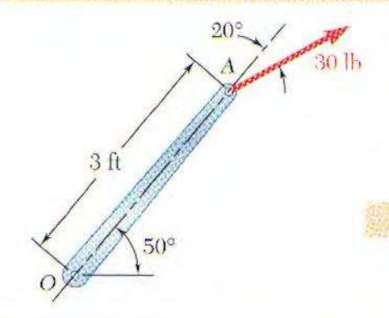
$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}\\ \mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60°\mathbf{i} + (800 \text{ N}) \text{ sen } 60°\mathbf{j}\\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Recordando las relaciones (3.7) para los productos vectoriales de los vectores unitarios (sección 3.5), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} &= [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}]\\ &= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\\ &= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m}$ ↻ ◀

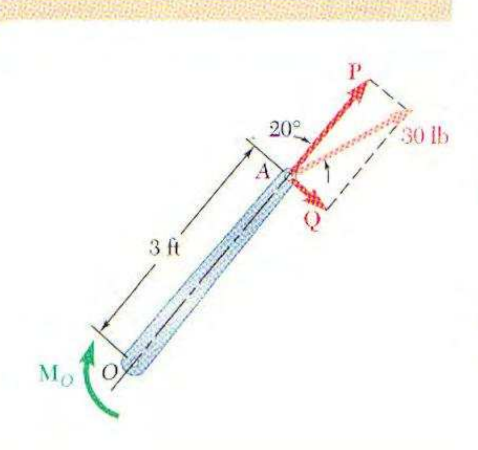
El momento $\mathbf{M}_B$ es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia *adentro* del plano del papel.



PROBLEMA RESUELTO 3.3

Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 3 ft, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a O.

SOLUCIÓN



La fuerza se reemplaza por dos componentes, una componente $\mathbf{P}$ en la dirección de OA y otra componente $\mathbf{Q}$ perpendicular a OA. Como O se encuentra en la línea de acción de $\mathbf{P}$, el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a O es igual a cero y el momento de la fuerza de 30 lb se reduce al momento de $\mathbf{Q}$, que tiene el sentido de las manecillas del reloj y, por consiguiente, se representa por un escalar negativo.

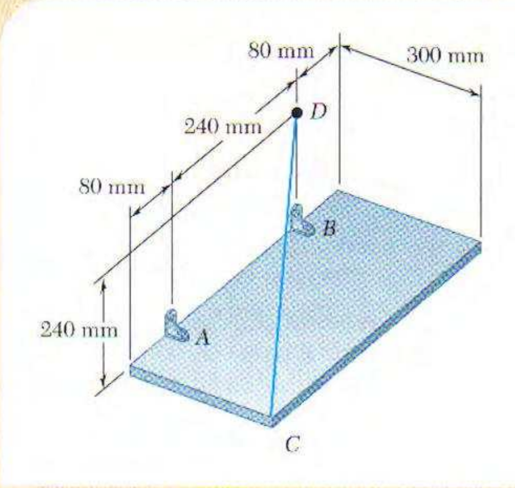
$$\begin{aligned}Q &= (30 \text{ lb}) \text{ sen } 20° = 10.26 \text{ lb}\\ M_O &= -Q(3 \text{ ft}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ ft}) = -30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}\end{aligned}$$

Como el valor obtenido para el escalar M_O es negativo, el momento $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *adentro* del plano del papel. Así, se escribe



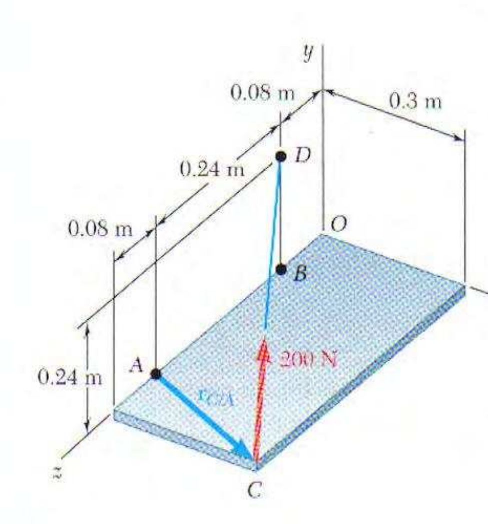
$\mathbf{M}_O = 30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ ↻ ◀

PROBLEMA RESUELTO 3.4



Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en A y B y por un alambre CD. Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C.

SOLUCIÓN



El momento $\mathbf{M}_A$ de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por el alambre en el punto C con respecto a A, se obtiene a partir del producto vectorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \tag{1}$$

donde $\mathbf{r}_{C/A}$ es el vector trazado desde A hasta C,

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k} \tag{2}$$

y $\mathbf{F}$ es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de CD. Al introducir el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$, se escribe

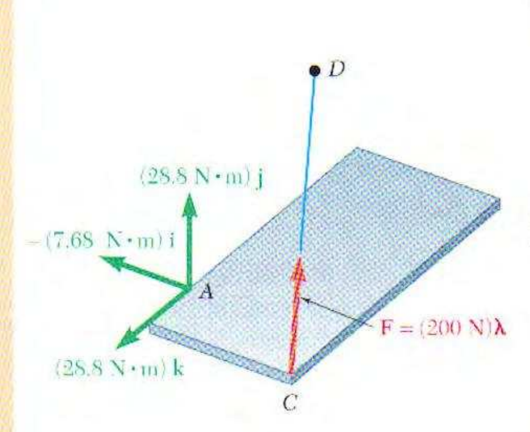
$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200 \text{ N}) \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \tag{3}$$

Al descomponer al vector $\overrightarrow{CD}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \qquad CD = 0.50 \text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}}[-(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k}]$$
$$= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \tag{4}$$



Sustituyendo $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{F}$ en la ecuación (1), a partir de las ecuaciones (2) y (4) y recordando las relaciones (3.7) de la sección 3.5, se obtiene

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$
$$= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i})$$
$$\mathbf{M}_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Solución alternativa. Como se mencionó en la sección 3.8, el momento $\mathbf{M}_A$ puede ser expresado en forma de determinante:

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentó el *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores. En los problemas que se presentan a continuación se puede utilizar el producto vectorial para calcular el *momento de una fuerza con respecto a un punto* y también, se puede utilizar dicho producto para determinar la *distancia perpendicular* desde un punto hasta una línea.

El momento de una fuerza **F** con respecto al punto O de un cuerpo rígido se definió como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

donde **r** es el vector de posición que va *desde O hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de **F**. Como el producto vectorial no es conmutativo, cuando se calcula un producto de este tipo es absolutamente necesario colocar a los vectores en el orden apropiado y que cada uno de dichos vectores tenga el sentido correcto. El momento $\mathbf{M}_O$ es importante puesto que su magnitud es una medida de la tendencia de la fuerza **F** para hacer que el cuerpo rígido rote alrededor de un eje dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$.

1. ***Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza en dos dimensiones.*** Se puede emplear uno de los siguientes procedimientos:

a) Usar la ecuación (3.12), $M_O = Fd$, la cual expresa la magnitud del momento como el producto de la magnitud de **F** y la *distancia perpendicular* d desde O hasta la línea de acción de **F** [problema resuelto 3.1].

b) Expresar a **r** y **F** en términos de sus componentes y evaluar formalmente el producto vectorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ [problema resuelto 3.2].

c) Descomponer a **F** en sus componentes paralela y perpendicular al vector de posición **r**, respectivamente. Sólo la componente perpendicular contribuye al momento de **F** [problema resuelto 3.3].

d) Usar la ecuación (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Cuando se aplica este método, el enfoque más simple consiste en tratar a las componentes escalares de **r** y **F** como si fueran positivas y, después, asignar por inspección el signo apropiado al momento producido por cada componente de la fuerza. Por ejemplo, al aplicar este método para resolver el problema resuelto 3.2, se observa que ambas componentes de la fuerza tienden a ocasionar una rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del punto B. Por tanto, el momento de cada fuerza con respecto a B debe ser representado por un escalar negativo. Entonces, se tiene que el momento total está dado por

$$M_B = -(0.16 \text{ m})(400 \text{ N}) - (0.20 \text{ m})(693 \text{ N}) = -202.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. ***Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza F en tres dimensiones.*** Con el método del problema resuelto 3.4, el primer paso del proceso consiste en seleccionar al vector de posición **r** que sea el más conveniente (el más simple). Después, se debe expresar a **F** en términos de sus componentes rectangulares. El último paso consiste en evaluar el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar el momento. En la mayoría de los problemas tridimensionales se encontrará que es más fácil calcular el producto vectorial con el uso de la forma de determinante.

3. ***Determinación de la distancia perpendicular d desde un punto A hasta una línea dada.*** Primero se supone que la fuerza **F** de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de la línea dada. Después se determina su momento con respecto a A formando el producto vectorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y calculándolo como se indicó anteriormente. Entonces, se calcula su magnitud M_A. Por último, se sustituyen los valores de F y M_A en la ecuación $M_A = Fd$ y se resuelve para d.

Problemas

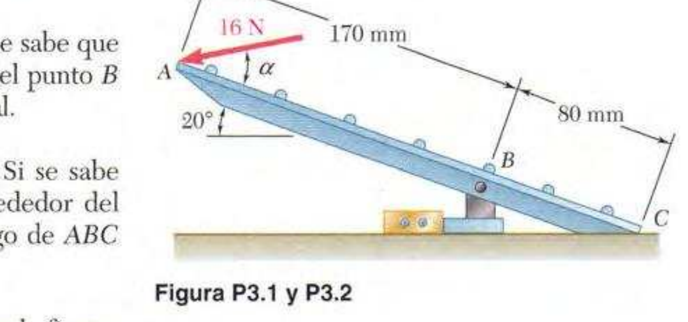


Figura P3.1 y P3.2

3.1 El pedal para un sistema neumático se articula en B. Si se sabe que $\alpha = 28°$, determine el momento de la fuerza de 16 N alrededor del punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

3.2 El pedal para un sistema neumático se articula en B. Si se sabe que $\alpha = 28°$, determine el momento de la fuerza de 16 N alrededor del punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes a lo largo de ABC y en la dirección perpendicular a ABC.

3.3 Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine *a*) el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D y *b*) la fuerza mínima aplicada en B que produce el mismo momento alrededor de D.

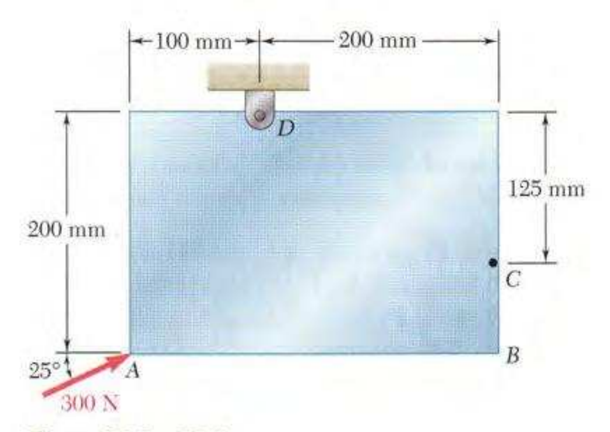
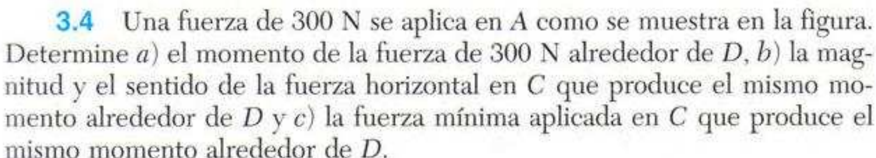
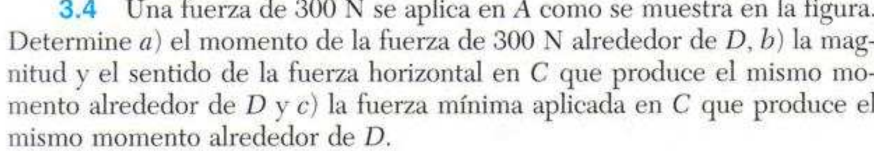


Figura P3.3 y P3.4

3.4 Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine *a*) el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D, *b*) la magnitud y el sentido de la fuerza horizontal en C que produce el mismo momento alrededor de D y *c*) la fuerza mínima aplicada en C que produce el mismo momento alrededor de D.

3.5 Una fuerza **P** de 8 lb se aplica a una palanca de cambios. Determine el momento de **P** alrededor de B cuando α es igual a 25°.

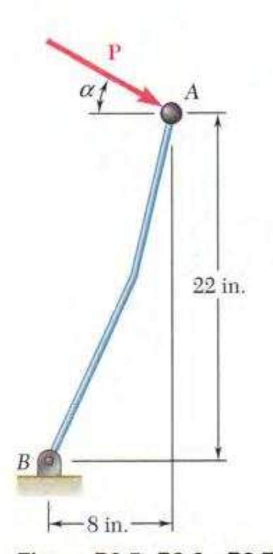
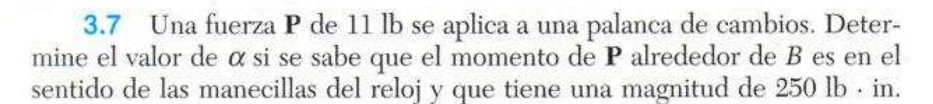


Figura P3.5, *P3.6* y P3.7

3.6 Para la palanca de cambios que se muestra en la figura, determine la magnitud y la dirección de la fuerza mínima **P**, que tiene un momento de 210 lb · in en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de B.



3.7 Una fuerza **P** de 11 lb se aplica a una palanca de cambios. Determine el valor de α si se sabe que el momento de **P** alrededor de B es en el sentido de las manecillas del reloj y que tiene una magnitud de 250 lb · in.

3.8 Se sabe que es necesaria una fuerza vertical de 200 lb para remover, de la tabla mostrada, el clavo que está en C. Un instante antes de que el clavo comience a moverse, determine *a*) el momento alrededor de B de la fuerza ejercida sobre el clavo, *b*) la magnitud de la fuerza **P** que genera el mismo momento alrededor de B si $\alpha = 10°$ y *c*) la fuerza **P** mínima que genera el mismo momento respecto de B.

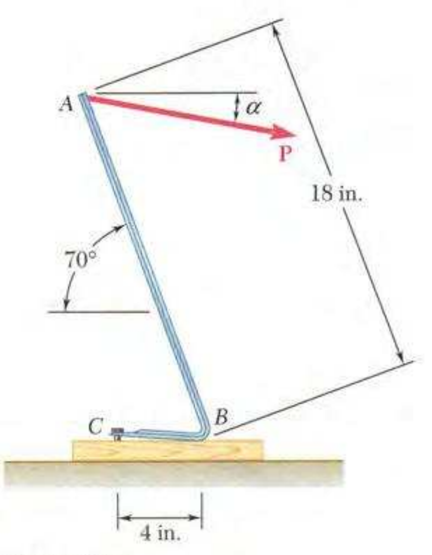


Figura *P3.8*

3.9 Un malacate AB se usa para tensar cables a un poste. Si se sabe que la tensión en el cable BC es de 1 040 N y que la longitud d es de 1.90 m, determine el momento respecto de D de la fuerza ejercida por el cable C. Para ello descomponga en sus componentes horizontal y vertical la fuerza aplicada en a) el punto C y b) el punto E.

3.10 Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de 960 N · m alrededor de D para tensar el cable al poste CD. Si d = 2.80 m, determine la tensión que debe desarrollarse en el cable del malacate AB para crear el momento requerido alrededor de D.

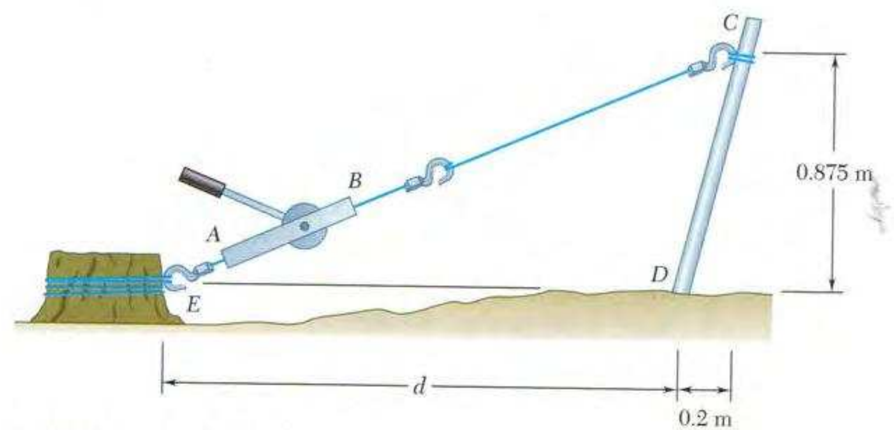


Figura P3.9, P3.10 y *P3.11*

3.11 Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de 960 N · m alrededor de D para tensar el cable al poste CD. Si la capacidad del malacate AB es de 2 400 N, determine el valor mínimo de la distancia d para generar el momento especificado respecto de D.

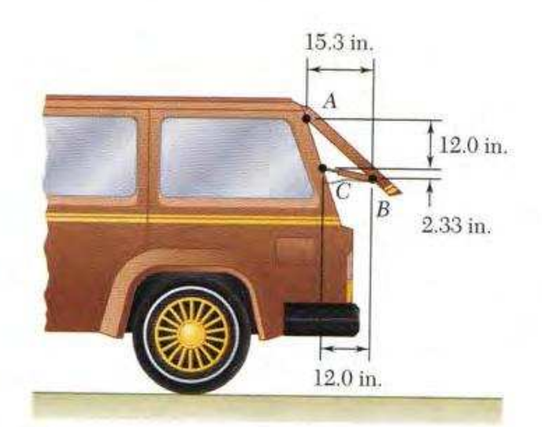


Figura P3.12

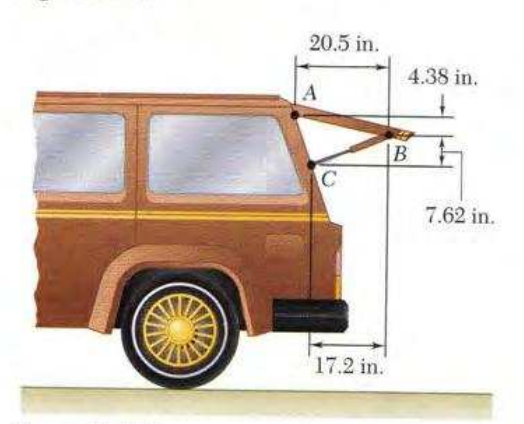


Figura P3.13

3.12 y 3.13 La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador BC que se muestra en la figura. Si para levantar la ventanilla se ejerce una fuerza de 125 lb cuya línea de acción pasa por el soporte de rótula en B, determine el momento de la fuerza alrededor de A.

3.14 Un mecánico automotriz usa un tramo de tubo AB como palanca para tensar la banda de la polea de un alternador. Cuando el técnico presiona hacia abajo en A, se ejerce una fuerza de 485 N sobre el alternador en B. Determine el momento de la fuerza respecto del perno C si su línea de acción debe pasar por O.

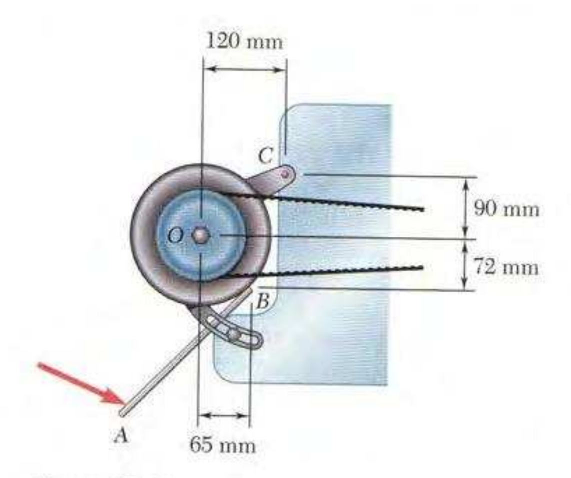


Figura *P3.14*

3.15 Obtenga los productos vectoriales $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, donde $B = B'$, y use los resultados obtenidos para comprobar la identidad

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} (\alpha - \beta).$$

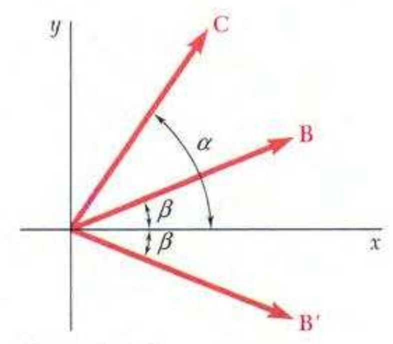


Figura P3.15

3.16 Una línea pasa a través de los puntos (20 m, 16 m) y (−1 m, −4 m). Determine la distancia perpendicular d medida desde la línea hasta el origen O del sistema coordenado.

3.17 Los vectores **P** y **Q** son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Determine el área del paralelogramo si *a*) $\mathbf{P} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{P} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

3.18 Los vectores **A** y **B** están contenidos en el mismo plano. Determine el vector unitario normal al plano si **A** y **B** son iguales, respectivamente, a *a*) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, *b*) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

3.19 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ que actúa en el punto A. Suponga que el vector de posición de A es *a*) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 2.5\mathbf{j} - 1.5\mathbf{k}$, *c*) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

3.20 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que actúa en el punto A. Suponga que el vector de posición de A es *a*) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, *c*) $\mathbf{r} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

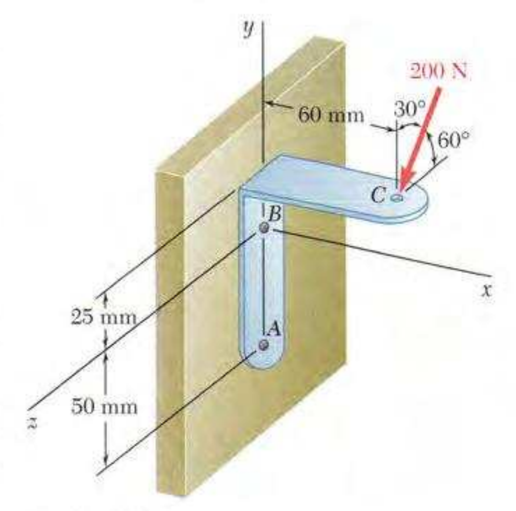


Figura P3.21

3.21 Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula ABC, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza alrededor de A.

3.22 Los cables AB y BC se sujetan al tronco de un árbol muy grande para evitar que se caiga. Si se sabe que las tensiones en los cables AB y BC son de 555 N y 660 N, respectivamente, determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida por los cables sobre el árbol en B.

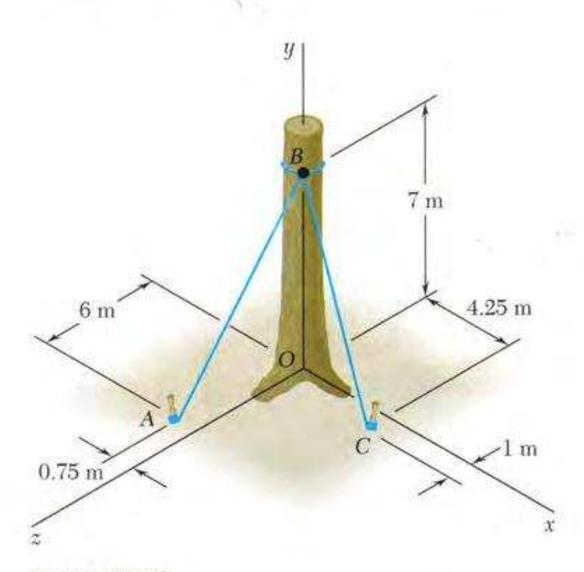


Figura P3.22

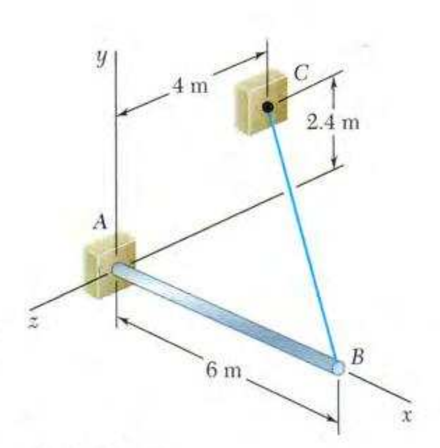


Figura *P3.23*

3.23 El aguilón AB de 6 m que se muestra en la figura tiene un extremo fijo A. Un cable de acero se estira desde el extremo libre B del aguilón hasta el punto C ubicado en la pared vertical. Si la tensión en el cable es de 2.5 kN, determine el momento alrededor de A de la fuerza ejercida por el cable en B.

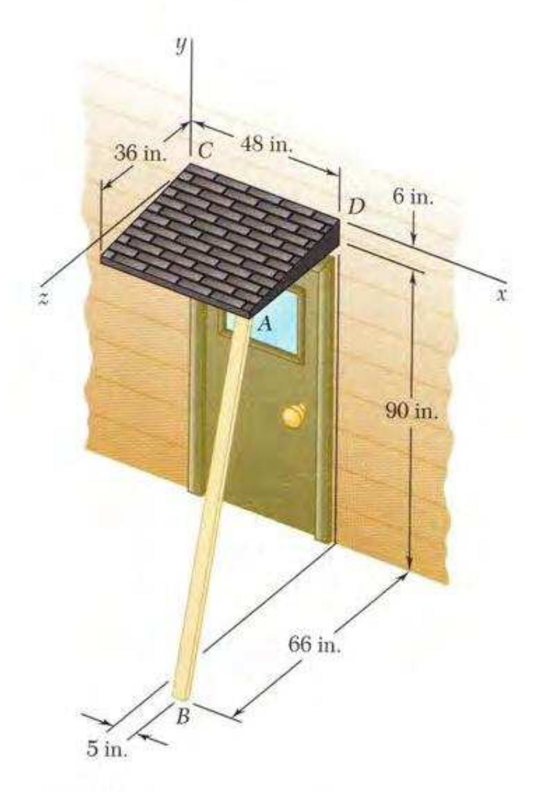


Figura P3.24

3.24 El puntal de madera AB se emplea temporalmente para sostener el techo en voladizo que se muestra en la figura. Si el puntal ejerce en A una fuerza de 57 lb dirigida a lo largo de BA, determine el momento de esta fuerza alrededor de C.

3.25 La rampa $ABCD$ se sostiene en las esquinas mediante cables en C y D. Si la tensión que se ejerce en cada uno de los cables es de 810 N, determine el momento alrededor de A de la fuerza ejercida por *a*) el cable en D, *b*) el cable en C.

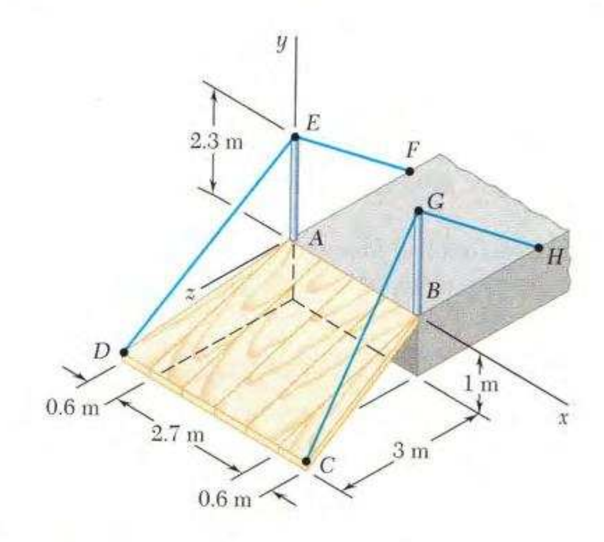


Figura *P3.25*

3.26 Una lancha pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. La tensión en la línea $ABAD$ es de 82 lb. Determine el momento alrededor de C de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$ ejercida sobre la grúa en A.

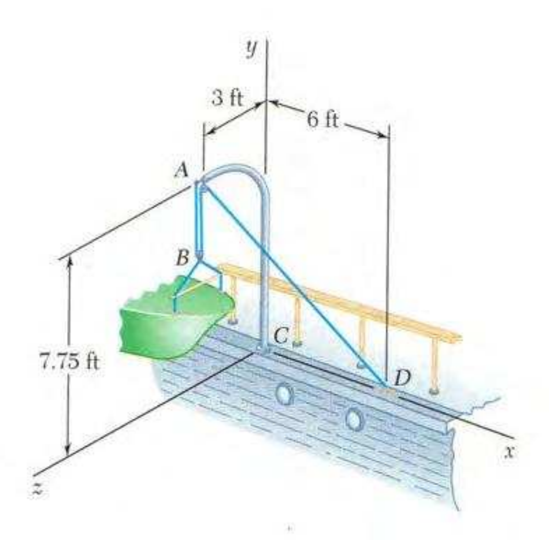


Figura P3.26

3.27 En el problema 3.22 determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el cable AB.

3.28 En el problema 3.22 determine la distancia perpendicular desde el punto *O* hasta el cable *BC*.

3.29 En el problema 3.24 determine la distancia perpendicular desde el punto *D* hasta una línea que pasa por los puntos *A* y *B*.

3.30 En el problema 3.24 determine la distancia perpendicular desde el punto *C* hasta una línea que pasa por los puntos *A* y *B*.

3.31 En el problema 3.25 determine la distancia perpendicular desde el punto *A* hasta la porción *DE* del cable *DEF*.

3.32 En el problema 3.25 determine la distancia perpendicular desde el punto *A* hasta una línea que pasa por los puntos *C* y *G*.

3.33 En el problema 3.26 determine la distancia perpendicular desde el punto *C* hasta la porción *AD* de la línea *ABAD*.

3.34 Determine el valor de *a* que minimiza la distancia perpendicular desde el punto *C* hasta la sección de tubería que pasa por los puntos *A* y *B*.

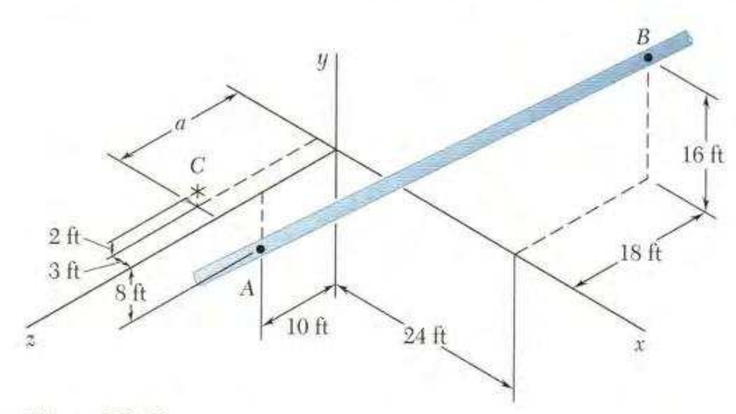


Figura *P3.34*

3.9. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El *producto escalar* de dos vectores **P** y **Q** se define como el producto de las magnitudes de **P** y **Q** y el coseno del ángulo θ formado por **P** y **Q** (figura 3.19). El producto escalar de **P** y **Q** se denota mediante **P · Q**. Entonces, se escribe

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \tag{3.24}$$

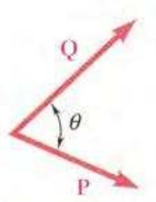


Figura 3.19

Advierta que la expresión recién definida no es un vector sino un *escalar*, lo cual explica el nombre de *producto escalar*; en virtud de la notación utilizada, **P · Q** también se conoce como el *producto punto* de los vectores **P** y **Q**.

A partir de su propia definición, se concluye que el producto escalar de dos vectores es *conmutativo*, esto es, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \tag{3.25}$$

Para demostrar que el producto escalar también es *distributivo*, se debe probar la relación

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \tag{3.26}$$

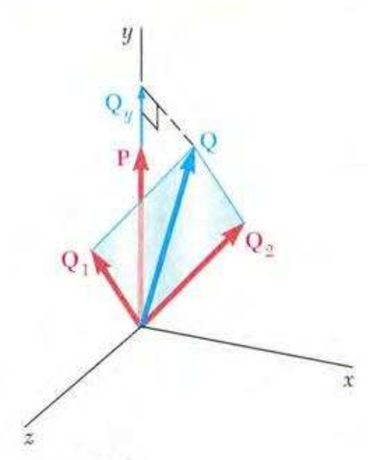


Figura 3.20

Sin perder la generalidad, se puede suponer que **P** está dirigido a lo largo del eje y (figura 3.20). Al denotar por **Q** la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$ y por θ_y el ángulo que forma **Q** con el eje y, el término del lado izquierdo de (3.26) se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \qquad (3.27)$$

donde Q_y es la componente y de **Q**. De manera similar, el término del lado derecho de (3.26) se puede expresar como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \qquad (3.28)$$

Debido a que **Q** es la suma de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$, su componente y debe ser igual a la suma de las componentes en y de $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_2$. Por tanto, las expresiones obtenidas en (3.27) y (3.28) son iguales, con lo que queda demostrada la relación (3.26).

En lo concerniente a la tercera propiedad —la propiedad asociativa— se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares. De hecho $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ no tiene ningún significado puesto que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores **P** y **Q** puede expresarse en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Descomponiendo a **P** y a **Q** en sus componentes se escribe primero

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}) \cdot (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se expresa como la suma de productos escalares, como $P_x\mathbf{i} \cdot Q_x\mathbf{i}$ y $P_x\mathbf{i} \cdot Q_y\mathbf{j}$. Sin embargo, a partir de la definición del producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a cero o a uno.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{array} \qquad (3.29)$$

Por tanto, la expresión obtenida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduce a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \qquad (3.30)$$

En el caso particular, cuando **P** y **Q** son iguales

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \qquad (3.31)$$

Aplicaciones

1. ***Ángulo formado por dos vectores dados.*** Considérese que los dos vectores están dados en términos de sus componentes:

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores, se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en (3.24) y (3.30) y se escribe

$$PQ \cos \theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

Despejando $\cos \theta$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ} \qquad (3.32)$$

2. *Proyección de un vector sobre un eje dado.* Considérese un vector **P** que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, OL (figura 3.21). La *proyección de* **P** *sobre el eje* OL se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \qquad (3.33)$$

Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto al valor de la longitud del segmento OA; ésta será positiva si OA tiene el mismo sentido que el eje OL, esto es, si θ es agudo, y negativa en caso contrario. Si **P** y OL forman un ángulo recto, la proyección de **P** sobre OL es cero.

Considere ahora un vector **Q** dirigido a lo largo de OL con el mismo sentido que OL (figura 3.22). El producto escalar de **P** y **Q** puede expresarse como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL}Q \qquad (3.34)$$

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{Q} \qquad (3.35)$$

En el caso particular, cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ (figura 3.23), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \qquad (3.36)$$

Al descomponer **P** y $\boldsymbol{\lambda}$ en sus componentes rectangulares y recordar, de la sección 2.12, que las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL, la proyección de **P** sobre OL se expresa como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \qquad (3.37)$$

donde θ_x, θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.

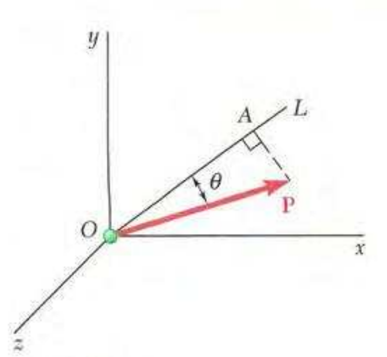


Figura 3.21

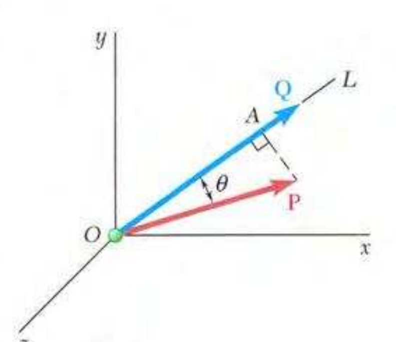


Figura 3.22

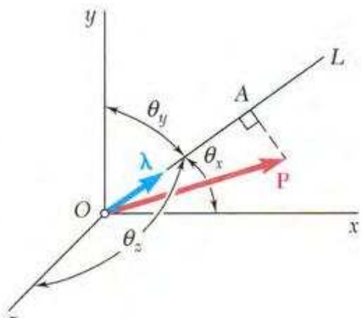


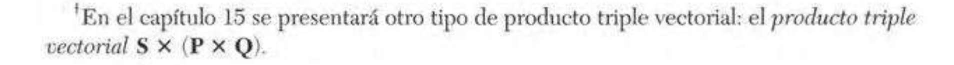
Figura 3.23

3.10. PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES

Se define al *producto triple escalar* o producto triple mixto de tres vectores **S**, **P** y **Q** como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.38)$$

la cual se obtiene formando el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q**.[†]


[†]En el capítulo 15 se presentará otro tipo de producto triple vectorial: el *producto triple vectorial* $\mathbf{S} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.

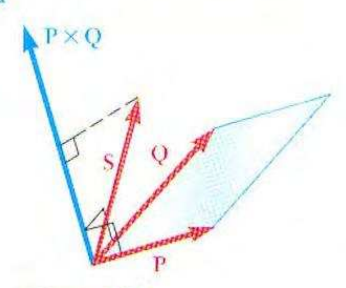


Figura 3.24

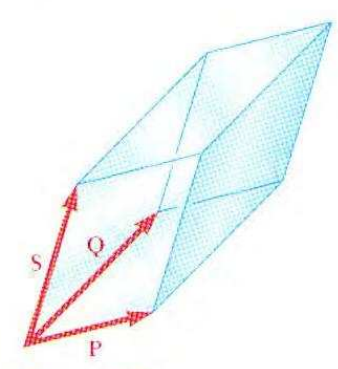


Figura 3.25

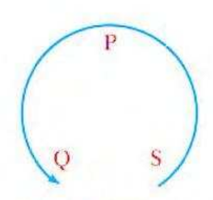


Figura 3.26

Al producto triple escalar de **S**, **P** y **Q** se le puede dar una interpretación geométrica simple (figura 3.24). En primer lugar, recuerde de la sección 3.4 que el vector **P** × **Q** es perpendicular al plano que contiene a **P** y a **Q** y que su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a **P** y a **Q**. Por otro lado, la ecuación (3.34) indica que el producto escalar de **S** y **P** × **Q** se puede obtener multiplicando la magnitud de **P** × **Q** (esto es, el área del paralelogramo definido por **P** y **Q**) por la proyección de **S** sobre el vector **P** × **Q** (esto es, por la proyección de **S** sobre la normal al plano que contiene al paralelogramo). Por tanto, el producto triple escalar es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores **S**, **P** y **Q** (figura 3.25). Se debe señalar que el signo del producto triple escalar será positivo si **S**, **P** y **Q** forman una tríada a mano derecha, y será negativo si éstos forman una tríada a mano izquierda [esto es, **S** · (**P** × **Q**) será negativo si se observa desde el extremo terminal de **S**, que la rotación que hace a **P** colineal con **Q** va en el sentido de las manecillas del reloj]. El producto triple escalar será igual a cero si **S**, **P** y **Q** son coplanares.

Como el paralelepípedo definido en el párrafo anterior es independiente del orden en que se tomen los tres vectores, todos los seis productos triples escalares que se pueden formar con **S**, **P** y **Q** tendrán el mismo valor absoluto, pero no el mismo signo. Se puede demostrar fácilmente que

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) &= \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{S}) = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{P})\\ &= -\mathbf{S}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}) = -\mathbf{P}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{Q}) = -\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{S})\end{aligned} \tag{3.39}$$

Ordenando las letras que representan a los tres vectores en un círculo y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.26), se observa que el signo del producto triple escalar permanece inalterado si se permutan los vectores en forma tal que éstos todavía se puedan leer en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se dice que una permutación de este tipo es una *permutación circular*. También, a partir de la ecuación (3.39) y de la propiedad conmutativa de los productos escalares, se concluye que el producto triple escalar de **S**, **P** y **Q** se puede definir tan bien con **S** · (**P** × **Q**) como con (**S** × **P**) · **Q**.

El producto triple escalar de los vectores **S**, **P** y **Q** puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de estos vectores. Denotando a **P** × **Q** con **V** y con la fórmula (3.30) para expresar el producto escalar de **S** y **V**, se escribe

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{V} = S_xV_x + S_yV_y + S_zV_z$$

Si se sustituyen las componentes de **V** a partir de las relaciones (3.9), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = S_x(P_yQ_z - P_zQ_y) &+ S_y(P_zQ_x - P_xQ_z)\\ &+ S_z(P_xQ_y - P_yQ_x)\end{aligned} \tag{3.40}$$

Esta expresión se puede escribir en forma más compacta si se observa que representa la expansión de un determinante:

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

Aplicando las reglas que gobiernan a la permutación de renglones en un determinante, pueden verificarse fácilmente las relaciones (3.39) que fueron derivadas a partir de consideraciones geométricas.

3.11. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

Ahora que se ha incrementado el conocimiento del álgebra vectorial, se puede introducir un nuevo concepto: *momento de una fuerza con respecto a un eje*. Considérese nuevamente la fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido y el momento $\mathbf{M}_O$ de dicha fuerza con respecto a O (figura 3.27). Sea OL un eje a través de O; *el momento* M_{OL} *de* **F** *con respecto a* OL *se define como la proyección* OC *del momento* $\mathbf{M}_O$ *sobre el eje* OL. Representando al vector unitario a lo largo de OL como $\boldsymbol{\lambda}$ y recordando, de las secciones 3.9 y 3.6, respectivamente, las expresiones (3.36) y (3.11) obtenidas para la proyección de un vector sobre un eje dado y para el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza **F**, se escribe

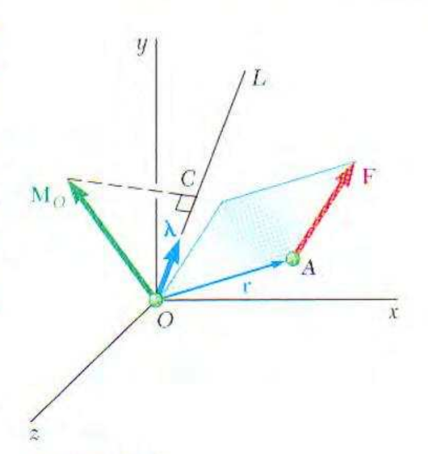


Figura 3.27

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

lo cual demuestra que el momento M_{OL} de **F** con respecto al eje OL es el escalar que se obtiene formando el producto triple escalar de $\boldsymbol{\lambda}$, **r** y **F**. Expresando a M_{OL} en forma de determinante, se escribe

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de **F**
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

El significado físico del momento M_{OL} de una fuerza **F** con respecto al eje fijo OL se vuelve más evidente si se descompone a **F** en dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con $\mathbf{F}_1$ paralela a OL y $\mathbf{F}_2$, contenida en un plano P perpendicular a OL (figura 3.28). En forma similar, descomponiendo a **r** en dos componentes $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ y sustituyendo a **F** y a **r** en (3.42), se escribe

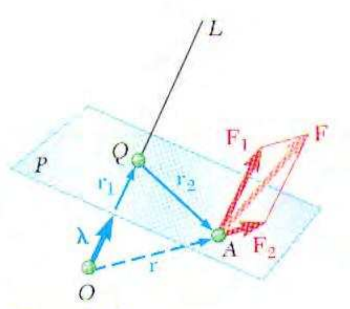


Figura 3.28

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Con excepción del último término del lado derecho, todos los productos triples escalares son iguales a cero, puesto que involucran a vectores que son coplanares cuando se trazan a partir de un origen común (sección 3.10), se tiene

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \tag{3.44}$$

El producto vectorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ es perpendicular al plano P y representa el momento de la componente $\mathbf{F}_2$ de **F** con respecto al punto Q donde OL interseca a P. Por tanto, el escalar M_{OL}, el cual será positivo si $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ y OL tienen el mismo sentido y negativo en caso contrario, mide la tendencia de $\mathbf{F}_2$ a hacer rotar el cuerpo rígido alrededor de OL. Como la otra componente $\mathbf{F}_1$ de **F** no tiende a hacer rotar el cuerpo alrededor de OL, se concluye que *el momento* M_{OL} *de* **F** *con respecto a* OL *mide la tendencia de la fuerza* **F** *de impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor del eje fijo* OL.

A partir de la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje, se concluye que el momento de **F** con respecto a un eje coordenado es igual a la componente de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de dicho eje. Al sustituir $\boldsymbol{\lambda}$ de manera sucesiva en la ecuación (3.42) por cada uno de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se observa que las expresiones así obtenidas para los *momentos de* **F** *con respecto a los ejes coordenados* son iguales, respectivamente, a las expresiones obtenidas en la sección 3.8 para las componentes del momento $\mathbf{M}_O$ de **F** con respecto a O:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se aprecia que de la misma forma que las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido miden, respectivamente, la tendencia de **F** a mover el cuerpo rígido en las direcciones de x, y y z, los momentos M_x, M_y y M_z de **F** con respecto a los ejes coordenados miden, respectivamente, la tendencia de **F** a impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x, y y z.

En general, el momento de una fuerza **F** aplicada en A con respecto a un eje que no pasa a través del origen, se obtiene seleccionando un punto arbitrario B sobre dicho eje (figura 3.29) y determinando la proyección sobre el eje BL del momento $\mathbf{M}_B$ de **F** con respecto a B. Entonces, se escribe

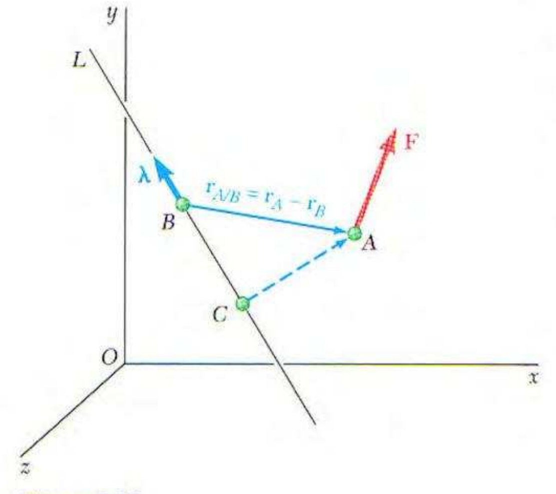


Figura 3.29

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector trazado desde B hasta A. Expresando a M_{BL} en forma de determinante, se tiene

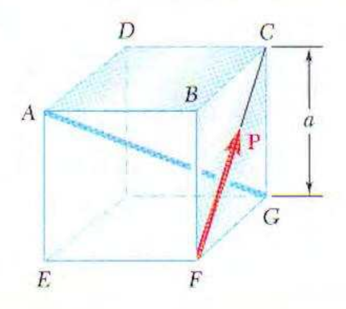
$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje BL
$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$
F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza **F**

Se debe observar que el resultado obtenido es independiente del punto B seleccionado sobre el eje dado. De hecho, denotando con M_{CL} el resultado obtenido con un punto C diferente, se tiene

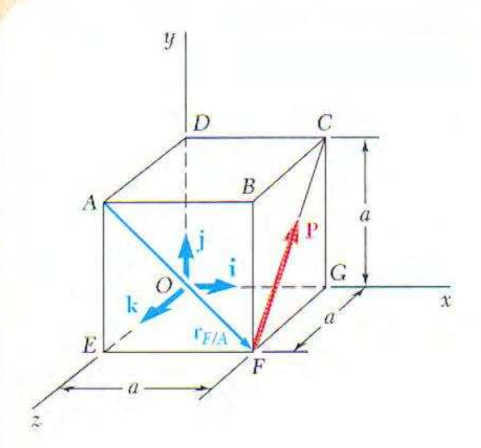
$$\begin{aligned} M_{CL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Pero como los vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ son colineales, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ y **F** es igual a cero, al igual que el producto triple escalar de dichos vectores (sección 3.10). Entonces, la expresión obtenida para M_{CL} se reduce a su primer término, el cual es la expresión empleada anteriormente para definir a M_{BL}. De manera adicional, a partir de la sección 3.6 se concluye que cuando se calcula el momento de **F** con respecto a un eje dado, A puede ser cualquier punto a lo largo de la línea de acción de **F**.



PROBLEMA RESUELTO 3.5

Sobre el cubo de lado a actúa una fuerza $\mathbf{P}$, como se muestra en la figura. Determine el momento de $\mathbf{P}$: *a*) con respecto a A, *b*) con respecto a la arista AB y *c*) con respecto a la diagonal AG del cubo; *d*) con el resultado del inciso *c*), determine la distancia perpendicular entre AG y FC.



SOLUCIÓN

***a*) Momento con respecto a *A*.** Al seleccionar los ejes x, y y z como se muestra en la figura, la fuerza $\mathbf{P}$ y el vector $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$, trazado desde A hasta el punto de aplicación F de $\mathbf{P}$, se descomponen en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a A es igual a

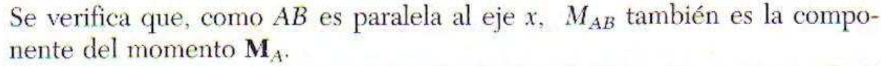
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad ◀$$

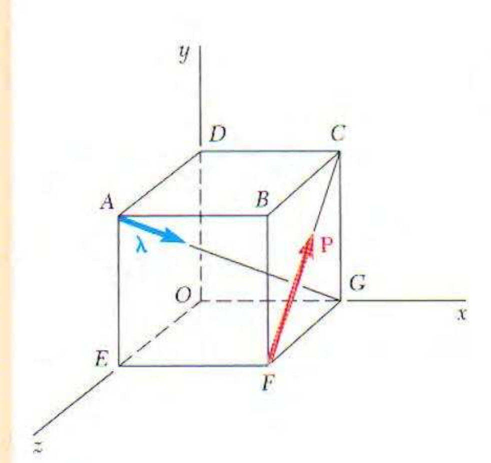
***b*) Momento con respecto a *AB*.** Proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AB, se escribe

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

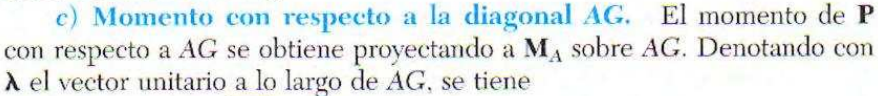
$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad ◀$$



Se verifica que, como AB es paralela al eje x, M_{AB} también es la componente del momento $\mathbf{M}_A$.



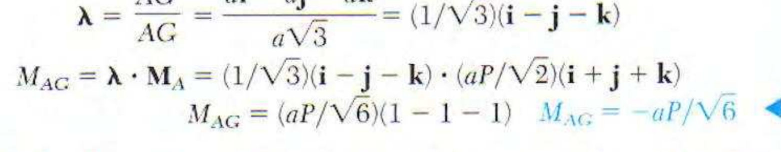
***c*) Momento con respecto a la diagonal *AG*.** El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG se obtiene proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AG. Denotando con $\boldsymbol{\lambda}$ el vector unitario a lo largo de AG, se tiene



$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

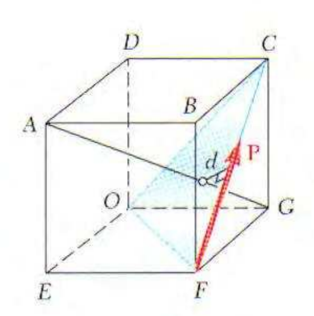
$$M_{AG} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad ◀$$



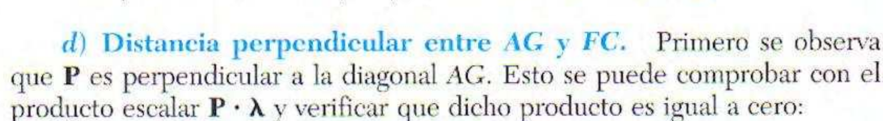
Método alternativo. El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG también se puede expresar en forma de determinante:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$



***d*) Distancia perpendicular entre *AG* y *FC*.** Primero se observa que $\mathbf{P}$ es perpendicular a la diagonal AG. Esto se puede comprobar con el producto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ y verificar que dicho producto es igual a cero:

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$



Entonces, el momento M_{AG} puede ser expresado como $-Pd$, donde d es la distancia perpendicular desde AG hasta FC. (El signo negativo se usa puesto que para un observador ubicado en G, la rotación impartida al cubo por $\mathbf{P}$ tiene el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.) Recordando el valor encontrado para M_{AG} en el inciso *c*), se tiene

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \qquad d = a/\sqrt{6} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta sección, se aplicará el *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores para determinar el *ángulo formado por dos vectores dados* y para *determinar la proyección de una fuerza sobre un eje dado*. También se utilizará el *producto triple escalar* de tres vectores para encontrar el *momento de una fuerza con respecto a un eje dado* y para *determinar la distancia perpendicular entre dos líneas.*

1. *Cálculo del ángulo formado por dos vectores dados.* Primero se expresa cada uno de los vectores en términos de sus componentes y se determinan las magnitudes de los dos vectores. Después, se obtiene el coseno del ángulo buscado con la división del producto escalar de los dos vectores entre el producto de sus respectivas magnitudes [ecuación (3.32)].

2. *Cálculo de la proyección de un vector P sobre un eje dado OL.* En general, se comienza con la expresión en términos de sus componentes de $\mathbf{P}$ y del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ que define la dirección del eje. Se debe tener cuidado de que $\boldsymbol{\lambda}$ tenga el sentido correcto (esto es, de que $\boldsymbol{\lambda}$ esté dirigido desde O hasta L). Entonces, la proyección buscada es igual al producto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$. Sin embargo, si se conoce el ángulo θ que forman $\mathbf{P}$ y $\boldsymbol{\lambda}$, la proyección también se puede calcular como $P \cos \theta$.

3. *Determinación del momento M_{OL} de una fuerza con respecto a un eje dado OL.* Se definió a M_{OL} como

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario a lo largo de OL y $\mathbf{r}$ es el vector de posición *desde cualquier punto* sobre la línea OL *hasta cualquier punto* sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$. Como fue el caso para el momento de una fuerza con respecto a un punto, elegir el vector de posición más conveniente simplificará los cálculos. Además, también se debe recordar la advertencia de la lección anterior: los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ deben tener el sentido correcto y ser colocados en la fórmula en el orden apropiado. El procedimiento que se debe seguir cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un eje se ilustra en el inciso *c*) del problema resuelto 3.5. Los dos pasos esenciales en este procedimiento son: expresar primero a $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes rectangulares para después evaluar el producto triple escalar $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ con el fin de determinar el momento con respecto al eje. En la mayoría de los problemas tridimensionales, la forma más conveniente para calcular el producto triple escalar es emplear un determinante.

Como se mencionó anteriormente, cuando $\boldsymbol{\lambda}$ está dirigido a lo largo de uno de los ejes coordenados, M_{OL} es igual al componente escalar de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de ese eje.

4. Determinación de la distancia perpendicular entre dos líneas. Se debe recordar que la componente perpendicular $\mathbf{F}_2$ de la fuerza **F** es la que tiende a hacer que el cuerpo rígido gire alrededor de un eje dado *OL* (figura 3.28). Entonces se concluye que

$$M_{OL} = F_2 d$$

donde M_{OL} es el momento de **F** alrededor del eje *OL* y *d* es la distancia perpendicular entre *OL* y la línea de acción de **F**. Esta última ecuación proporciona una técnica simple para determinar *d*. Primero, supóngase que la fuerza **F** de magnitud conocida *F* se encuentra a lo largo de una de las líneas dadas y que el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ se ubica a lo largo de la otra línea. Después, calcule el momento M_{OL} de la fuerza **F** con respecto a la segunda línea con el método que se presentó en los párrafos anteriores. La magnitud de la componente paralela de **F**, F_1, se obtiene utilizando el producto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

El valor de F_2 se determina a partir de

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Por último, se sustituyen los valores de M_{OL} y F_2 en la ecuación $M_{OL} = F_2 d$ y se resuelve para *d*.

Ahora se puede comprender que el cálculo de la distancia perpendicular en el inciso *d*) del problema resuelto 3.5 se simplificó debido a que **P** era perpendicular a la diagonal *AG*. Como, en general, las dos líneas dadas no serán perpendiculares, la técnica recién descrita se debe emplear cuando se desee determinar la distancia perpendicular entre ellas.

Problemas

Figura P3.36

3.35 Dados los vectores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule los productos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ y $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

3.36 Obtenga los productos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{B'} \cdot \mathbf{C}$, donde $B = B'$, y utilice los resultados obtenidos para demostrar la identidad

$$\cos \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2} \cos (\alpha - \beta).$$

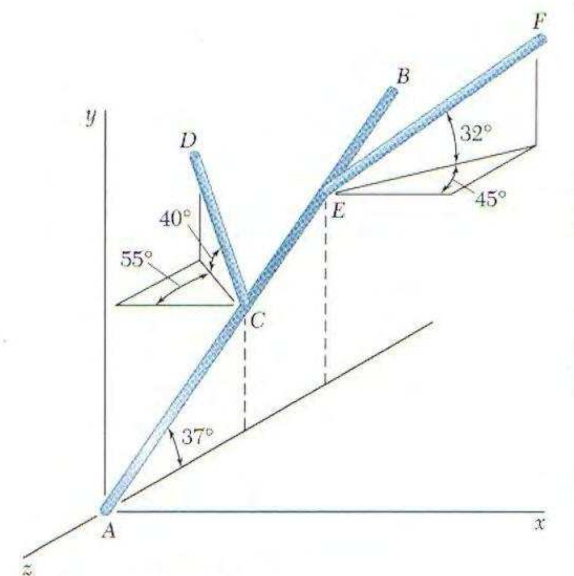


Figura P3.37 y *P3.38*

3.37 La sección AB de una tubería se encuentra en el plano yz y forma un ángulo de 37° con el eje z. Las líneas ramales CD y EF se unen a AB como se muestra en la figura. Determine el ángulo que forman los tubos AB y CD.

3.38 La sección AB de una tubería se encuentra en el plano yz y forma un ángulo de 37° con el eje z. Las líneas ramales CD y EF se unen a AB como se muestra en la figura. Determine el ángulo que forman los tubos AB y EF.

3.39 Determine el ángulo formado por los tirantes AB y AC de la red de voleibol que se muestra en la figura.

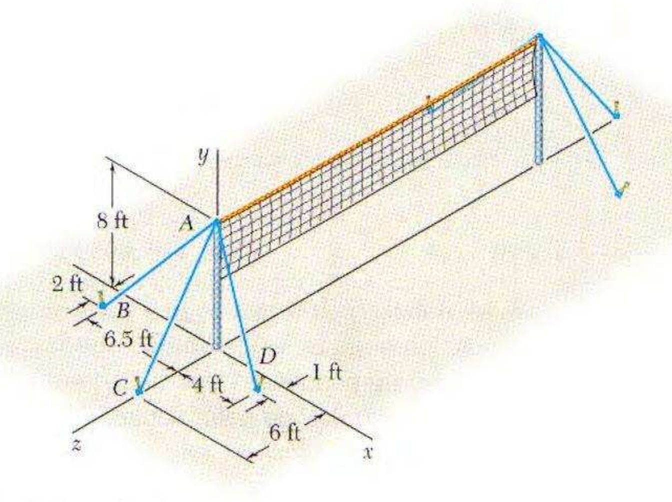


Figura P3.39 y P3.40

3.40 Determine el ángulo formado por los tirantes AC y AD de la red de voleibol que se muestra en la figura.

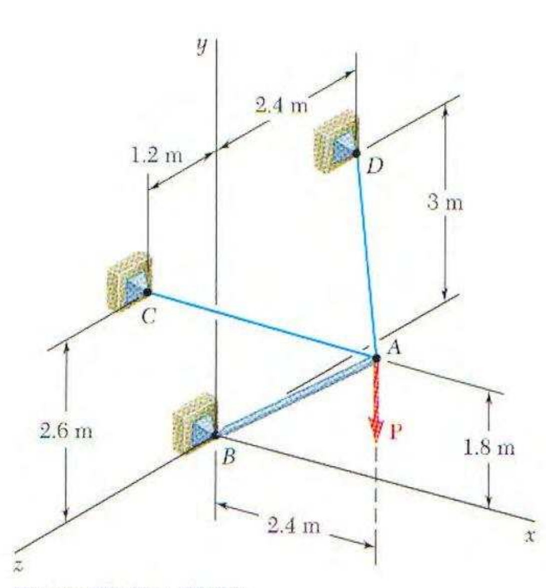


Figura P3.41 y *P3.42*

3.41 Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 1 260 N, determine *a*) el ángulo entre el cable AC y el aguilón AB, *b*) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AC en el punto A.

3.42 Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 405 N, determine *a*) el ángulo entre el cable AD y el aguilón AB, *b*) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AD en el punto A.

3.43 El collarín P se puede mover a lo largo de la barra OA. Una cuerda elástica PC está unida al collarín y al elemento vertical BC. Si se sabe que la distancia del punto O al punto P es de 6 in. y que la tensión en la cuerda es de 3 lb, determine *a*) el ángulo entre la cuerda elástica y la barra OA y *b*) la proyección sobre OA de la fuerza ejercida por la cuerda PC en el punto P.

3.44 El collarín P se puede mover a lo largo de la barra OA. Una cuerda elástica PC está unida al collarín y al elemento vertical BC. Determine la distancia de O a P para la cual la cuerda PC y la barra OA son mutuamente perpendiculares.

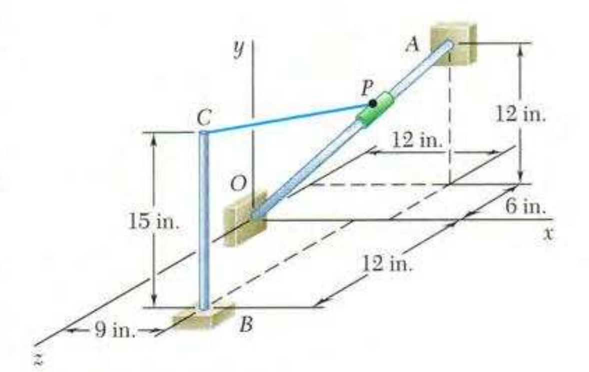


Figura P3.43 y P3.44

3.45 Determine el volumen del paralelepípedo de la figura 3.25 si *a*) $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{P} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3.46 Dados los vectores $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, y $\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determine el valor de S_x para el cual los tres vectores son coplanares.

3.47 La tapa $ABCD$ de un baúl de 0.61×1.00 m tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierta mediante una cuerda DEC que pasa sobre un gancho en E sin fricción. Si la tensión de la cuerda es de 66 N, determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en D respecto de cada uno de los ejes coordenados.

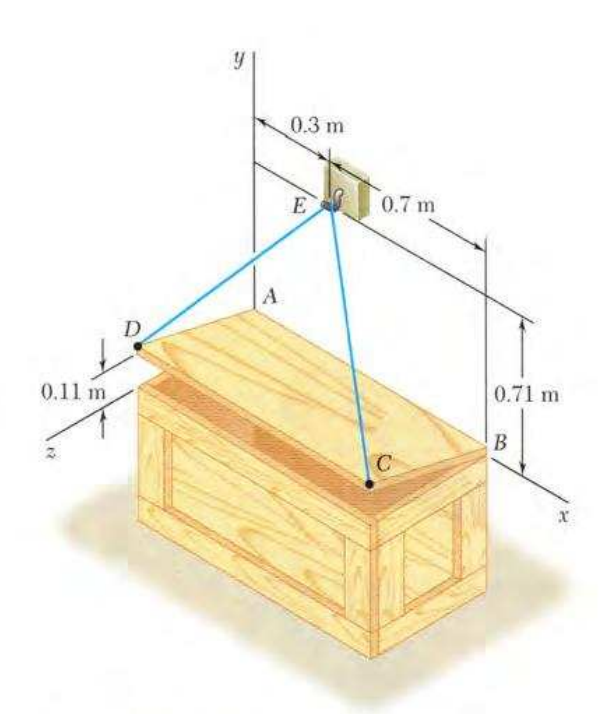


Figura P3.47 y P3.48

3.48 La tapa $ABCD$ de un baúl de 0.61×1.00 m tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierta mediante una cuerda DEC que pasa sobre un gancho en E sin fricción. Si la tensión de la cuerda es de 66 N, determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en C respecto de cada uno de los ejes coordenados.

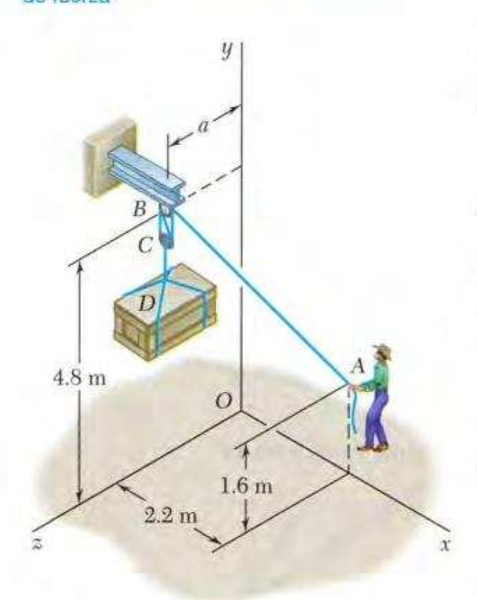


Figura P3.49 y P3.50

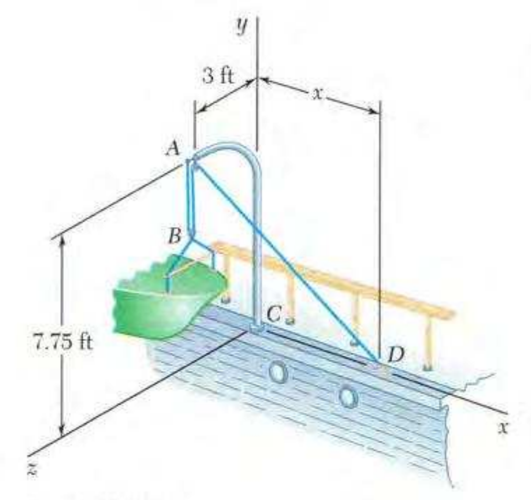


Figura P3.51

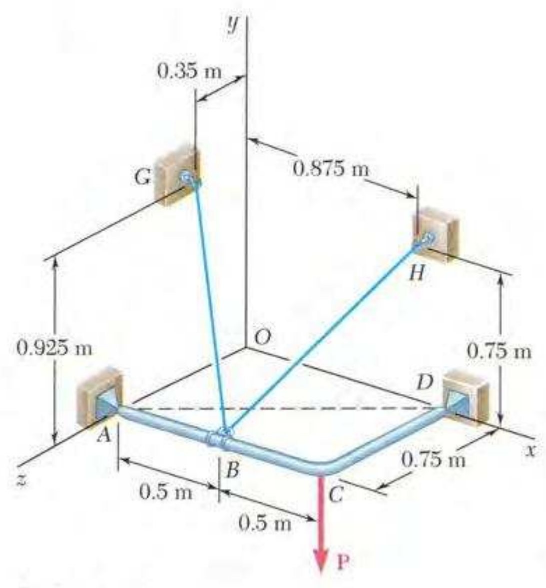


Figura P3.55

3.49 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto y los sujeta a la parte inferior de la viga I mediante el gancho B. Si se sabe que los momentos, de los ejes y y z, de la fuerza ejercida en B por el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de 120 N · m y –460 N · m, determine la distancia a.

3.50 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto y los sujeta a la parte inferior de la viga I mediante el gancho B. Si se sabe que el hombre aplica una fuerza de 195 N al extremo A de la cuerda y que el momento de esa fuerza alrededor del eje y es de 132 N · m, determine la distancia a.

3.51 Una lancha pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. Se sabe que el momento alrededor del eje z de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$ ejercida sobre la grúa en A no debe exceder 279 lb · ft en valor absoluto. Determine la máxima tensión permisible en la línea $ABAD$ cuando $x = 6$ ft.

3.52 Para la grúa del problema 3.51, determine la máxima distancia permisible x cuando la tensión en la línea $ABAD$ es de 60 lb.

3.53 Para aflojar una válvula congelada, se aplica una fuerza **F** sobre la manivela con una magnitud de 70 lb. Si se sabe que $\theta = 25°$, $M_x = -61$ lb · ft y $M_z = -43$ lb · ft, determine ϕ y d.

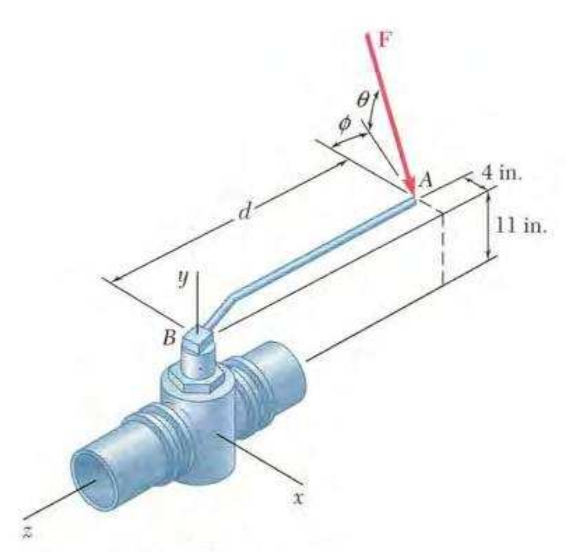


Figura P3.53 y *P3.54*

3.54 Cuando se aplica una fuerza **F** sobre la manivela de la válvula mostrada en la figura, sus momentos alrededor de los ejes x y z son $M_x = -77$ lb · ft y $M_z = -81$ lb · ft, respectivamente. Si $d = 27$ in., determine el momento M_y de **F** alrededor del eje y.

3.55 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene por medio de un cable, el cual pasa a través de un anillo en B y está unido a los ganchos en G y H. Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N, determine el momento respecto de la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.

3.56 En el problema 3.55 determine el momento respecto de la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BG del cable.

3.57 La placa triangular ABC se sostiene mediante soportes de rótula en B y D y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF. Si la fuerza ejercida por el cable AE en A es de 55 N, determine el momento de esa fuerza respecto de la línea que une los puntos D y B.

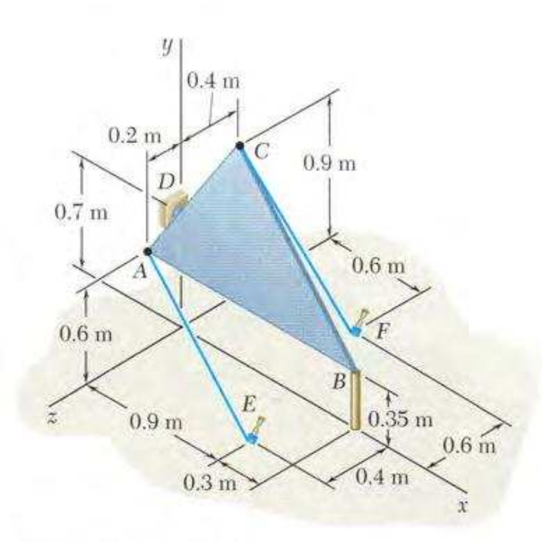


Figura P3.57 y P3.58

3.58 La placa triangular ABC se sostiene mediante soportes de rótula en B y D y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF. Si la fuerza ejercida por el cable CF en C es de 33 N, determine el momento de esa fuerza respecto de la línea que une los puntos D y B.

3.59 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a. Si una fuerza **P** se aplica a lo largo del borde BC como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza **P** alrededor del borde OA.

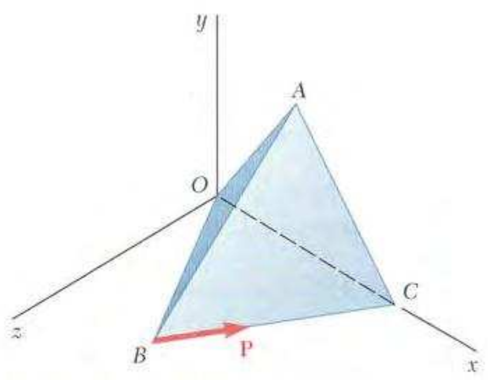


Figura P3.59 y *P3.60*

3.60 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a. *a*) Demuestre que dos bordes opuestos, como OA y BC, son perpendiculares entre sí. *b*) Use esta propiedad y el resultado obtenido en el problema 3.59 para determinar la distancia perpendicular entre los bordes OA y BC.

3.61 Un letrero erigido sobre suelo irregular se sostiene mediante los cables atirantados *EF* y *EG*. Si la fuerza ejercida por el cable *EF* en *E* es de 46 lb, determine el momento de esa fuerza alrededor de la línea que une los puntos *A* y *D*.

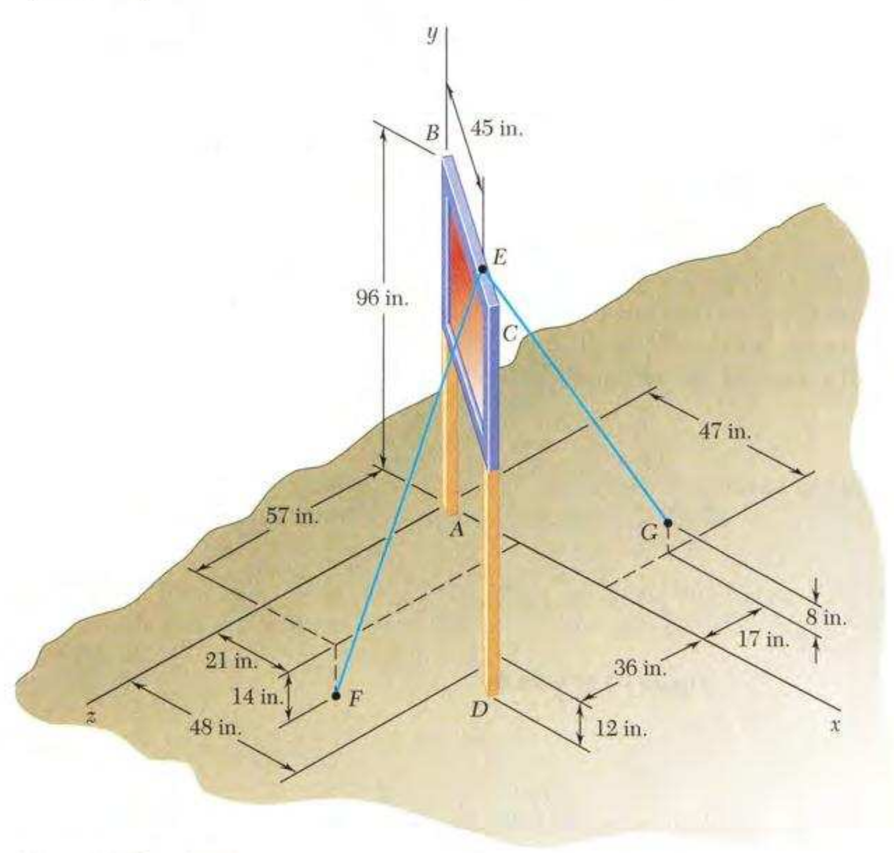


Figura P3.61 y *P3.62*

3.62 Un letrero erigido sobre suelo irregular se sostiene mediante los cables atirantados *EF* y *EG*. Si la fuerza ejercida por el cable *EG* en *E* es de 54 lb, determine el momento de esa fuerza alrededor de la línea que une los puntos *A* y *D*.

3.63 Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en el espacio tienen la misma magnitud *F*. Demuestre que el momento de $\mathbf{F}_1$ alrededor de la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ es igual al momento de $\mathbf{F}_2$ alrededor de la línea de acción de $\mathbf{F}_1$.

3.64 En el problema 3.55 determine la distancia perpendicular entre el tramo *BH* del cable y la diagonal *AD*.

***3.65** En el problema 3.56 determine la distancia perpendicular entre el tramo *BG* del cable y la diagonal *AD*.

***3.66** En el problema 3.57 determine la distancia perpendicular entre el cable *AE* y la línea que une los puntos *D* y *B*.

3.67 En el problema 3.58 determine la distancia perpendicular entre el cable *CF* y la línea que une los puntos *D* y *B*.

***3.68** En el problema 3.61 determine la distancia perpendicular entre el cable *EF* y la línea que une los puntos *A* y *D*.

***3.69** En el problema 3.62 determine la distancia perpendicular entre el cable *EG* y la línea que une los puntos *A* y *D*.

3.12. MOMENTO DE UN PAR

Se dice que *dos fuerzas* **F** *y* −**F** *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* (figura 3.30). Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originarán una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, éstas sí tenderán a hacerlo rotar.

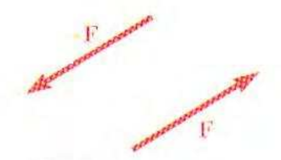


Figura 3.30

Al representar con $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de **F** y −**F** (figura 3.31), se encuentra que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

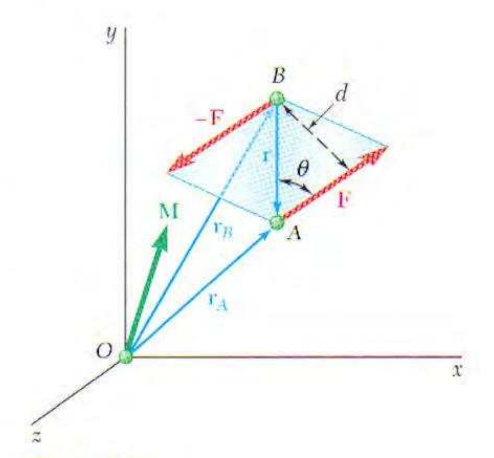


Figura 3.31

Si se define $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, donde **r** es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de **F** y −**F**, con respecto a O, está representado por el vector

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.47}$$

El vector **M** se conoce como el *momento del par*; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por

$$M = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.48}$$

donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de **F** y −**F**. El sentido de **M** está definido por la regla de la mano derecha.

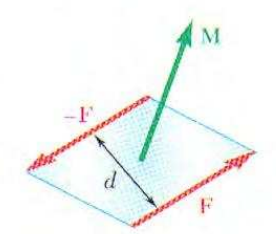


Figura 3.32

Como el vector **r** en (3.47) es independiente de la elección del origen O de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de **F** y −**F** se hubieran calculado con respecto a un punto O'. Por tanto, el momento **M** de un par es un *vector libre* (sección 2.3) que puede ser aplicado en cualquier punto (figura 3.32).

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$, y el otro constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.33) tendrán momentos iguales si

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \tag{3.49}$$

y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido.

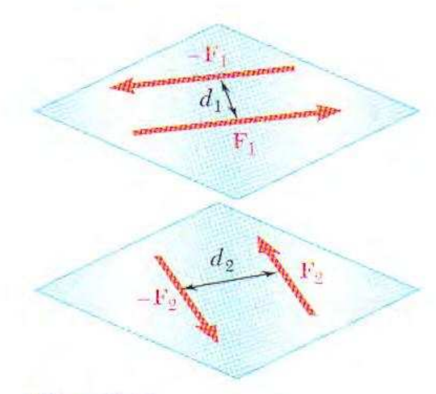


Figura 3.33



Fotografía 3.1 Las fuerzas paralelas de igual magnitud ejercidas hacia arriba y hacia abajo sobre los brazos de la cruceta, son ejemplo de un par.

3.13. PARES EQUIVALENTES

La figura 3.34 muestra tres pares que actúan de manera sucesiva sobre la misma caja rectangular. Como se vio en la sección anterior, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento **M** (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120$ lb · in.), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.

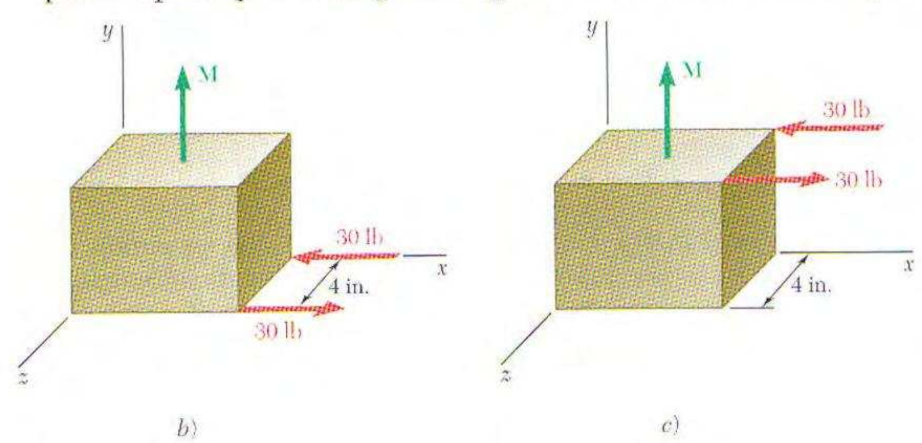


Figura 3.34

Por más razonable que parezca esta conclusión, no debe aceptarse de inmediato. Aunque la intuición es de gran ayuda en el estudio de la mecánica, no debe ser aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de establecer que dos sistemas (o grupos) de fuerzas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido, esto debe demostrarse con base en la evidencia experimental que se ha presentado hasta este momento. Esta evidencia consiste en la ley del paralelogramo para la suma de dos fuerzas (sección 2.2) y en el principio de transmisibilidad (sección 3.3). Por tanto, se establecerá que *dos sistemas de fuerzas equivalentes* (esto es, que dichos sistemas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido) *sí pueden transformar a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operaciones*: 1) reemplazar dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante, 2) descomponer a una fuerza en dos componentes, 3) cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula, 4) unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas y 5) mover una fuerza a lo largo de su línea de acción. Cada una de estas operaciones se justifica fácilmente con base en la ley del paralelogramo o en el principio de transmisibilidad.

Ahora se procede a demostrar que *dos pares que tienen el mismo momento* **M** *son equivalentes*. Primero se consideran dos pares contenidos en el mismo plano y se supone que dicho plano coincide con el plano de la figura (figura 3.35). El primer par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ de magnitud F_1, las cuales están localizadas a una distancia d_1 entre sí (figura 3.35*a*), y el segundo par está constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ de magnitud F_2, localizadas a una distancia d_2 entre sí (figura 3.35*d*). Como los dos pares tienen el mismo momento **M**, que es perpendicular al plano de la figura, ambos pares deben tener el mismo sentido (el cual se ha supuesto contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y la relación

$$F_1d_1 = F_2d_2 \qquad (3.49)$$

debe ser satisfecha. Para comprobar que los dos pares son equivalentes, se debe demostrar que el primer par puede ser transformado en el segundo por medio de las operaciones enumeradas con anterioridad.

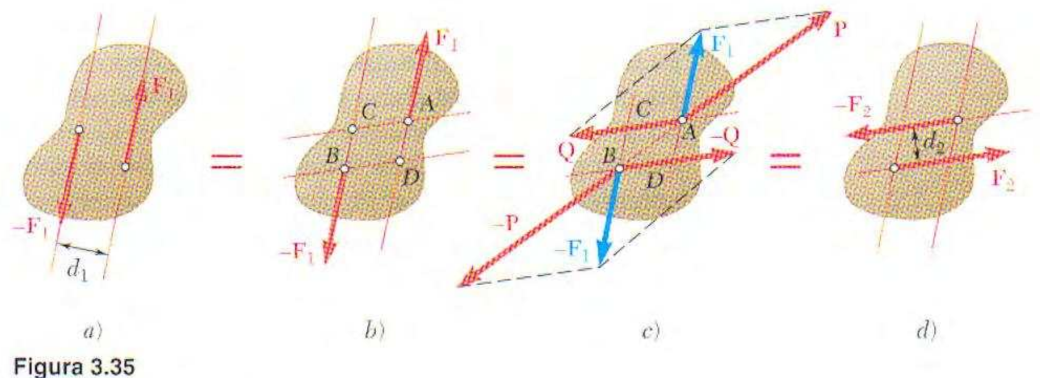


Figura 3.35

Al representar con A, B, C y D los puntos de intersección de las líneas de acción de los dos pares, se deslizan primero las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ hasta que estén unidas, respectivamente, a A y B, como se muestra en la figura 3.35*b*. Entonces, la fuerza $\mathbf{F}_1$ se descompone en una componente $\mathbf{P}$ a lo largo de la línea AB y una componente $\mathbf{Q}$ a lo largo de AC (figura 3.35*c*); similarmente, la fuerza $-\mathbf{F}_1$ se descompone en $-\mathbf{P}$ a lo largo de AB y en $-\mathbf{Q}$ a lo largo de BD. Las fuerzas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$ tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos; tales fuerzas pueden moverse a lo largo de su línea de acción común hasta aparecer aplicadas en el mismo punto para que, entonces, puedan ser canceladas. Por tanto, el par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ se reduce al par constituido por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$.

A continuación se comprueba que las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$. El momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ puede obtenerse calculando el momento de $\mathbf{Q}$ con respecto a B; en forma similar, el momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ es el momento de $\mathbf{F}_1$ con respecto a B. Pero, por el teoroma de Varignon, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a la suma de los momentos de sus componentes $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Como el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a B es igual a cero, el momento del par formado por $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ debe ser igual al momento del par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. Recordando (3.49), se escribe

$$Qd_2 = F_1 d_1 = F_2 d_2 \qquad \text{y} \qquad Q = F_2$$

Por tanto, las fuerzas $\mathbf{Q}$ y $-\mathbf{Q}$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_2$, y el par de la figura 3.35*a* es equivalente al par de la figura 3.35*d*.

Considere ahora dos pares contenidos en planos paralelos P_1 y P_2; a continuación se demostrará que dichos pares son equivalentes si tienen el mismo momento. En virtud de lo que se ha presentado hasta ahora, se puede suponer que ambos pares están constituidos por fuerzas que tienen la misma magnitud F y que actúan a lo largo de líneas paralelas (figura 3.36*a* y *d*). Se pretende demostrar que el par contenido en el plano P_1 puede ser transformado en el par contenido en el plano P_2 por medio de las operaciones estándar que ya se mencionaron.

Considere dos planos definidos, respectivamente, por las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ y por las líneas de acción de $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (figura 3.36*b*). En un punto sobre la línea de intersección de los dos planos se unen dos fuerzas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, que son iguales, respectivamente, a $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$. El par formado por $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.36*c*) puesto que, obviamente, ambos pares tienen el mismo momento y están contenidos en el mismo plano. En forma análoga, el par formado por $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por $-\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_2$. Cancelando las dos fuerzas igua-

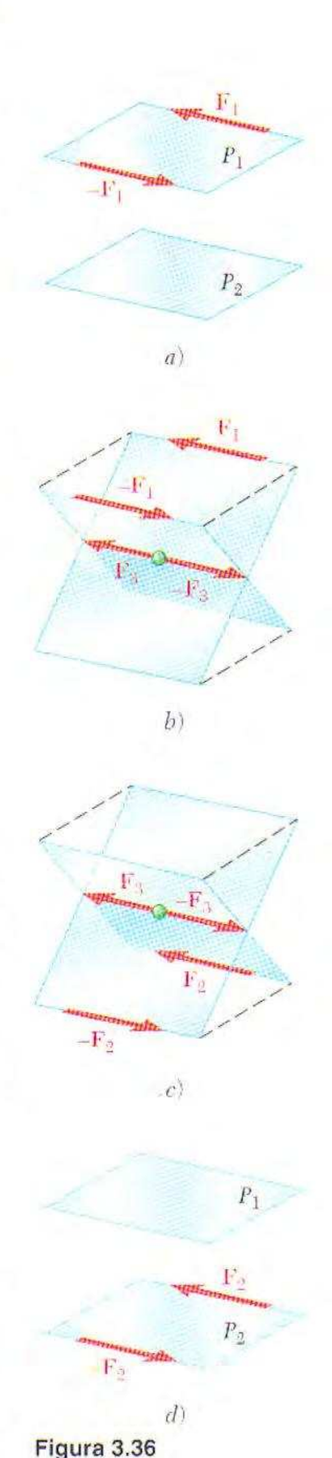
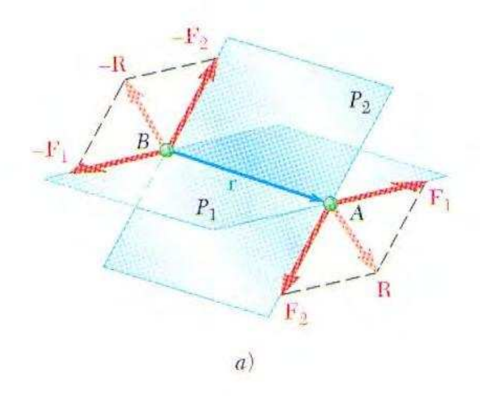


Figura 3.36

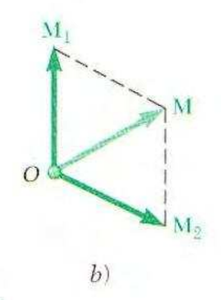
les y opuestas $\mathbf{F}_3$ y $-\mathbf{F}_3$, se obtiene el par deseado en el plano P_2 (figura 3.36*d*). En este sentido, se concluye que dos pares que tienen el mismo momento $\mathbf{M}$ son equivalentes si están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

La propiedad que se acaba de establecer es muy importante para entender correctamente la mecánica de los cuerpos rígidos. Esta propiedad indica que cuando un par actúa sobre un cuerpo rígido, es irrelevante dónde actúan las dos fuerzas que forman al par o cuáles son la magnitud y la dirección que esas fuerzas tienen. Lo único que importa es el *momento* del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

3.14. ADICIÓN O SUMA DE PARES



a)



b)

Figura 3.37

Considere dos planos P_1 y P_2 que se intersecan y dos pares que actúan, respectivamente, en P_1 y P_2. Se puede suponer, sin perder la generalidad, que el par en P_1 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares a la línea de intersección de los dos planos y que actúan, respectivamente, en A y B (figura 3.37*a*). En forma similar, se supone que el par en P_2 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB y que actúan, respectivamente, en A y B. Es obvio que la resultante $\mathbf{R}$ de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y la resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ forman un par. Si se representa con $\mathbf{r}$ el vector que une a B con A y si recordamos la definición de par (sección 3.12), el momento $\mathbf{M}$ del par resultante queda expresado como sigue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

y, por el teorema de Varignon,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Pero el primer término en la expresión obtenida representa al momento $\mathbf{M}_1$ del par en P_1 y el segundo término representa al momento $\mathbf{M}_2$ del par en P_2. Así se tiene

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \tag{3.50}$$

y se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ es un par de momento $\mathbf{M}$ igual a la suma vectorial de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ (figura 3.37*b*).

3.15. LOS PARES PUEDEN REPRESENTARSE POR MEDIO DE VECTORES

Como se vio en la sección 3.13, los pares que tienen el mismo momento, sin importar si actúan en el mismo plano o en planos paralelos, son equivalentes. Por tanto, no hay necesidad de dibujar las fuerzas que en realidad forman un par dado con el propósito de definir el efecto que dicho par tiene sobre un cuerpo rígido (figura 3.38*a*). Es suficiente dibujar una flecha igual en magnitud y dirección al momento $\mathbf{M}$ del par (figura 3.38*b*). Por otra parte, en la sección 3.14 quedó expresado que la suma de dos pares es otro par y que el momento $\mathbf{M}$ del par resultante puede obtenerse mediante la suma vectorial los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, de los pares dados. Por consiguiente, los pares obedecen la ley para la adición de vectores y la flecha usada en la figura 3.38*b* para representar al par definido en la figura 3.38*a* puede considerarse como un vector verdadero.

El vector que representa un par recibe el nombre de *vector de par*. Obsérvese que en la figura 3.38 se usó una flecha roja para distinguir al vector de par, *la cual representa al par mismo*, del *momento* del par, que se representó con una flecha verde en figuras anteriores. Nótese también que se ha agregado el símbolo ↰ a esta flecha roja con el fin de evitar cualquier confusión con los vectores que representan fuerzas. El vector de par, como el momento de un par, es un vector libre. Por tanto, su punto de aplicación puede ser elegido en el origen del sistema de coordenadas si así se desea (figura 3.38*c*). Además, el vector del momento **M** se puede descomponer en componentes vectoriales $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, las cuales están dirigidas a lo largo de los ejes coordenados (figura 3.38*d*). Esas componentes vectoriales representan pares que actúan, respectivamente, en los planos yz, zx y xy.

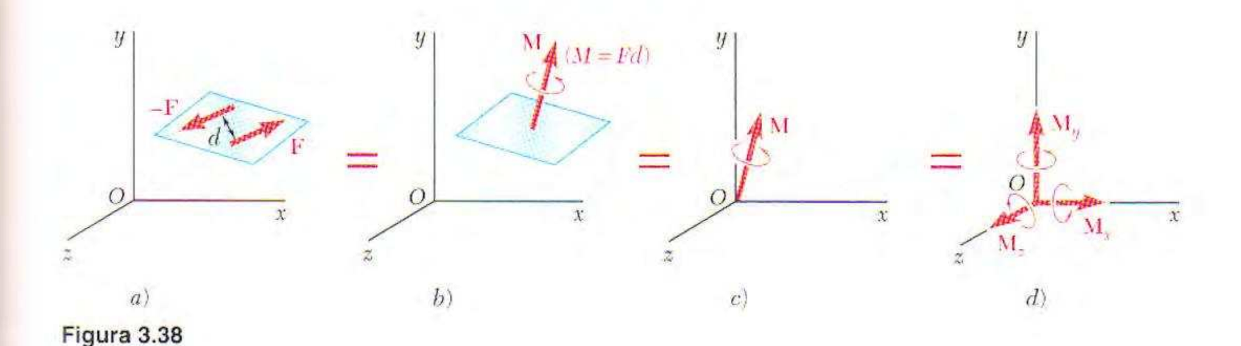


Figura 3.38

3.16. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA DADA EN UNA FUERZA EN *O* Y UN PAR

Considere una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto A definido por el vector de posición **r** (figura 3.39*a*). Suponga que por alguna razón se quiere que la fuerza actúe en el punto O. Aunque **F** se puede mover a lo largo de su línea de acción (principio de transmisibilidad), no es posible moverla al punto O, que no se encuentra sobre la línea de acción original de la fuerza, sin modificar el efecto que **F** tiene sobre el cuerpo rígido.

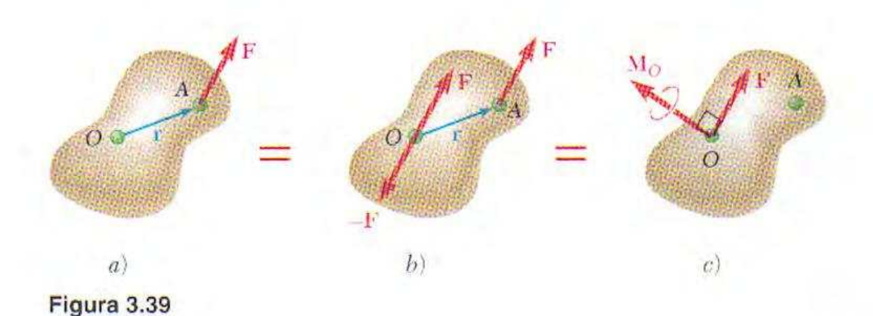


Figura 3.39

Sin embargo, pueden unirse dos fuerzas al punto O, una igual a **F** y otra igual a $-\mathbf{F}$, sin modificar el efecto que la fuerza original tiene sobre el cuerpo rígido (figura 3.39*b*). Como una consecuencia de esta transformación, ahora una fuerza **F** se aplica en O; las otras dos fuerzas

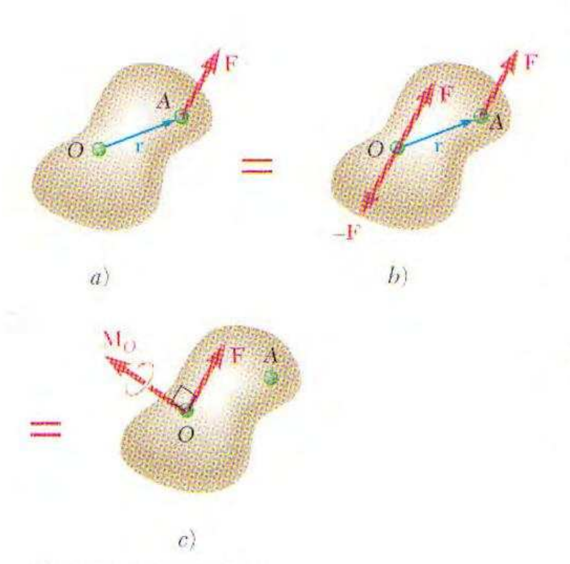


Figura 3.39 (*repetida*)

forman un par con un momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por tanto, *cualquier fuerza* $\mathbf{F}$ *que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de* $\mathbf{F}$ *con respecto a O*. El par tiende a impartirle al cuerpo rígido el mismo movimiento de rotación alrededor de O que la fuerza $\mathbf{F}$ ocasionaba antes de que fuera trasladada al punto O. El par se representa por el vector de par $\mathbf{M}_O$ que es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$. Como $\mathbf{M}_O$ es un vector libre, puede ser aplicado en cualquier lugar; sin embargo, por conveniencia, usualmente el vector de par se fija en O, junto con $\mathbf{F}$, y se hace referencia a la combinación obtenida como un *sistema fuerza-par* (figura 3.39*c*).

Si la fuerza $\mathbf{F}$ se hubiera trasladado del punto A a un punto diferente O' (figura 3.40*a* y *c*), se tendría que calcular el momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O' y se hubiera fijado a O' un nuevo sistema fuerza-par constituido por $\mathbf{F}$ y por el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$. La relación que existe entre los momentos de $\mathbf{F}$ con respecto a O y a O' se obtiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \tag{3.51}$$

donde $\mathbf{s}$ es el vector que une a O' con O. De esta manera, el momento $\mathbf{M}_{O'}$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O' se obtiene sumándole al momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O el producto vectorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ que representa el momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O.

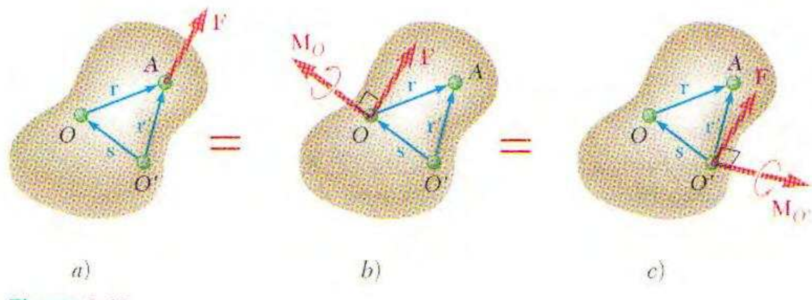
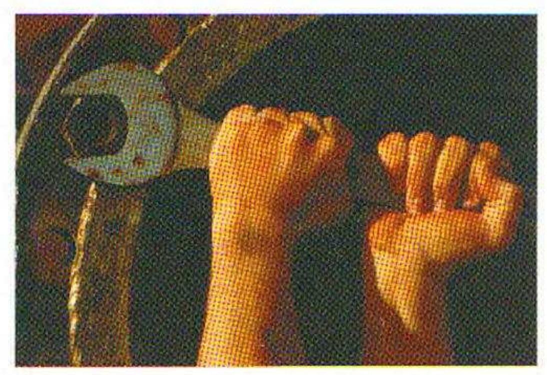


Figura 3.40

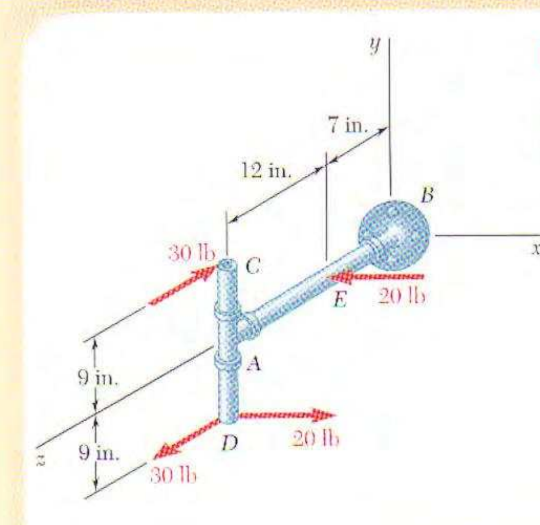
Este resultado también pudo obtenerse observando que, para trasladar a O' al sistema fuerza-par unido a O (figura 3.40*b* y *c*), el vector de par $\mathbf{M}_O$ se puede mover libremente a O'; sin embargo, para mover la fuerza $\mathbf{F}$ de O a O' es necesario agregarle a $\mathbf{F}$ un vector de par cuyo momento sea igual al momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O. Por tanto, el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$ debe ser igual a la suma de $\mathbf{M}_O$ y el vector $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.



Fotografía 3.2 La fuerza ejercida por cada mano sobre la llave puede reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la tuerca.

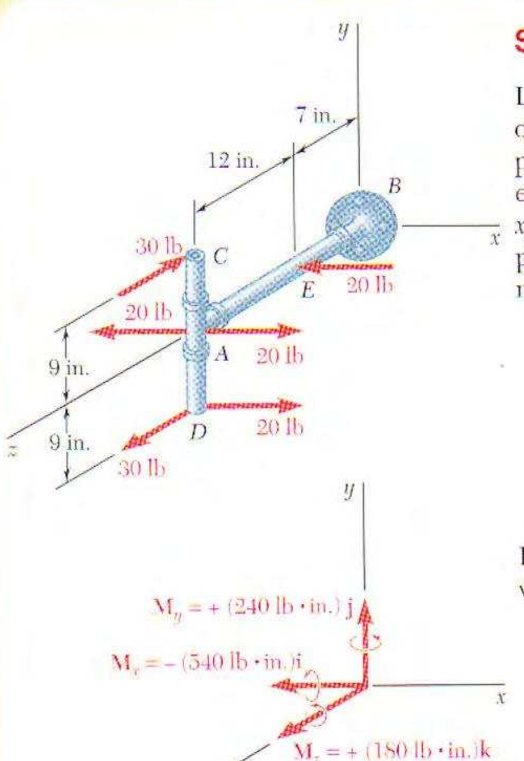
Como ya se ha mencionado, el sistema fuerza-par obtenido a partir de trasladar una fuerza $\mathbf{F}$ de un punto A a un punto O consta de un vector de fuerza $\mathbf{F}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ perpendicular a $\mathbf{F}$. Por el contrario, cualquier sistema fuerza-par que conste de una fuerza $\mathbf{F}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ que sean *mutuamente perpendiculares*, puede ser reemplazado por una sola fuerza equivalente. Esto se lleva a cabo moviendo la fuerza $\mathbf{F}$ en el plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$ hasta que su momento con respecto a O sea igual al momento del par que se desea eliminar.

PROBLEMA RESUELTO 3.6



Determine las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares mostrados.

SOLUCIÓN



Los cálculos se simplificarán si se fijan en A dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas. Esto permitirá reemplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb, uno de los cuales se encuentra en el plano zx; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano xy. Los tres pares mostrados en el croquis adjunto pueden ser representados por tres vectores de par $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$ dirigidos a lo largo de los ejes coordenados. Los momentos correspondientes son

$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$
$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Estos tres momentos representan las componentes del par simple $\mathbf{M}$, equivalente a los pares dados. Así, se escribe

$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad ◀$$

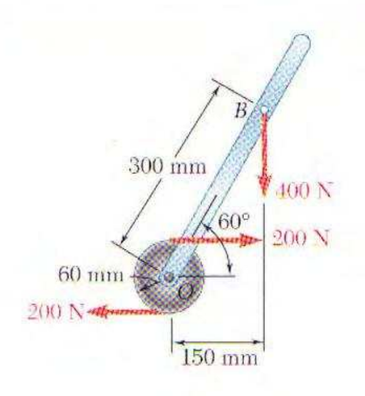
Solución alternativa. Las componentes del par equivalente simple $\mathbf{M}$ también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Si se elige al punto D, se escribe

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (18 \text{ in.})\mathbf{j} \times (-30 \text{ lb})\mathbf{k} + [(9 \text{ in.})\mathbf{j} - (12 \text{ in.})\mathbf{k}] \times (-20 \text{ lb})\mathbf{i}$$

y después de calcular los diversos productos cruz se tiene

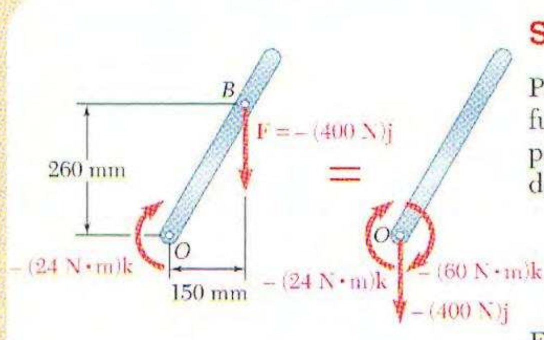
$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 3.7



Reemplace el par y la fuerza mostrados en la figura por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determine la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.

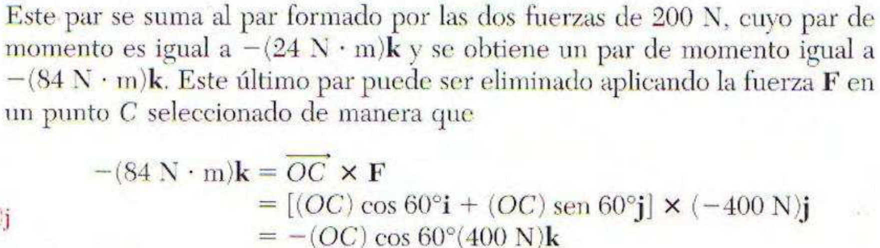
SOLUCIÓN

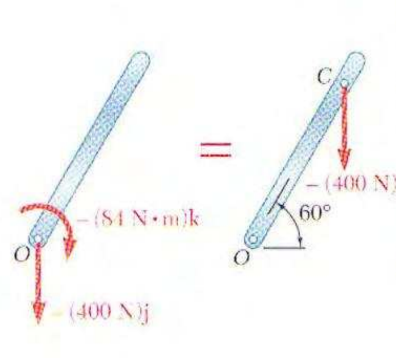


Primero se reemplazan la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O. La fuerza $\mathbf{F} = -(400 \text{ N})\mathbf{j}$ se mueve a O y al mismo tiempo se agrega un par de momento $\mathbf{M}_O$ igual al momento con respecto a O, de la fuerza en su posición original.

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} = [(0.150 \text{ m})\mathbf{i} + (0.260 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j}$$
$$= -(60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

Este par se suma al par formado por las dos fuerzas de 200 N, cuyo par de momento es igual a $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ y se obtiene un par de momento igual a $-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Este último par puede ser eliminado aplicando la fuerza $\mathbf{F}$ en un punto C seleccionado de manera que



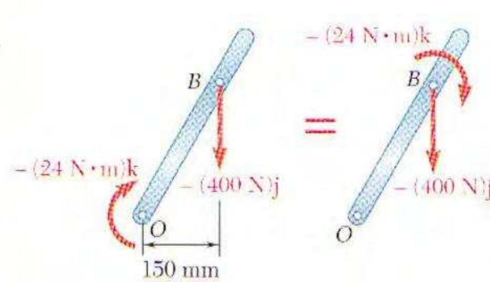


$$-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F}$$
$$= [(OC) \cos 60°\mathbf{i} + (OC) \text{ sen } 60°\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j}$$
$$= -(OC) \cos 60°(400 \text{ N})\mathbf{k}$$

Entonces, se concluye

$$(OC) \cos 60° = 0.210 \text{ m} = 210 \text{ mm} \qquad OC = 420 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

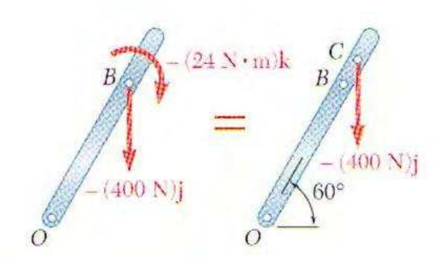
Solución alternativa. Como el efecto de un par no depende de su ubicación, el par de momento $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ puede trasladarse a B; por tanto, se obtiene un sistema fuerza-par en B. Ahora el par puede ser eliminado aplicando la fuerza $\mathbf{F}$ en un punto C elegido de manera que



$$-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F}$$
$$= -(BC) \cos 60°(400 \text{ N})\mathbf{k}$$

Así, se concluye que

$$(BC) \cos 60° = 0.060 \text{ m} = 60 \text{ mm} \qquad BC = 120 \text{ mm}$$
$$OC = OB + BC = 300 \text{ mm} + 120 \text{ mm} \qquad OC = 420 \text{ mm} \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudiaron las propiedades de los *pares*. Para resolver los problemas que se presentan a continuación es necesario recordar que el efecto neto de un par consiste en producir un momento **M**. Como dicho momento es independiente del punto con respecto al cual se calcula, **M** es un *vector libre* y, por tanto, permanece inalterado a medida que se mueve de un punto a otro. Además, dos pares son *equivalentes* (esto es, ambos tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado) si producen el mismo momento.

Al determinar el momento de un par, pueden aplicarse todas las técnicas vistas anteriormente para calcular momentos. Además, como el momento de un par es un vector libre, debe ser determinado empleando el punto que resulte más conveniente.

En virtud de que el único efecto de un par es producir un momento, es posible representar un par por medio de un vector, el *vector de par*, que es igual al momento del par. El vector de par es un vector libre y será representado por un símbolo especial, ⟲ para distinguirlo de los vectores de fuerza.

Al resolver los problemas propuestos de esta lección se tendrán que llevar a cabo las siguientes operaciones:

1. ***Sumar dos o más pares.*** Esto resulta en un nuevo par cuyo momento se obtiene con la suma vectorial de los momentos de los pares dados [problema resuelto 3.6].

2. ***Reemplazar a una fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en un punto especificado.*** Como se explicó en la sección 3.16, la fuerza del sistema fuerza-par es igual a la fuerza original, mientras que el vector de par requerido es igual al momento de la fuerza original con respecto al punto dado. Además, es importante señalar que la fuerza y el vector de par son perpendiculares entre sí. Por el contrario, se concluye que un sistema fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza sólo si la fuerza y el vector de par son mutuamente perpendiculares (véase el siguiente párrafo).

3. ***Reemplazar un sistema fuerza-par (con F perpendicular a M) con una sola fuerza equivalente.*** Obsérvese que el requisito de que **F** y **M** sean mutuamente perpendiculares se cumplirá en todos los problemas bidimensionales. La fuerza equivalente única es igual a **F** y se aplica en forma tal que su momento con respecto al punto original de aplicación sea igual a **M** [problema resuelto 3.7].

Problemas

3.70 Dos fuerzas paralelas de 60 N se aplican sobre la palanca que se muestra en la figura. Determine el momento del par formado por las dos fuerzas *a*) sumando los momentos de los dos pares que se generan al descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes horizontal y vertical, *b*) empleando la distancia perpendicular entre las dos fuerzas y *c*) haciendo la sumatoria de los momentos de las dos fuerzas alrededor de *A*.

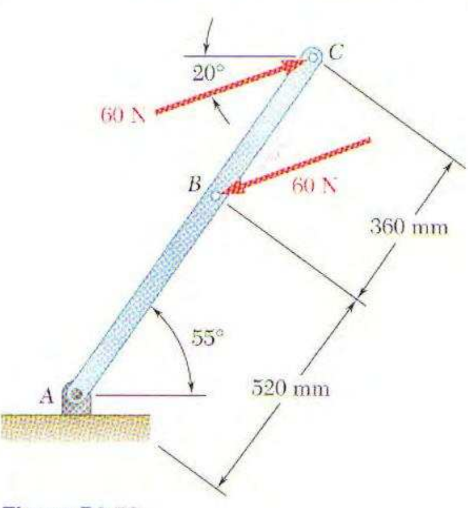


Figura P3.70

3.71 Una placa en forma de paralelogramo se somete a la acción de dos pares. Determine *a*) el momento del par formado por las dos fuerzas de 21 lb, *b*) la distancia perpendicular entre las fuerzas de 12 lb si el par resultante de los dos pares es cero y *c*) el valor de α si *d* es igual a 42 in. y el par resultante es de 72 lb · in. en el sentido de las manecillas del reloj.

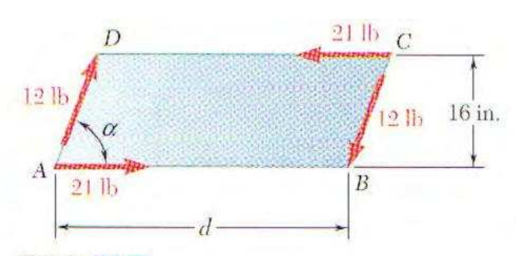


Figura P3.71

3.72 Un par **M** con magnitud de 18 N · m se aplica sobre el mango de un desarmador para apretar un tornillo en el bloque de madera mostrado. Determine las magnitudes de las dos fuerzas horizontales mínimas que son equivalentes al par **M** si se aplican *a*) en las esquinas *A* y *D*, *b*) en las esquinas *B* y *C* y *c*) en cualquier parte del bloque de madera.

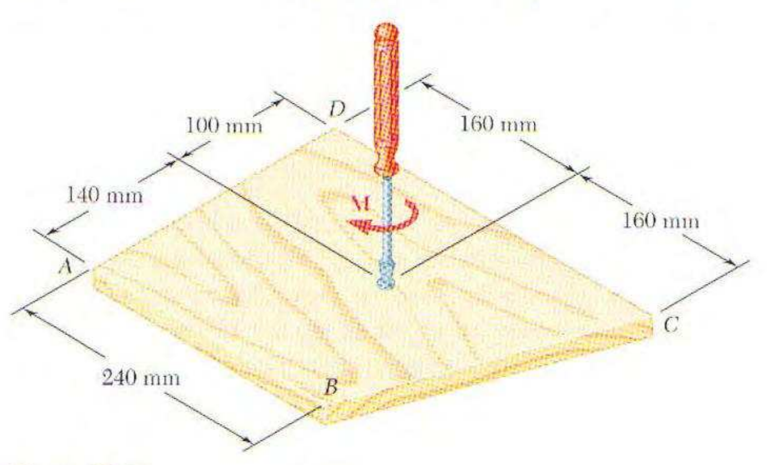


Figura P3.72

3.73 Cuatro clavijas de 1 in. de diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas y se jalan con las fuerzas indicadas. *a*) Determine el par resultante que actúa sobre la tabla. *b*) Si sólo se usara una cuerda, ¿alrededor de cuáles clavijas debería pasar y en qué dirección debería jalarse para generar el mismo par con la mínima tensión en la cuerda? *c*) ¿Cuál es el valor de esa tensión mínima?

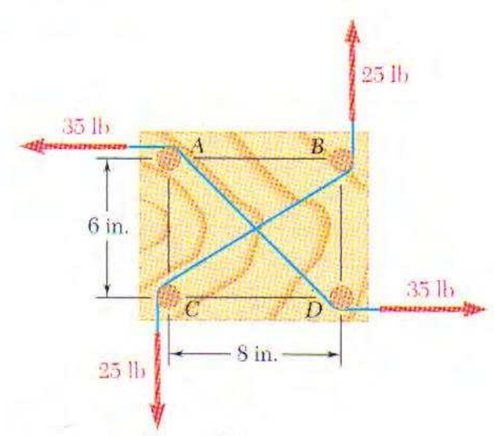


Figura *P3.73* y *P3.74*

3.74 Cuatro clavijas del mismo diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas y se jalan con las fuerzas indicadas. Determine el diámetro de las clavijas si se sabe que el par resultante aplicado a la tabla es de 485 lb · in, en sentido inverso de las manecillas del reloj.

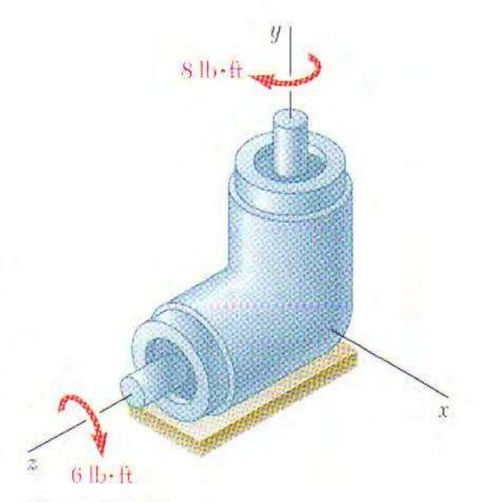


Figura P3.75

3.75 Los ejes de una transmisión en ángulo están sometidos a la acción de los dos pares que se muestran en la figura. Reemplace ambos pares por un solo par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.76 y 3.77 Si $P = 0$, reemplace los dos pares restantes por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

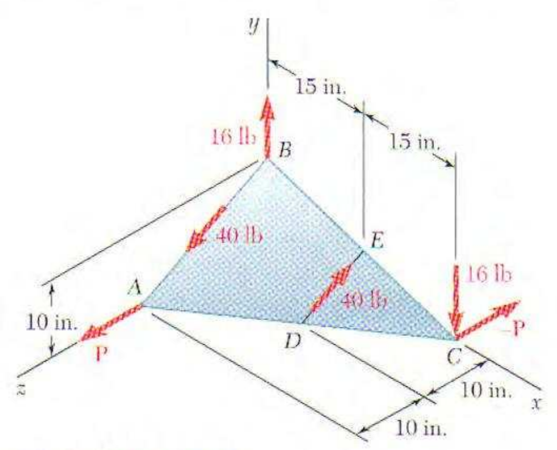


Figura P3.77 y P3.78

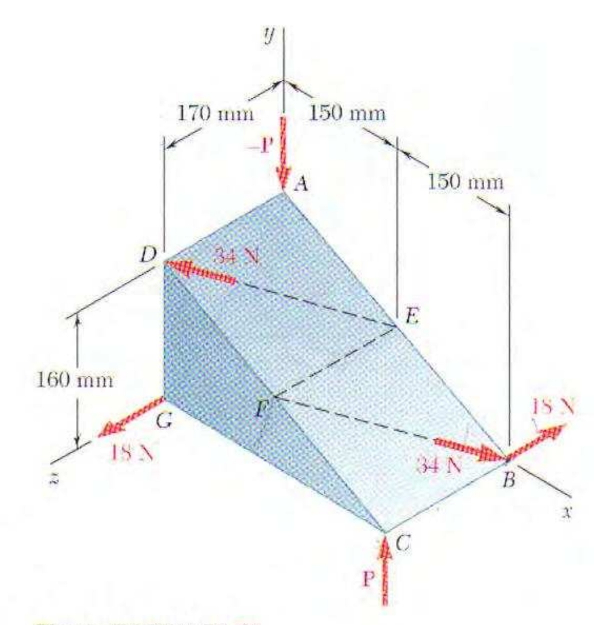


Figura P3.76 y P3.79

3.78 Si $P = 20$ lb, reemplace los tres pares por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.79 Si $P = 20$ N, reemplace los tres pares por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

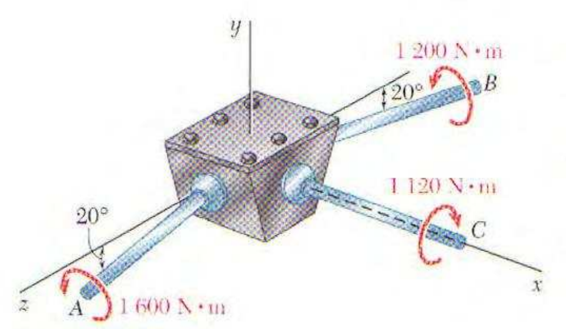


Figura P3.80

3.80 Los ejes A y B conectan la caja de engranes a los ensambles de un tractor, y el eje C la conecta con el motor. Los ejes A y B se encuentran en el plano vertical yz, mientras que el eje C se dirige a lo largo del eje x. Reemplace los pares aplicados a los ejes con un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.81 La tensión en el cable unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 560 lb. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en C por un sistema equivalente fuerza-par *a*) en A y *b*) en B.

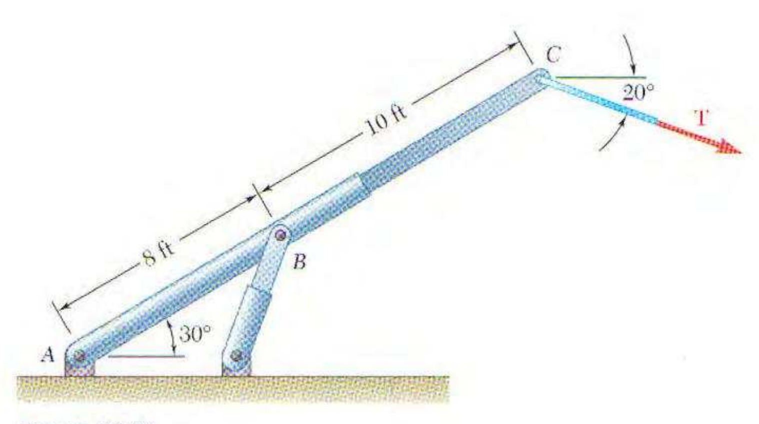


Figura P3.81

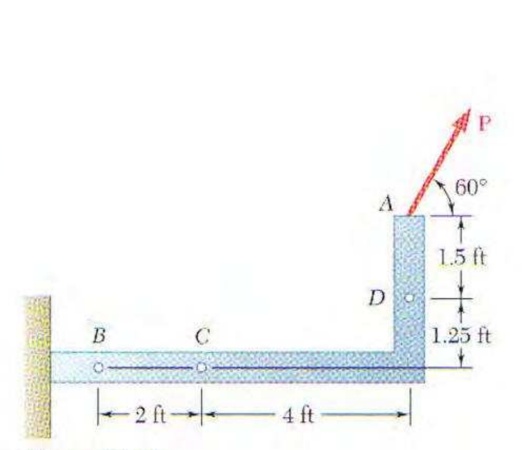


Figura P3.82

3.82 Una fuerza **P** de 160 lb se aplica en el punto A de un elemento estructural. Reemplace **P** *a*) por un sistema equivalente fuerza-par en C, *b*) por un sistema equivalente con una fuerza vertical en B y una segunda fuerza en D.

3.83 Una fuerza vertical **P** de 80 N se aplica sobre la manivela de campana que se muestra en la figura. *a*) Reemplace **P** por un sistema fuerza-par equivalente en B. *b*) Encuentre las dos fuerzas verticales en C y D que son equivalentes al par obtenido en el inciso *a*).

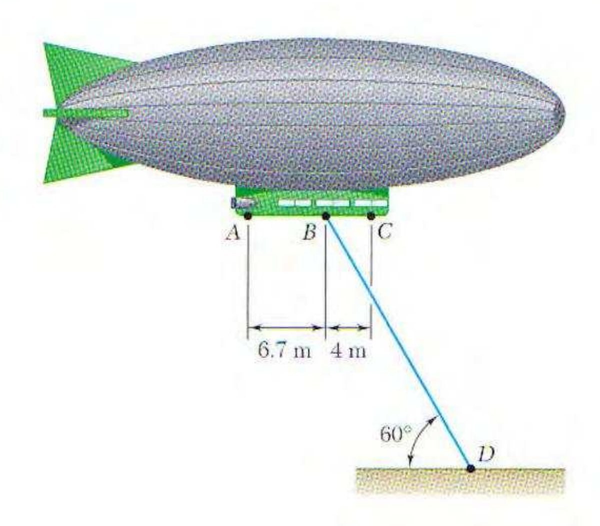


Figura *P3.84*

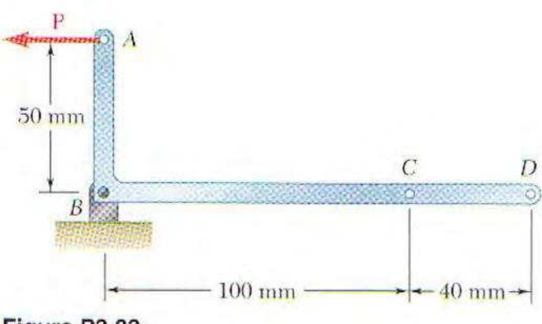


Figura P3.83

3.84 Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la cabina en B. Si la tensión en el cable es de 1 040 N, reemplace la fuerza ejercida por el cable en B por un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y C.

3.85 La fuerza **P** tiene una magnitud de 250 N y se aplica al extremo C de una varilla AC de 500 mm, la cual se une a la ménsula en A y en B. Si se supone que $\alpha = 30°$ y $\beta = 60°$, reemplace **P** por *a*) un sistema fuerza-par equivalente en B, *b*) un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y en B.

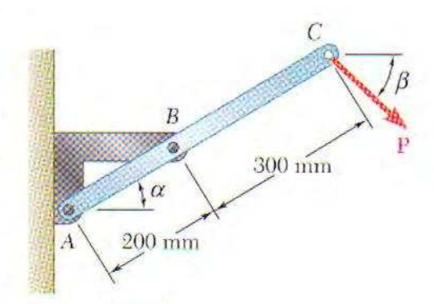


Figura P3.85

3.86 Retome el problema 3.85, para ello suponga que $\alpha = \beta = 25°$.

3.87 Una fuerza y un par se aplican al extremo de una viga en voladizo como se muestra en la figura. *a*) Reemplace este sistema por una sola fuerza **F** aplicada en el punto C, y determine la distancia d desde C hasta una línea que pasa por los puntos D y E. *b*) Resuelva el inciso *a*) suponiendo que se intercambian las direcciones de las dos fuerzas de 360 N.

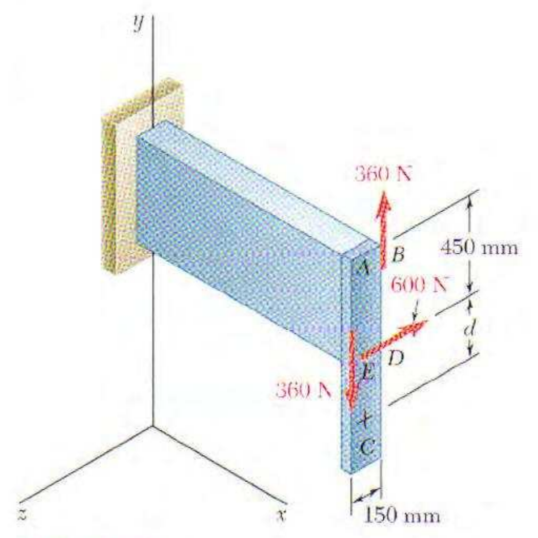


Figura P3.87

3.88 Las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección transversal de un canal de acero pueden representarse mediante una fuerza vertical de 900 N y dos fuerzas horizontales de 250 N, como se muestra en la figura. Reemplace esta fuerza y par con una sola fuerza **F** aplicada en el punto C, y determine la distancia x desde C hasta la línea BD. (El punto C se define como el *centro cortante* de la sección.)

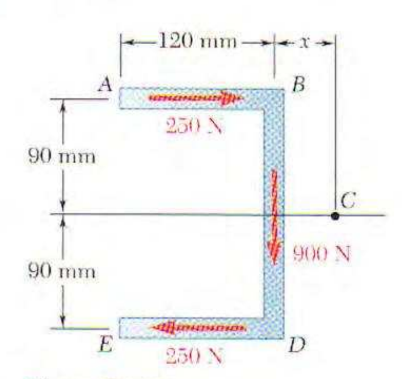


Figura P3.88

3.89 En el proceso de roscado de un barreno, un trabajador aplica a la palanca del maneral las fuerzas horizontales mostradas en la figura. Demuestre que estas fuerzas son equivalentes a una sola fuerza resultante y determine, si es posible, el punto de aplicación de la fuerza resultante sobre la palanca.

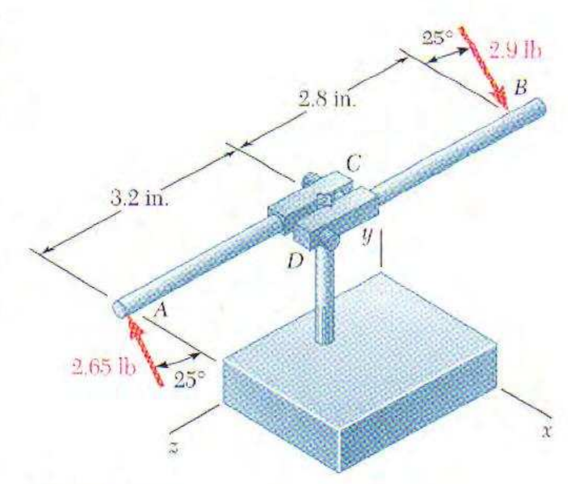


Figura P3.89

3.90 Tres varillas de control unidas a la palanca ABC ejercen sobre ésta las fuerzas mostradas en la figura. *a*) Reemplace las tres fuerzas por un sistema fuerza-par equivalente en B. *b*) Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza-par obtenido en el inciso *a*), y especifique el punto de aplicación sobre la palanca.

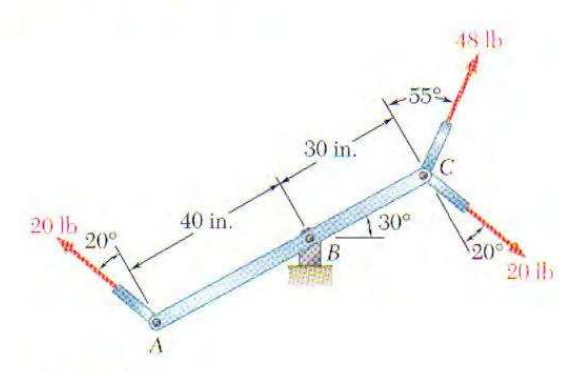


Figura P3.90

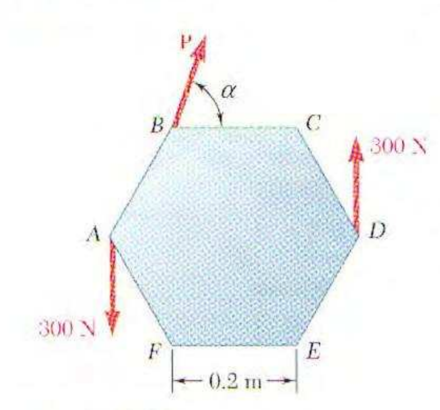


Figura *P3.91*

3.91 Una placa hexagonal está sometida a la fuerza **P** y al par que se muestran en la figura. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza mínima **P** con la que este sistema se puede sustituir por una sola fuerza aplicada en E.

3.92 Una placa rectangular está sometida a la fuerza y al par que se muestran en la figura. Este sistema debe reemplazarse por una sola fuerza equivalente. *a*) Para $\alpha = 40°$, especifique la magnitud y la línea de acción de la fuerza equivalente. *b*) Especifique el valor de α si la línea de acción de la fuerza equivalente debe intersecar a la línea CD, 300 mm a la derecha de D.

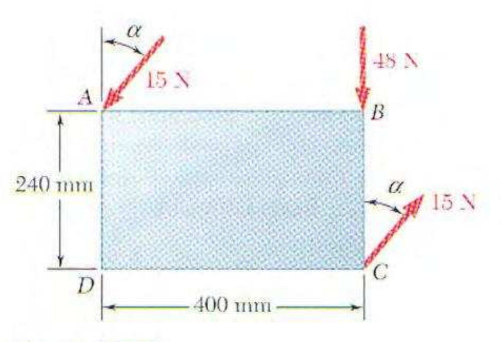


Figura *P3.92*

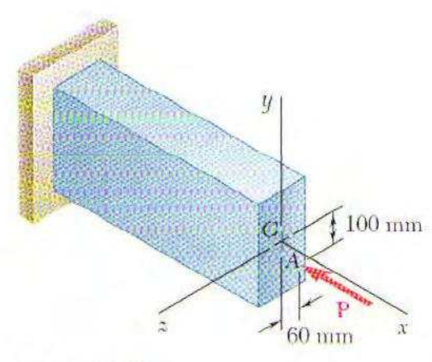


Figura P3.93

3.93 Una fuerza excéntrica, compresiva **P** de 1 220 N se aplica al extremo de una viga en voladizo. Reemplace **P** por un sistema fuerza-par equivalente en G.

3.94 Para mantener cerrada una puerta, se usa una tabla de madera colocada entre el piso y la perilla del cerrojo de la puerta. La fuerza que la tabla ejerce en B es de 175 N y está dirigida a lo largo de la línea AB. Reemplace esta fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en C.

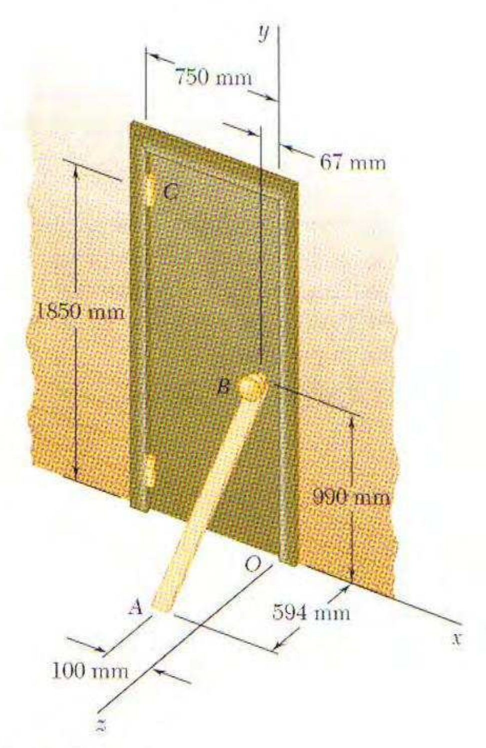


Figura P3.94

3.95 Tres cables atirantados sostienen una antena, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AB* es de 288 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable *AB* en *A* con un sistema fuerza-par equivalente en el centro *O* de la base de la antena.

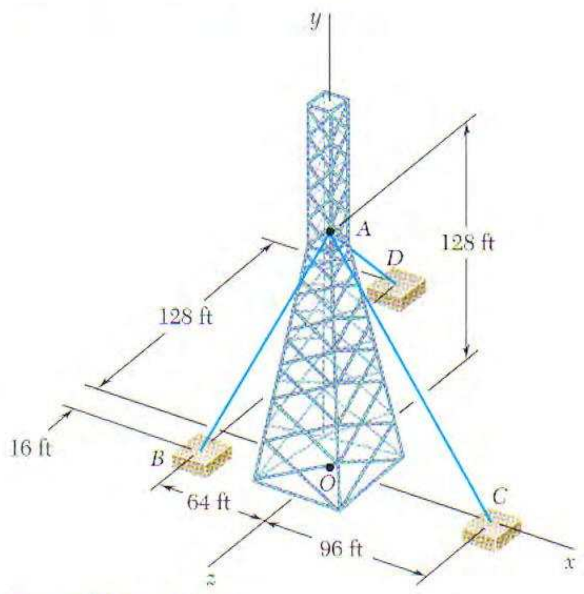


Figura P3.95 y *P3.96*

3.96 Tres cables atirantados sostienen una antena, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable *AD* es de 270 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable *AD* en *A* con un sistema fuerza-par equivalente en el centro *O* de la base de la antena.

3.97 Reemplace la fuerza de 150 N por un sistema fuerza-par equivalente en *A*.

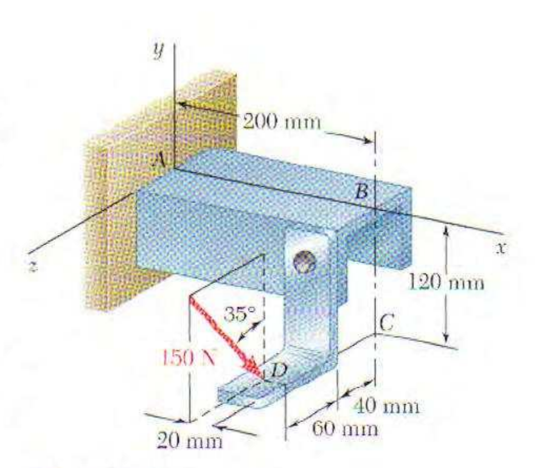


Figura P3.97

3.98 Una fuerza $\mathbf{F}_1$ de 77 N y un par $\mathbf{M}_1$ de 31 N · m se aplican en la esquina *E* de la placa doblada que se muestra en la figura. Si $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{M}_1$ deben reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par $(\mathbf{F}_2, \mathbf{M}_2)$ en la esquina *B* y si $(M_2)_z = 0$, determine *a*) la distancia *d* y *b*) $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{M}_2$.

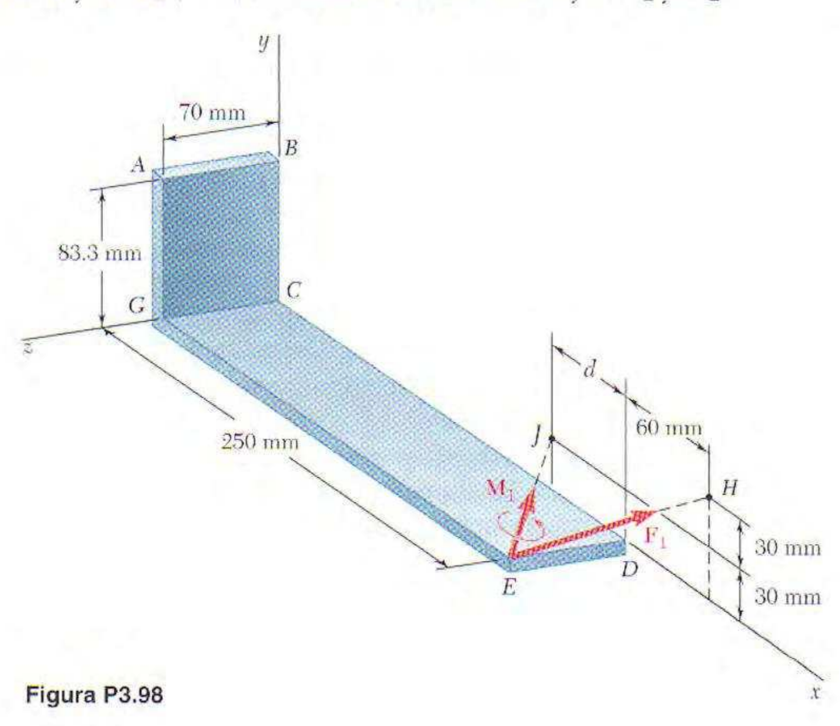


Figura P3.98

3.99 Una fuerza **F** de 46 lb y un par **M** de 2 120 lb · in., se aplican a la esquina A del bloque mostrado en la figura. Reemplace el sistema fuerza-par dado por un sistema equivalente fuerza-par en la esquina H.

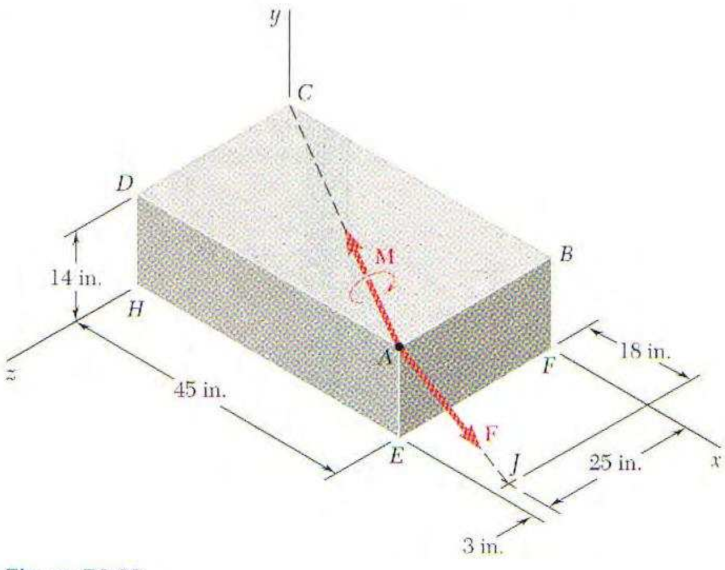


Figura P3.99

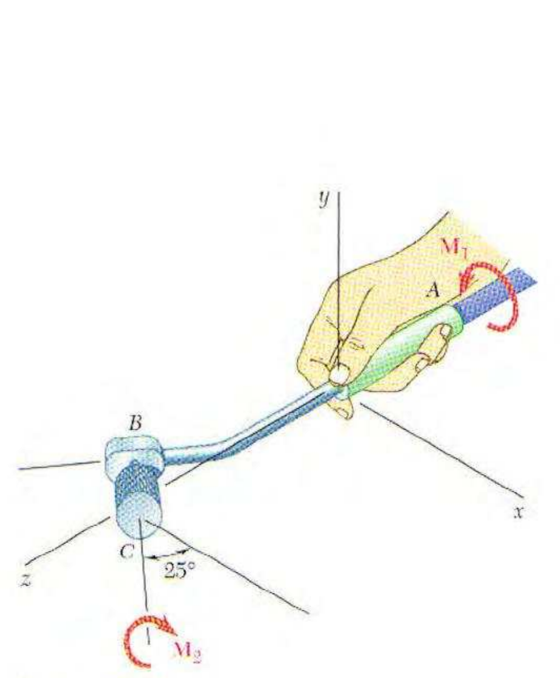


Figura *P3.100*

3.100 El pulidor manual de una rectificadora industrial en miniatura pesa 0.6 lb y su centro de gravedad está localizado sobre el eje y. La cabeza del pulidor está desviada del plano xz de tal forma que la línea BC forma un ángulo de 25° con la dirección x. Muestre que el peso del pulidor manual y los dos pares $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ se pueden reemplazar por una sola fuerza equivalente. Además, si se supone que $M_1 = 0.68$ lb · in. y $M_2 = 0.65$ lb · in., determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza equivalente y *b*) el punto donde su línea de acción interseca al plano xz.

3.17. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, . . ., *definidos por los vectores de posición* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, *etc.* (figura 3.41*a*). Como se vio en la sección anterior, $\mathbf{F}_1$ puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O, si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento $\mathbf{M}_1$, igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}_1$ con respecto a O. Si se repite este procedimiento con $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . , se obtiene el sistema mostrado en la figura 3.41*b*, que consta de: las fuerzas originales, ahora actuando en O, y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante **R**. De manera similar, los vectores de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, . . . pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Por tanto, cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un *sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado O* (figura 3.41*c*). Se debe observar que mientras cada uno de los vectores de par $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, . . . , en la figura 3.41*b* es perpendicular a la fuerza que le corresponde, en general la fuerza resultante **R** y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ en la figura 3.41*c* no serán perpendiculares entre sí.

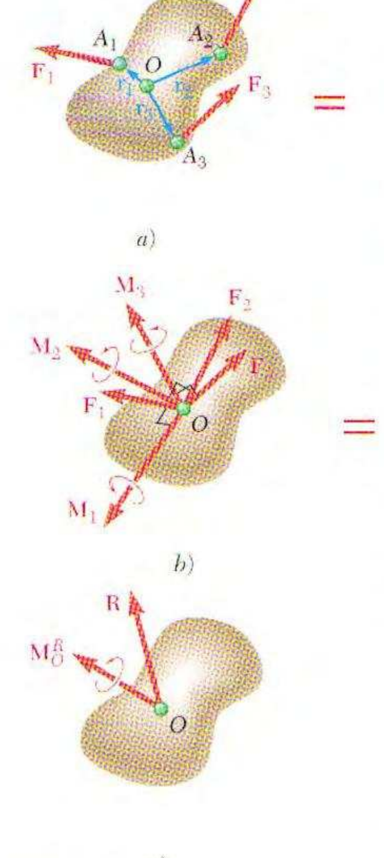


Figura 3.41

El sistema equivalente fuerza-par está definido por las ecuaciones

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.52}$$

las cuales expresan que la fuerza **R** se obtiene sumando todas las fuerzas del sistema, mientras que el momento del vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$, denominado *momento resultante* del sistema, se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a O.

Una vez que un sistema de fuerzas dado se ha reducido a una fuerza y un par que actúa en el punto O, dicho sistema puede reducirse a una fuerza y un par actuando en cualquier otro punto O'. Mientras que la fuerza resultante **R** permanecerá inalterada, el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_{O'}^R$ será igual a la suma de $\mathbf{M}_O^R$ y el momento con respecto a O' de la fuerza **R** unida a O (figura 3.42). Entonces se tiene

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \tag{3.53}$$

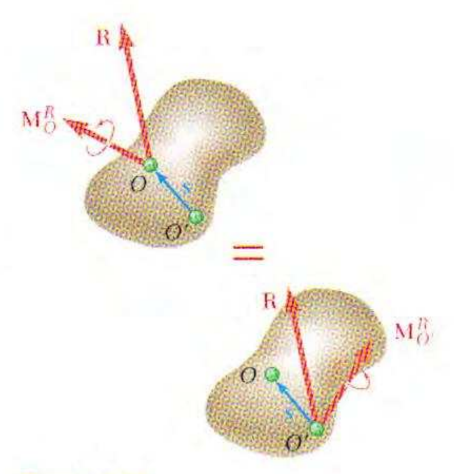


Figura 3.42

En la práctica, la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza **R** actuando en O y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ será llevada a cabo en términos de las componentes. Descomponiendo cada vector **r** y cada fuerza **F** del sistema en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3.54}$$
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{3.55}$$

Al sustituir **r** y **F** en (3.52) y factorizar a los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se obtiene la siguiente expresión para **R** y $\mathbf{M}_O^R$:

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O^R = M_x^R\mathbf{i} + M_y^R\mathbf{j} + M_z^R\mathbf{k} \tag{3.56}$$

Las componentes R_x, R_y, R_z representan, respectivamente, las sumas de las componentes x, y y z de las fuerzas dadas y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de traslación en la dirección de x, y o z. Asimismo, las componentes M_x^R, M_y^R, M_z^R representan la suma de los momentos de las fuerzas dadas con respecto a, respectivamente, los ejes x, y y z y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes, x, y o z.

Si se desea conocer la magnitud y la dirección de la fuerza **R**, éstas se pueden obtener a partir de las componentes R_x, R_y y R_z por medio de las relaciones (2.18) y (2.19) de la sección 2.12; cálculos similares proporcionarán la magnitud y la dirección del vector de par $\mathbf{M}_O^R$.

3.18. SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

En la sección anterior se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede reducirse a un sistema fuerza-par actuando en un punto dado O. Este sistema equivalente fuerza-par caracteriza completamente el efecto del sistema de fuerzas dado sobre el cuerpo rígido. *Por tanto, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado* O. Recuérdese que el sistema fuerza par en O se define por medio de las relaciones (3.52), se establece que *dos sistemas de fuerzas* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,



Fotografía 3.3 Si se analiza el movimiento del carrito de la fotografía, las fuerzas ejercidas sobre éste por el niño pueden reemplazarse por un sistema fuerza-par equivalente.

$\mathbf{F}_3, \ldots,$ y $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \ldots,$ *que actúan sobre el mismo cuerpo rígido son equivalentes si, y sólo si, respectivamente, las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos con respecto a un punto dado O de las fuerzas de los dos sistemas son iguales.* Expresadas en forma matemática, las condiciones necesarias y suficientes para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son las siguientes

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}'_O \tag{3.57}$$

Obsérvese que para demostrar que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, la segunda de las relaciones (3.57) se debe establecer con respecto a *un solo punto O*. Sin embargo, ésta se cumplirá con respecto a *cualquier punto* si los dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Al descomponer las fuerzas y los momentos de (3.57) en sus elementos rectangulares, pueden expresarse las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \tag{3.58}$$

Estas ecuaciones tienen una interpretación física simple; expresan que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a impartirle al cuerpo rígido 1) la misma traslación en las direcciones de x, y y z y 2) la misma rotación alrededor de los ejes x, y y z respectivamente.

3.19. SISTEMAS EQUIPOLENTES DE VECTORES

Cuando dos sistemas de vectores satisfacen las ecuaciones (3.57) o (3.58), esto es, cuando respectivamente sus resultantes y sus momentos resultantes con respecto a un punto arbitrario O son iguales, se dice que los dos sistemas son *equipolentes*. Por tanto, el resultado que se acaba de establecer en la sección anterior se puede enunciar como sigue: *si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equipolentes, entonces ambos también son equivalentes.*

Es importante señalar que este enunciado no se aplica a *cualquier* sistema de vectores. Considérese, por ejemplo, un sistema de fuerzas que actúan sobre un conjunto independiente de partículas que *no* forman un cuerpo rígido. Es posible que un sistema de fuerzas diferentes que actúan sobre las mismas partículas pueda ser equipolente al primero, esto es, que dicho sistema tenga la misma resultante y el mismo momento resultante. Sin embargo, como ahora actuarán diferentes fuerzas sobre cada una de las partículas, los efectos de dichas fuerzas sobre estas partículas serán diferentes; en un caso similar, aunque los dos sistemas de fuerzas sean equipolentes, *no* son *equivalentes*.

3.20. OTRAS REDUCCIONES DE UN SISTEMA DE FUERZAS

En la sección 3.17 se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par en O, que consta de una fuerza $\mathbf{R}$ igual a la suma de fuer-

zas del sistema y de un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ cuyo momento es igual al momento resultante del sistema.

Cuando $\mathbf{R} = 0$, el sistema fuerza-par se reduce a un vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Entonces, el sistema de fuerzas dado puede ser reducido a un solo par, que recibe el nombre de *par resultante* del sistema.

A continuación se procede a investigar las condiciones necesarias para que un sistema dado de fuerzas pueda ser reducido a una sola fuerza. A partir de la sección 3.16 se concluye que un sistema fuerza-par en O puede ser reemplazado por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Por tanto, los sistemas de fuerzas que pueden ser reducidos a una sola fuerza o *resultante*, son aquellos sistemas para los cuales la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Aunque, *en general*, esta condición *no se cumplirá* para sistemas de fuerzas en el espacio, *sí se cumplirá* para sistemas constituidos por 1) fuerzas concurrentes, 2) fuerzas coplanares o 3) fuerzas paralelas. Estos tres casos se estudiarán en forma separada.

1. Las *fuerzas concurrentes* están aplicadas en el mismo punto y, por tanto, pueden ser sumadas directamente para obtener su resultante $\mathbf{R}$. Por consiguiente, éstas siempre se reducen a una sola fuerza. Las fuerzas concurrentes se analizan en detalle en el capítulo 2.
2. Las *fuerzas coplanares* actúan en el mismo plano, el cual se puede suponer que es el plano de la figura (figura 3.43*a*). La suma $\mathbf{R}$ de las fuerzas del sistema también estará en el plano de la figura, mientras que el momento de cada fuerza con respecto al O y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$, serán perpendiculares a dicho plano. De esta forma, el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza $\mathbf{R}$ y por un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que son mutuamente perpendiculares (figura 3.43*b*).[†] Estas fuerzas pueden reducirse a una sola fuerza $\mathbf{R}$, moviendo $\mathbf{R}$ en el plano de la figura hasta que su momento con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. La distancia desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{R}$ es $d = M_O^R/R$ (figura 3.43*c*).

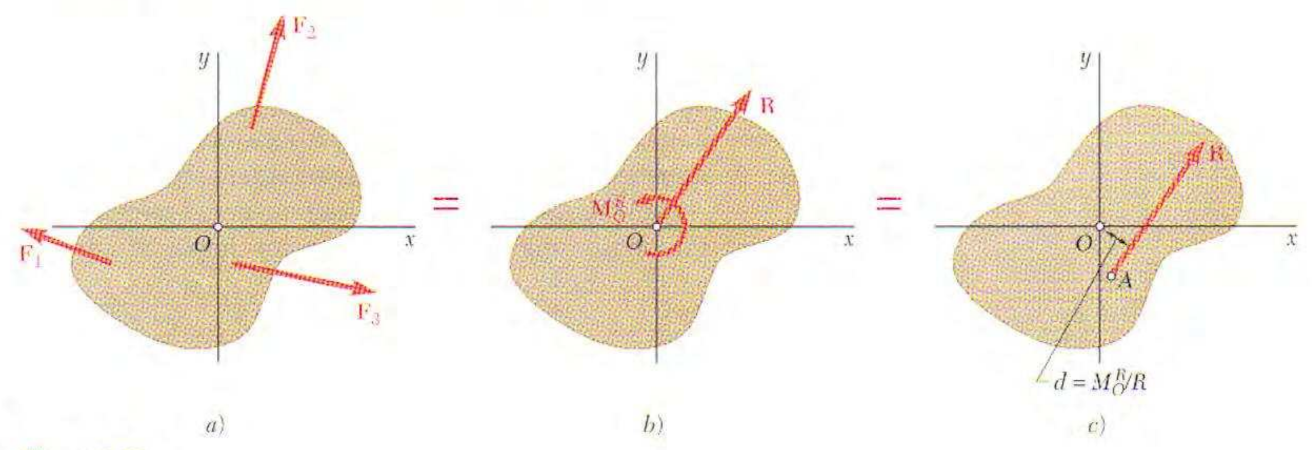


Figura 3.43

[†] Como el vector $\mathbf{M}_O^R$ es perpendicular al plano de la figura, éste se ha representado por el símbolo ↺. Un par con sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj ↺ representa a un vector que apunta hacia fuera del plano de papel y un par con el sentido de las manecillas del reloj ↻ representa a un vector que apunta hacia adentro del plano de papel.

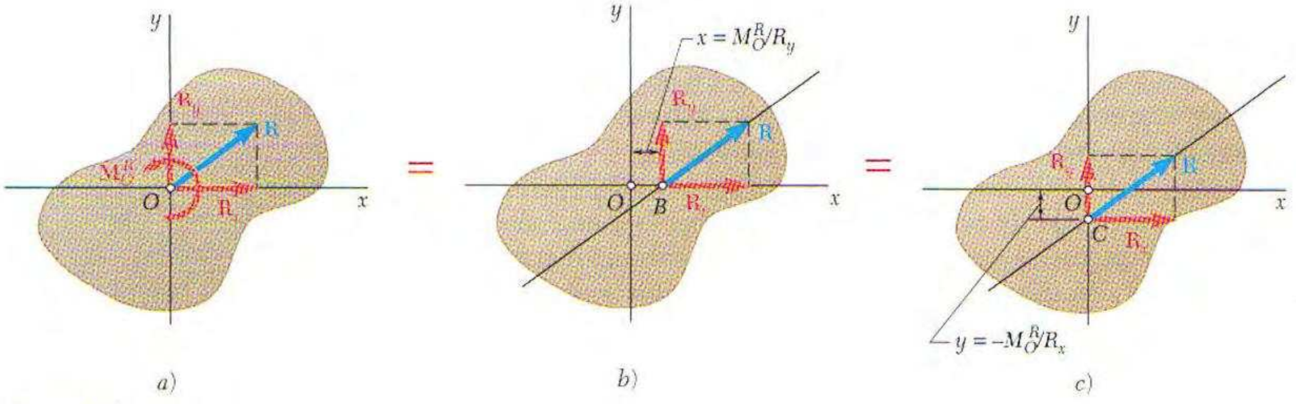


Figura 3.44

Como se señaló en la sección 3.17, la reducción de un sistema de fuerzas se simplifica considerablemente si las fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares. De esta manera, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes (figura 3.44*a*).

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O \qquad (3.59)$$

Para reducir el sistema de fuerzas a una sola fuerza **R**, se expresa que el momento de **R** con respecto a O debe ser igual a $\mathbf{M}_O^R$. Representando con x y y las coordenadas del punto de aplicación de la resultante y teniendo en cuenta la fórmula (3.22) de la sección 3.8, se escribe

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

la cual representa la ecuación de la línea de acción de **R**. También pueden determinarse en forma directa las intersecciones con el eje x y con el eje y de la línea de acción de la resultante, se observa que $\mathbf{M}_O^R$ debe ser igual al momento con respecto a O de la componente y de **R** cuando **R** está unida a B (figura 3.44*b*) e igual también al momento de la componente x cuando **R** está unida a C (figura 3.44*c*).

3. Las *fuerzas paralelas* tienen líneas de acción paralelas y pueden o no tener el mismo sentido. Suponga que las fuerzas son paralelas al eje y (figura 3.45*a*), se observa que su suma **R** también será paralela al eje y. Por otra parte, como el momento de una fuerza dada debe ser perpendicular a dicha fuerza, el momento con respecto a O de cada una de las fuerzas del sistema y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ estará en el plano zx. De esta forma el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ mutuamente

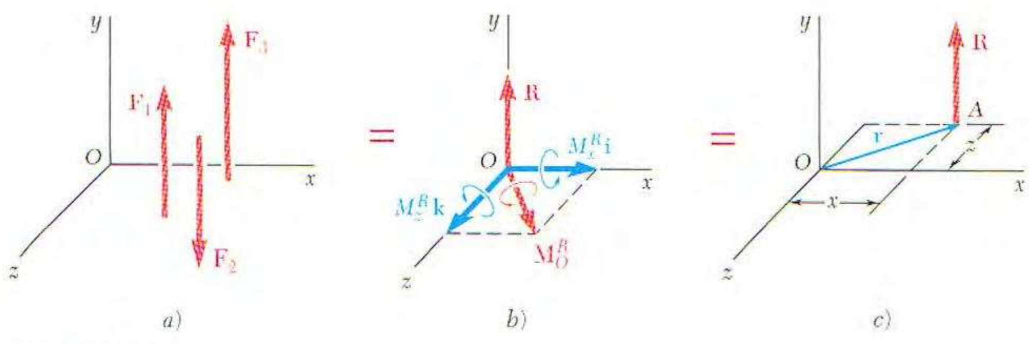


Figura 3.45

perpendiculares (figura 3.45*b*). Estas fuerzas se pueden reducir a una sola fuerza **R** (figura 3.45*c*) o, si $\mathbf{R} = 0$, a un solo par cuyo momento sea igual a $\mathbf{M}_O^R$.

En la práctica, el sistema fuerza-par en *O* está caracterizado por las componentes

$$R_y = \Sigma F_y \qquad M_x^R = \Sigma M_x \qquad M_z^R = \Sigma M_z \tag{3.60}$$

La reducción del sistema a una sola fuerza puede efectuarse moviendo **R** a un nuevo punto de aplicación $A(x, 0, z)$ seleccionado de manera que el momento de **R** con respecto a *O* sea igual a $\mathbf{M}_O^R$, el cual se escribe

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times R_y\mathbf{j} = M_x^R\mathbf{i} + M_z^R\mathbf{k}$$

Al calcular los productos vectoriales e igualar los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes en ambos miembros de la ecuación se obtienen dos ecuaciones escalares que definen las coordenadas de *A*:

$$-zR_y = M_x^R \qquad xR_y = M_z^R$$

Estas ecuaciones expresan que los momentos de **R** con respecto a los ejes *x* y *z* deben ser iguales a M_x^R y M_z^R, respectivamente.



Fotografía 3.4 Las fuerzas paralelas del viento que actúan sobre los señalamientos de la carretera, pueden reducirse a una sola fuerza equivalente. La determinación de esta fuerza puede simplificar el cálculo de las fuerzas que actúan sobre los soportes del marco que sostiene los señalamientos.

*3.21. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE DE TORSIÓN O TORSOR

En el caso general de un sistema de fuerzas en el espacio, el sistema equivalente fuerza-par en *O* consta de una fuerza **R** y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$, ambos distintos de cero, que no son perpendiculares entre sí (figura 3.46*a*). Por tanto, el sistema de fuerzas *no puede* ser reducido a una sola fuerza o a un solo par. Sin embargo, el vector de par puede ser reemplazado por otros dos vectores de par obtenidos al descomponer $\mathbf{M}_O^R$ en una componente $\mathbf{M}_1$ a lo largo de **R** y una componente $\mathbf{M}_2$ en un plano perpendicular a **R** (figura 3.46*b*). Entonces, el vector de par $\mathbf{M}_2$ y la fuerza **R** pueden reemplazarse por una sola fuerza **R** que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. Por tanto, el sistema original de fuerzas se reduce a **R** y al par vector $\mathbf{M}_1$ (figura 3.46*c*); de esta forma, el sistema se reduce a **R** y un par que actúa en el plano perpendicular a **R**. A este sistema fuerza-par, en particular, se le conoce como *llave de torsión* debido a que la combinación resultante de em-

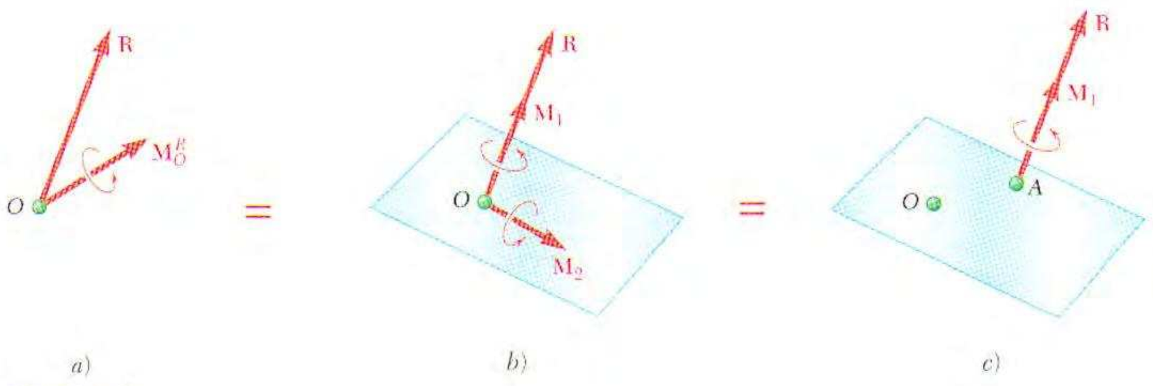


Figura 3.46

puje y torsión es la misma que produciría una llave de torsión real. A la línea de acción de $\mathbf{R}$ se le conoce como *eje de la llave de torsión* y a la razón $p = M_1/R$ se le denomina *paso* de la llave de torsión. Por consiguiente, una llave de torsión está constituida por dos vectores colineales, específicamente, una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \tag{3.61}$$



Fotografía 3.5 La acción de empujar y girar, asociadas con la operación de apretar un tornillo ilustra las líneas de acción colineales de la fuerza y el vector de par que constituyen una llave de torsión o torsor.

Recuerde la expresión (3.35), obtenida en la sección 3.9 para la proyección de un vector sobre la línea de acción de otro vector, se observa que la proyección de $\mathbf{M}_O^R$ sobre la línea de acción de $\mathbf{R}$ es igual a

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

Por tanto, el paso de una llave de torsión puede ser expresado como[†]

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.62}$$

Para definir el eje de una llave de torsión se puede escribir una relación que involucre al vector de posición $\mathbf{r}$ de un punto arbitrario P localizado sobre dicho eje. Fijando la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_1$ en P (figura 3.47) y expresando que el momento con respecto a O de este sistema fuerza-par, es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original de fuerzas, se escribe

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.63}$$

o, de acuerdo con la ecuación (3.61),

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.64}$$

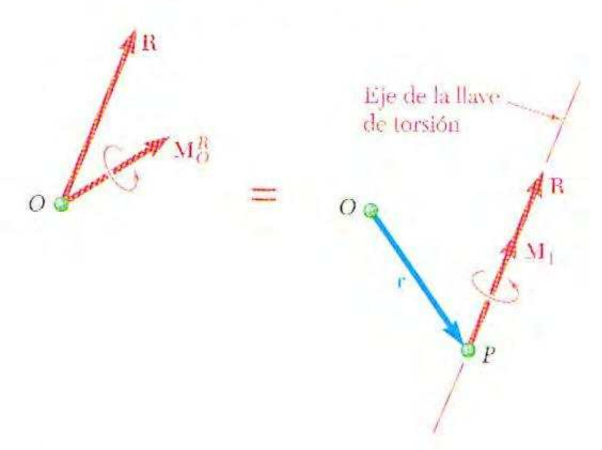


Figura 3.47

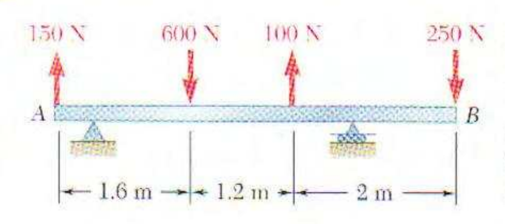
[†]Las expresiones obtenidas para la proyección del vector de par sobre la línea de acción de $\mathbf{R}$ y para el paso de una llave de torsión son independientes de la selección del punto O. Utilizando la relación (3.53) de la sección 3.17, se observa que si se hubiera empleado un punto diferente O', el numerador en (3.62) hubiera sido

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como el triple producto escalar $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ es igual a cero, se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

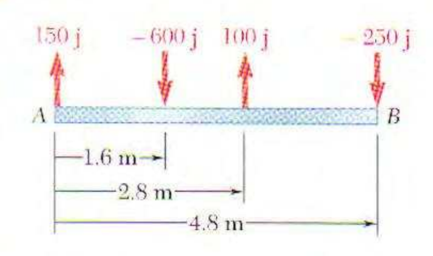
Por tanto, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ es independiente de la selección del punto O.



PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a: *a*) un sistema equivalente fuerza-par en *A*, *b*) un sistema equivalente fuerza-par en *B* y *c*) una sola fuerza o resultante.

Nota: Como las reacciones en los apoyos no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.



SOLUCIÓN

***a*) Sistema fuerza-par en A.** El sistema fuerza-par en *A* equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza **R** y de un par $\mathbf{M}_A^R$ definidos como sigue:

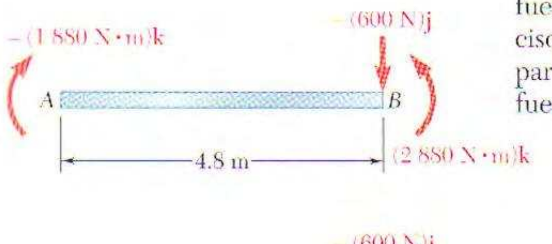
$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$$
$$= (150\text{ N})\mathbf{j} - (600\text{ N})\mathbf{j} + (100\text{ N})\mathbf{j} - (250\text{ N})\mathbf{j} = -(600\text{ N})\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$
$$= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j})$$
$$= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$



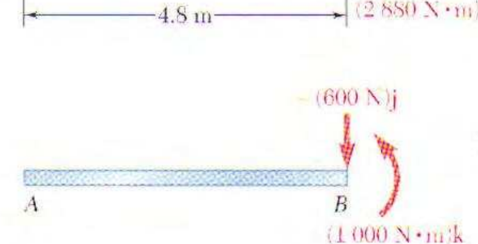
Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *A* está dado por

$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_A^R = 1\,880\text{ N}\cdot\text{m}$ ↻ ◀

***b*) Sistema fuerza-par en *B*.** Se pretende encontrar un sistema fuerza par en *B* equivalente al sistema fuerza-par en *A* determinado en el inciso *a*). La fuerza **R** permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par $\mathbf{M}_B^R$ cuyo momento sea igual al momento con respecto a *B* del sistema fuerza-par encontrado en el inciso *a*). Por tanto, se tiene que



$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R}$$
$$= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (-4.8\text{ m})\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j}$$
$$= -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (2\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = +(1\,000\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

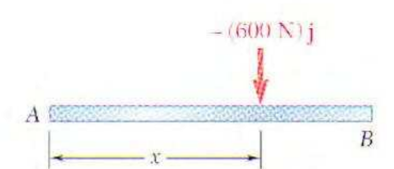


De esta forma, el sistema fuerza-par en *B* está dado por

$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad \mathbf{M}_B^R = 1\,000\text{ N}\cdot\text{m}$ ↺ ◀

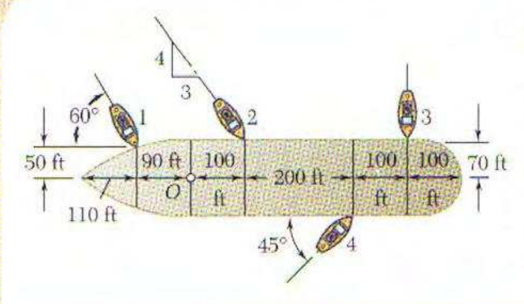
***c*) Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a **R** y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de **R** con respecto a *A* sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. El cual se escribe

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$
$$x\mathbf{i} \times (-600\text{ N})\mathbf{j} = -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$
$$-x(600\text{ N})\mathbf{k} = -(1\,880\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$



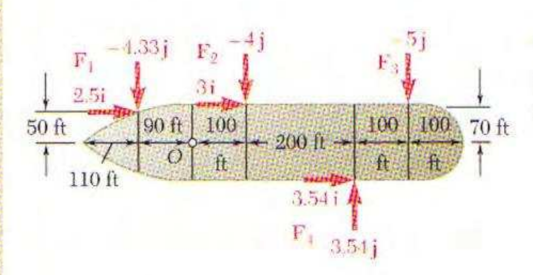
y se concluye que $x = 3.13$ m. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$\mathbf{R} = 600\text{ N}\downarrow \qquad x = 3.13\text{ m}$ ◀



PROBLEMA RESUELTO 3.9

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un trasatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine: *a*) el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor *O* y *b*) el punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

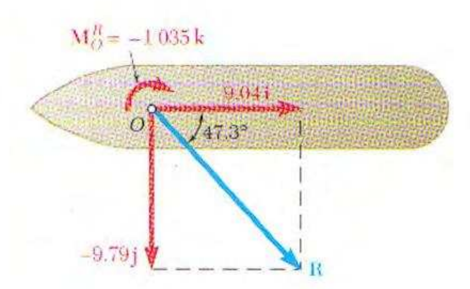


SOLUCIÓN

a) **Sistema fuerza-par en *O*.** Cada una de las fuerzas se descompone en sus componentes en el diagrama mostrado (las unidades empleadas son kips). El sistema fuerza-par en *O* equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un par $\mathbf{M}_O^R$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma\mathbf{F}\\ &= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j})\\ &= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})\\ &= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j})\\ &\quad + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j})\\ &\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j})\\ &\quad + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j})\\ &= (390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k}\\ &= -1\,035\mathbf{k}\end{aligned}$$



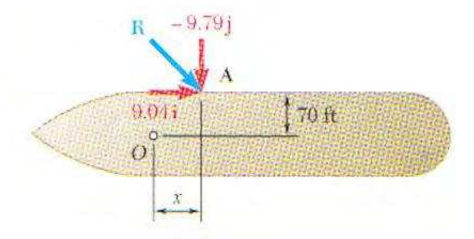
Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en *O* está dado por

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \qquad \mathbf{M}_O^R = -(1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$$

o

$$\mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \measuredangle 47.3° \qquad \mathbf{M}_O^R = 1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \circlearrowright \quad ◀$$

Comentario. Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura, podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama mostrado que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta *O* y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo según el sentido del momento.

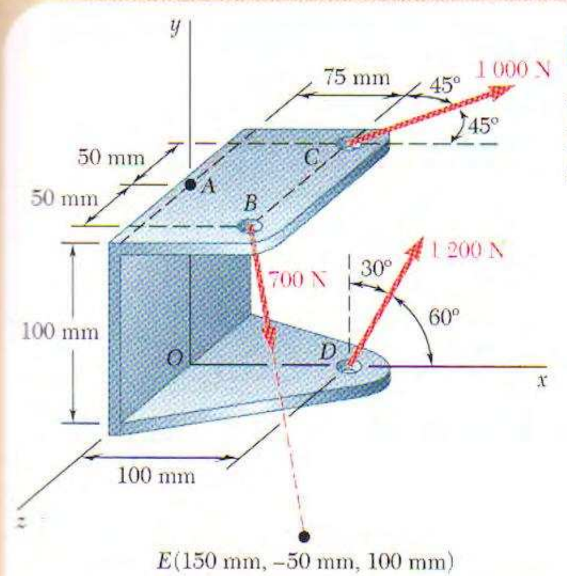


b) **Remolcador único.** La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a $\mathbf{R}$ y su punto de aplicación *A* debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a *O* sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se observa que el vector de posición de *A* es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R\\ (x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) &= -1\,035\mathbf{k}\\ -x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} &= -1\,035\mathbf{k}\end{aligned} \qquad x = 41.1 \text{ ft} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en A.

SOLUCIÓN

Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Observe que $\mathbf{F}_B = (700 \text{ N})\boldsymbol{\lambda}_{BE}$, donde

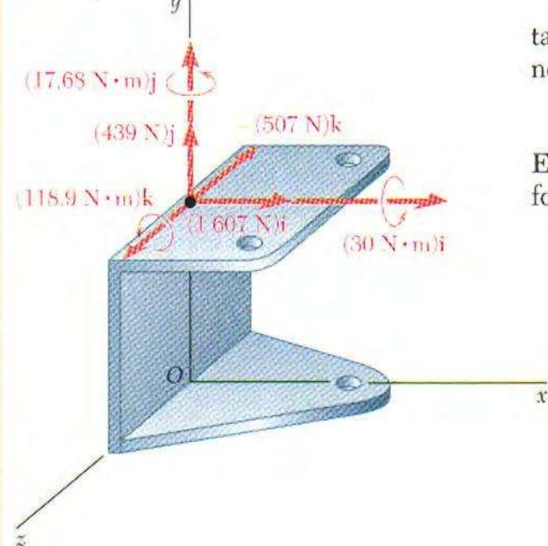
$$\boldsymbol{\lambda}_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Con el uso de metros y newtons se tiene

$$\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} \qquad \mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} \qquad \mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1\,039\mathbf{j}$$

El sistema fuerza-par en A, equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes x, y y z de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = (1\,607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k} \quad ◀$$



El cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.8):

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} \qquad\qquad -45\mathbf{k}$$

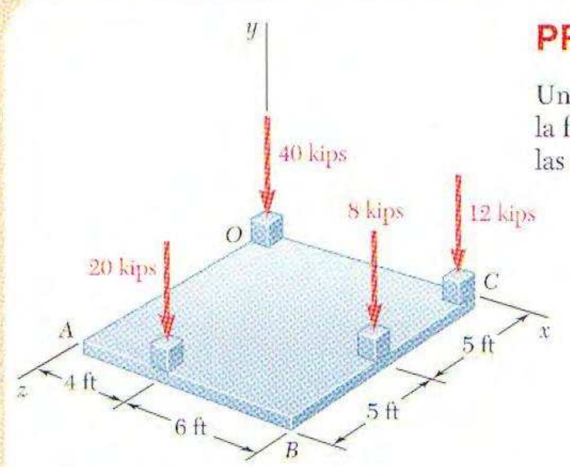
$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = \qquad 17.68\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1\,039 & 0 \end{vmatrix} = \qquad\qquad 163.9\mathbf{k}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (118.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad ◀$$

Las componentes rectangulares de la fuerza $\mathbf{R}$ y del par $\mathbf{M}_A^R$ se muestran en el croquis adjunto.



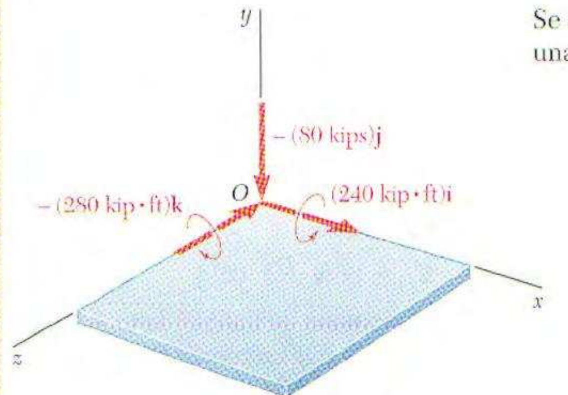
PROBLEMA RESUELTO 3.11

Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

SOLUCIÓN

Primero, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen del sistema de coordenadas O. Este sistema fuerza-par consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que se definen de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_O^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Se determinan los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y los cálculos se arreglan en forma tabular.

r, ft	**F**, kips	**r** × **F**, kip · ft
0	$-40\mathbf{j}$	0
$10\mathbf{i}$	$-12\mathbf{j}$	$-120\mathbf{k}$
$10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$	$-8\mathbf{j}$	$40\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
$4\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$	$-20\mathbf{j}$	$200\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
	$\mathbf{R} = -80\mathbf{j}$	$\mathbf{M}_O^R = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$

Como la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par obtenido puede reducirse aún más a una sola fuerza $\mathbf{R}$. El nuevo punto de aplicación de $\mathbf{R}$ será seleccionado en el plano de la losa de manera que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se representa con $\mathbf{r}$ al vector de posición del punto de aplicación deseado y con x y z a sus coordenadas, se escribe

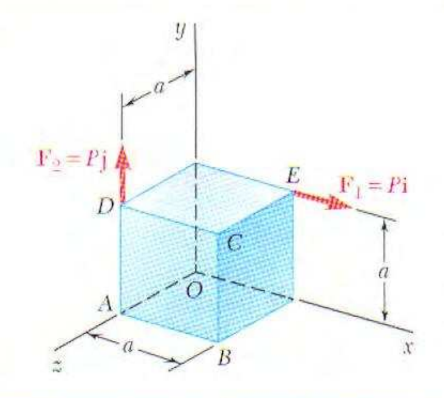
$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$
$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$$
$$-80x\mathbf{k} + 80z\mathbf{i} = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$$

a partir de lo escrito, se encuentra que

$$-80x = -280 \qquad 80z = 240$$
$$x = 3.50 \text{ ft} \qquad z = 3.00 \text{ ft}$$

Se concluye que la resultante del sistema de fuerzas dado es igual a

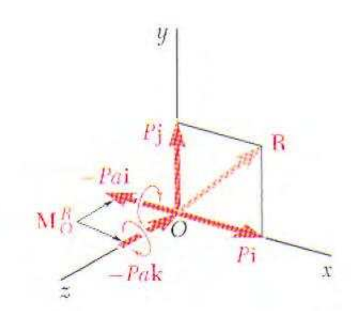
$$\mathbf{R} = 80 \text{ kips} \downarrow \qquad \text{en } x = 3.50 \text{ ft}, z = 3.00 \text{ ft} \quad ◀$$



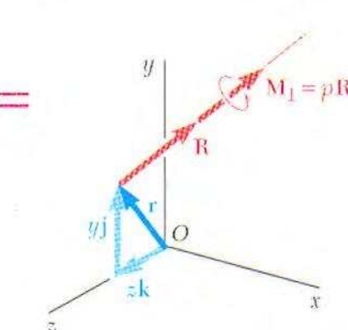
PROBLEMA RESUELTO 3.12

Dos fuerzas de la misma longitud P actúan sobre un cubo con aristas de igual longitud, como se muestra en la figura. Reemplace las dos fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine: *a*) la magnitud y dirección de la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz.

SOLUCIÓN



=



Sistema equivalente fuerza-par en *O*. Primero se determina el sistema equivalente fuerza-par en el origen O. Se observa que los vectores de posición de los puntos de aplicación E y D de las dos fuerzas dadas son: $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. La resultante **R** de las dos fuerzas y el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ de dichas fuerzas con respecto a O están dados por

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad (1)$$

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j}$$

$$= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \qquad (2)$$

***a*) Fuerza resultante R.** A partir de la ecuación (1) y del croquis adjunto se concluye que la fuerza resultante **R** tiene una magnitud $R = P\sqrt{2}$, se encuentra en el plano xy y forma ángulos de 45° con los ejes x y y. Por tanto,

$$R = P\sqrt{2} \qquad \theta_x = \theta_y = 45° \qquad \theta_z = 90° \quad ◄$$

***b*) Paso de la llave de torsión.** De acuerdo con la fórmula (3.62) de la sección 3.21 y las ecuaciones (1) y (2) que se acaban de presentar, se escribe

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \qquad p = -\frac{a}{2} \quad ◄$$

***c*) Eje de la llave de torsión.** A partir de los resultados anteriores y de la ecuación (3.61), se concluye que la llave de torsión consta de la fuerza **R** encontrada en (1) y del vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad (3)$$

Para determinar el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz, se expresa que el momento de la llave de torsión con respecto a O es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

o, al notar que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sustituir **R**, $\mathbf{M}_O^R$ y $\mathbf{M}_1$ a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3),

$$-\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} = -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k}$$

Si se igualan los coeficientes de **k** y, después, los coeficientes de **j**, se encuentra que

$$y = a \qquad z = a/2 \quad ◄$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección estuvo dedicada a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al momento de resolver los problemas propuestos, se pide que se lleven a cabo las operaciones que se describen a continuación.

1. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una fuerza y un par que actúan en un punto dado A. La fuerza $\mathbf{R}$ es la *resultante* del sistema y se obtiene sumando las fuerzas que lo constituyen; el momento del par es el *momento resultante* del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a A de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que

$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} \qquad \mathbf{M}_A^R = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

donde el vector de posición $\mathbf{r}$ se traza desde A hasta *cualquier punto* a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

2. Traslación de un sistema fuerza-par desde un punto A hasta un punto B. Si después de que se había reducido a un sistema fuerza-par en el punto A se desea reducir un sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en el punto B, no se necesita llevar a cabo el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a B. La resultante $\mathbf{R}$ permanece inalterada y el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_B^R$ se puede obtener sumándole a $\mathbf{M}_A^R$ el momento con respecto a B de la fuerza $\mathbf{R}$ aplicada en A [problema resuelto 3.8]. Si se representa con $\mathbf{s}$ el vector trazado desde B hasta A, se puede escribir

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}$$

3. Verificación de que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes o no. Primero se reduce cada sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par *en el mismo punto arbitrario* A (como se explicó en el párrafo 1). Los dos sistemas son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en consideración) si los dos sistemas fuerza-par que se obtuvieron son idénticos, esto es, si

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma\mathbf{M}'_A$$

Se debe reconocer que si no se cumple la primera de estas ecuaciones, esto es, si los dos sistemas no tienen la misma resultante $\mathbf{R}$, estos sistemas no pueden ser equivalentes y, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumple o no la segunda ecuación.

4. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza. Primero se reduce el sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en un punto conveniente A donde dicho sistema consta de la resultante $\mathbf{R}$ y del vector de par $\mathbf{M}_A^R$ (esto se lleva a cabo como se explicó en el punto 1). Se recordará, de la lección anterior, que es posible reducir aún más el sistema a una sola fuerza *sólo si la fuerza* $\mathbf{R}$ *y el*

vector de par $\mathbf{M}_A^R$ *son mutuamente perpendiculares.* Con toda seguridad, éste será el caso para sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son *concurrentes, coplanares* o *paralelas.* En este sentido, la fuerza única que se desea encontrar puede obtenerse del mismo modo que se hizo en varios problemas de la lección anterior, moviendo $\mathbf{R}$ hasta que su momento con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. Con más formalidad se puede escribir que el vector de posición $\mathbf{r}$ trazado desde A hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{R}$ debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas resueltos 3.8, 3.9 y 3.11.

5. *Reducción de un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión.* Si el sistema de fuerzas dado está constituido por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par en un punto A consistirá de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_A^R$ que, en general, *no van a ser mutuamente perpendiculares.* (Para verificar si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, se forma su producto escalar. Si este producto es igual a cero, entonces los vectores en cuestión son mutuamente perpendiculares; de lo contrario, no son perpendiculares entre sí.) Si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par (por tanto, el sistema de fuerzas dado) *no se puede reducir a una sola fuerza.* Sin embargo, el sistema se puede reducir a una llave de torsión —la combinación de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_1$ que están dirigidos a lo largo de una línea de acción común que se conoce como el *eje de la llave de torsión* (figura 3.47)—. El cociente $p = M_1/R$ recibe el nombre de *paso* de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O^R)$, localizado, comúnmente, en el origen O.

b) Determinar el paso p a partir de la ecuación (3.62)

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \tag{3.62}$$

y el vector de par a partir de $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

c) Expresar que el momento con respecto a O de la llave de torsión es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema fuerza-par en O:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \tag{3.63}$$

Esta ecuación permite determinar el punto donde la línea de acción de la llave de torsión interseca un plano especificado puesto que el vector de posición $\mathbf{r}$ está dirigido desde O hasta dicho punto.

Estos pasos se muestran en el problema resuelto 3.12. Aunque pueda parecer difícil la determinación de una llave de torsión y del punto donde su eje interseca a un plano, el proceso es simplemente la aplicación de varias de las ideas y técnicas que han sido desarrolladas en este capítulo. Por tanto, una vez que se ha dominado completamente todo lo relacionado con la llave de torsión, se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.

Problemas

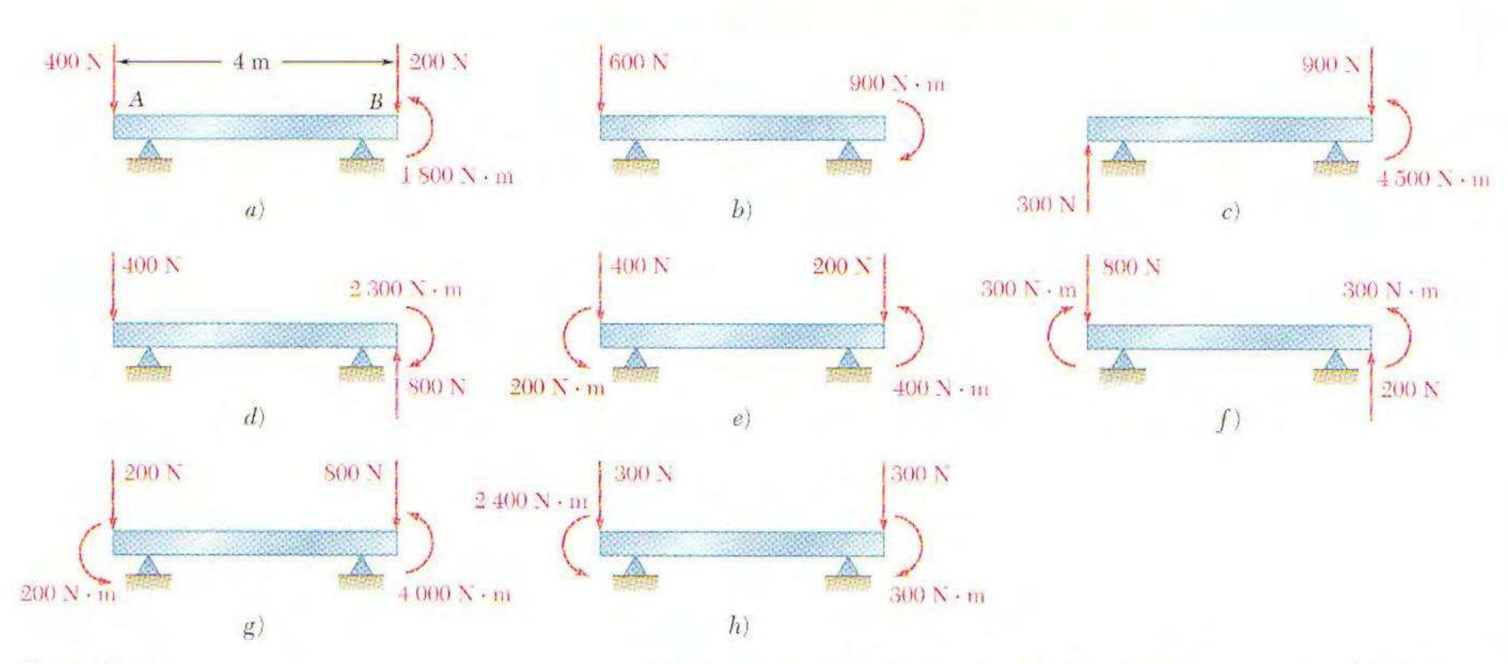


Figura P3.101

3.101 Una viga de 4 m de longitud se somete a una variedad de cargas. *a*) Reemplace cada tipo de carga por un sistema equivalente fuerza-par en el extremo *A* de la viga. *b*) ¿Cuáles de las cargas son equivalentes?

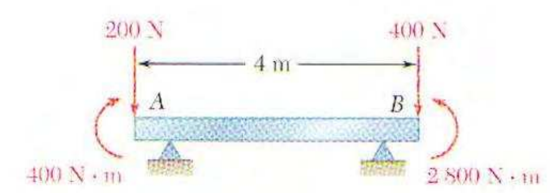


Figura P3.102

3.102 Una viga de 4 m de longitud se carga de la forma mostrada en la figura. Determine qué carga del problema 3.101 es equivalente a esta carga.

3.103 Determine la fuerza sencilla equivalente y la distancia desde el punto *A* hasta su línea de acción para la viga y la carga de *a*) del problema 3.101*b*), *b*) del problema 3.101*d*, *c*) del problema 3.101*e*).

3.104 Cinco sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas de la placa de metal, que se ha moldeado en la forma que se muestra en la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a una fuerza $\mathbf{F} = (10 \text{ lb})\mathbf{i}$ y a un par de momento $\mathbf{M} = (15 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} + (15 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$ ubicado en el origen.

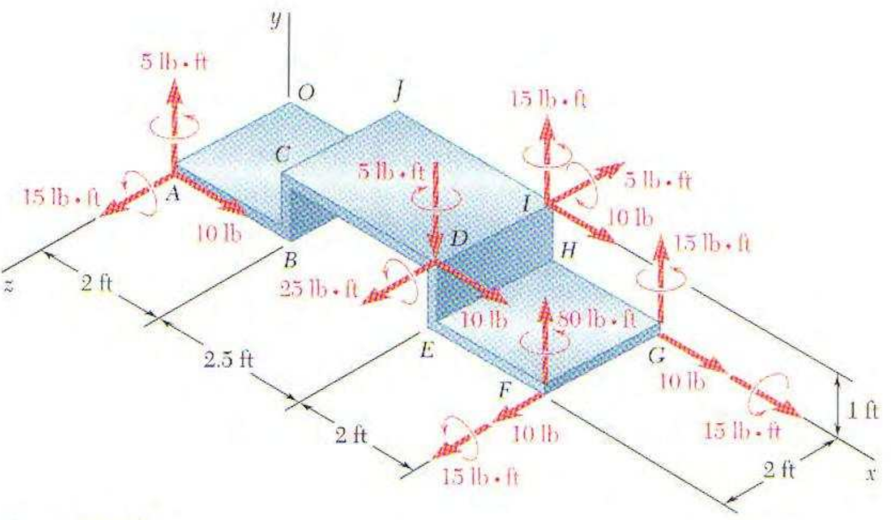


Figura P3.104

3.105 Los pesos de dos niños sentados en los extremos A y B de un balancín son 84 lb y 64 lb, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de las fuerzas de los pesos de los tres niños debe pasar por C, y si se sabe que el peso del tercer niño es *a*) 60 lb, *b*) 52 lb.

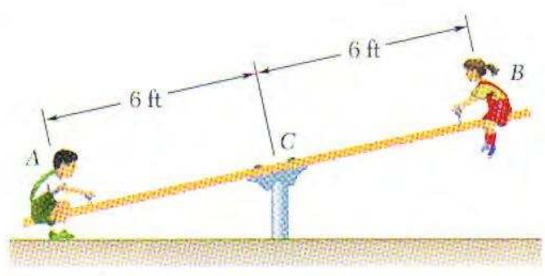


Figura P3.105

3.106 Tres lámparas de escenario se colocan sobre el tubo mostrado en la figura. El peso de las lámparas en A y B es de 4.1 lb, mientras que la lámpara en C pesa 3.5 lb. *a*) Si $d = 25$ in., determine la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante de los pesos de las tres lámparas. *b*) Determine el valor de d si la resultante de los pesos debe pasar por el punto medio del tubo.

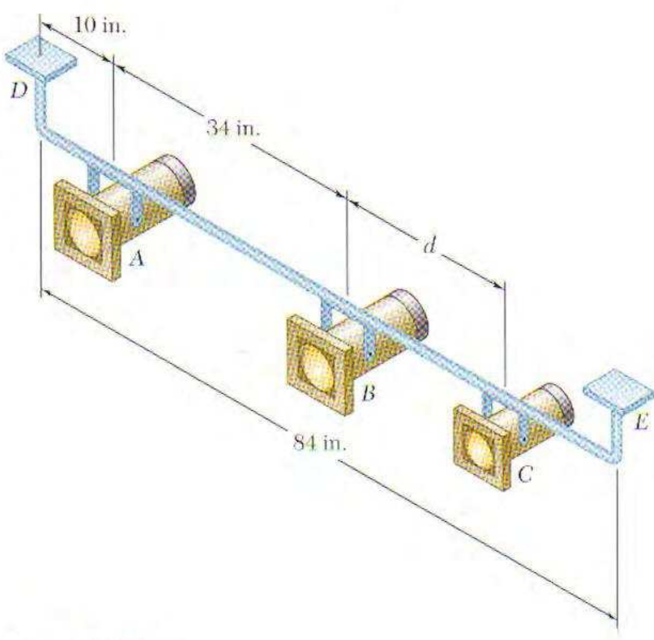


Figura P3.106

3.107 Una viga soporta tres cargas de magnitud dada y una cuarta carga cuya magnitud está en función de la posición. Si $b = 1.5$ m y las cargas se deben reemplazar por una sola fuerza equivalente, determine *a*) el valor de a tal que la distancia desde el soporte A hasta la línea de acción de la fuerza equivalente sea máxima, *b*) la magnitud de la fuerza equivalente y su punto de aplicación sobre la viga.

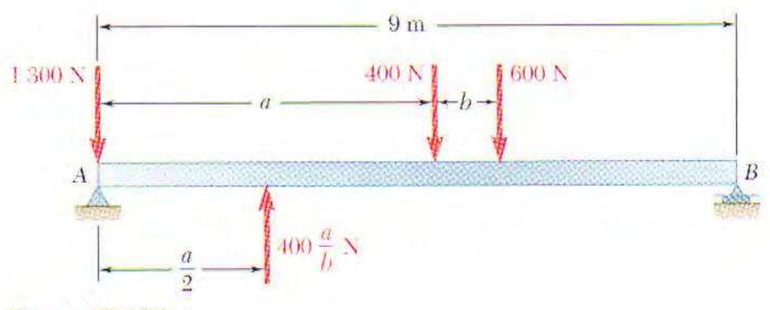


Figura *P3.107*

3.108 El engrane C está rígidamente unido al brazo AB. Si las fuerzas y los pares mostrados se pueden reducir a una sola fuerza equivalente en A, determine dicha fuerza equivalente y la magnitud del par **M**.

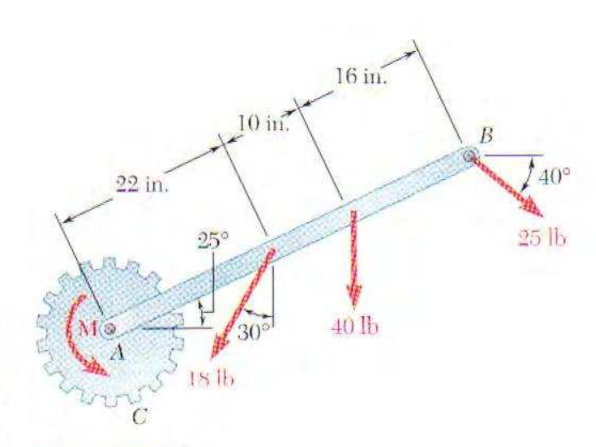


Figura P3.108

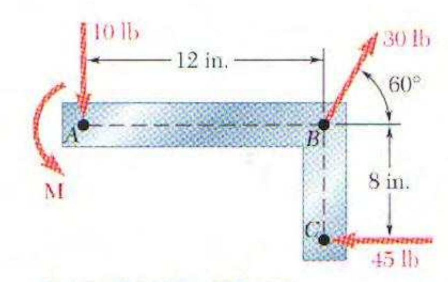


Figura P3.109 y P3.110

3.109 Un par de magnitud $M = 54$ lb · in y las tres fuerzas mostradas en la figura se aplican a una ménsula angular. *a*) Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas. *b*) Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca a la línea *AB* y a la línea *BC*.

3.110 Un par **M** y las tres fuerzas mostradas en la figura se aplican a una ménsula angular. Encuentre el momento del par si la línea de acción de la resultante del sistema de fuerzas debe pasar a través *a*) del punto *A*, *b*) del punto *B*, *c*) del punto *C*.

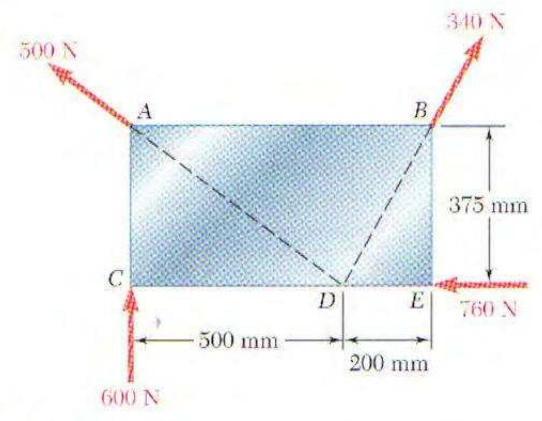


Figura P3.111

3.111 Cuatro fuerzas actúan sobre la placa de 700 × 375 mm como se muestra en la figura. *a*) Encuentre la resultante de estas fuerzas. *b*) Localice los dos puntos en los que la línea de acción de la resultante interseca con el borde de la placa.

3.112 Retome el problema 3.111, y ahora suponga que la fuerza de 760 N se dirige hacia la derecha.

3.113 Una armadura resiste las cargas mostradas en la figura. Determine la fuerza equivalente a las fuerzas que actúan sobre la estructura y el punto de intersección de su línea de acción con la línea que pasa por los puntos *A* y *G*.

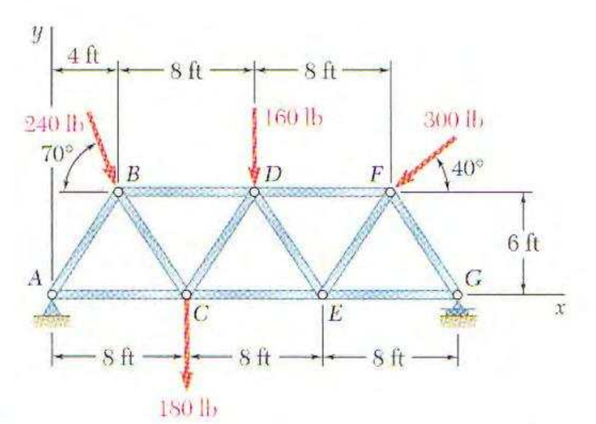


Figura P3.113

3.114 Las poleas *A* y *B* se montan sobre la ménsula *CDEF*. La tensión en cada lado de las dos bandas es la que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas por una sola fuerza equivalente y determine dónde se interseca su línea de acción con el borde inferior del soporte.

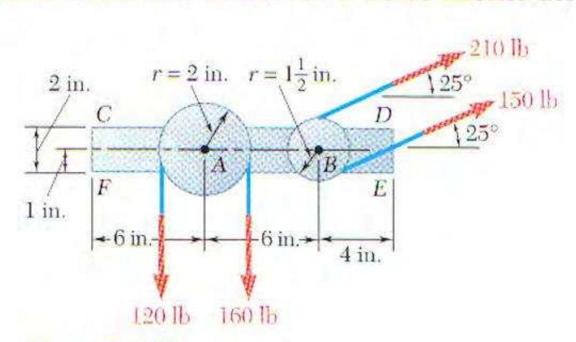


Figura *P3.114*

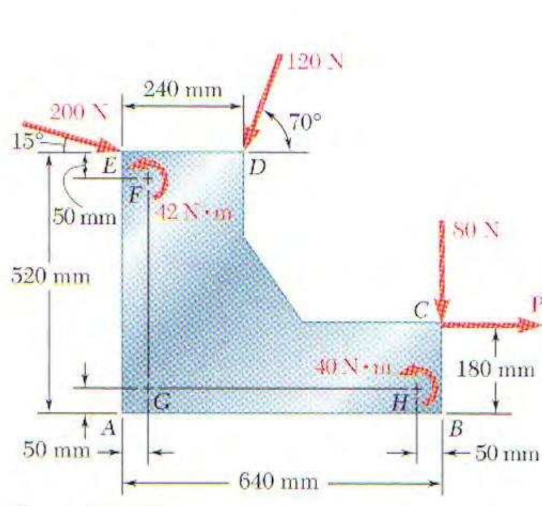


Figura P3.115

3.115 Un componente de máquina se somete a las fuerzas y pares mostrados en la figura. El componente debe mantenerse en su lugar mediante un solo remache que puede resistir una fuerza pero no un par. Para $P = 0$, determine la ubicación del orificio para el remache si éste debe localizarse *a*) sobre la línea *FG*, *b*) sobre la línea *GH*.

3.116 Retome el problema 3.115, y ahora suponga que $P = 60$ N.

3.117 Un motor de 32 lb se monta sobre el piso. Encuentre la resultante del peso y las fuerzas ejercidas sobre la banda, y determine el punto donde la línea de acción de la resultante interseca con el piso.

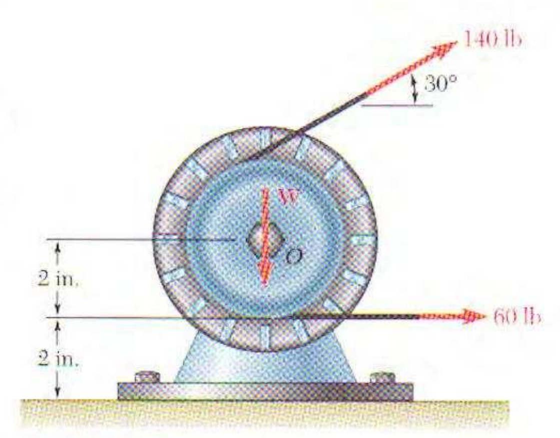


Figura *P3.117*

3.118 Cuando el seguidor AB rueda a lo largo de la superficie del elemento C, ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ constante y perpendicular a la superficie. *a*) Reemplace $\mathbf{F}$ por un sistema equivalente fuerza-par en el punto D obtenido al dibujar la perpendicular desde el punto de contacto hasta el eje x. *b*) Para $a = 1$ m y $b = 2$ m, determine el valor de x para el cual el momento del sistema equivalente fuerza-par en D es máximo.

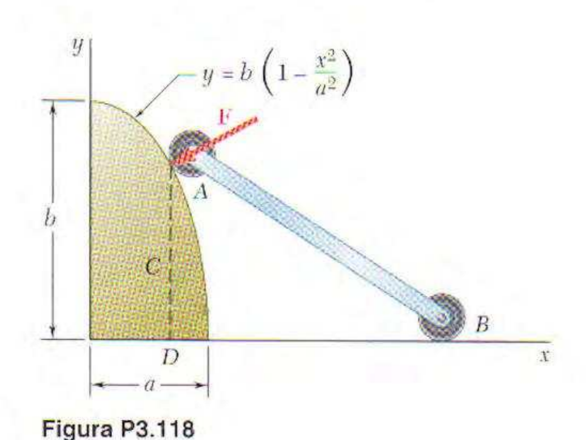


Figura P3.118

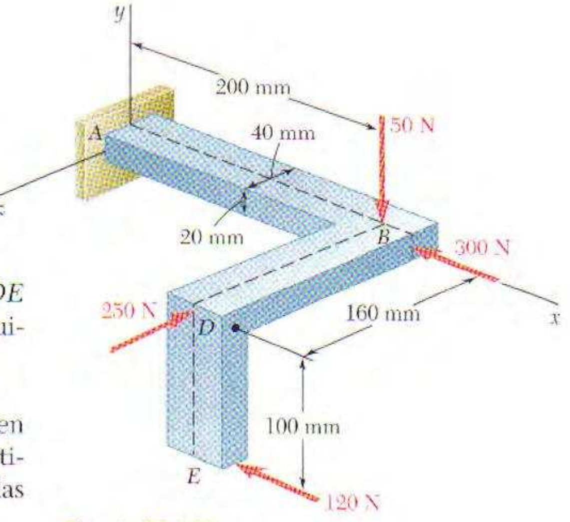


Figura P3.119

3.119 Cuatro fuerzas se aplican al componente de máquina $ABDE$ como se muestra en la figura. Reemplace estas fuerzas por un sistema equivalente fuerza-par en A.

3.120 Dos poleas de 150 mm de diámetro se montan sobre el eje en línea AD. Las bandas de las poleas B y C están contenidas en planos verticales paralelos al plano yz. Reemplace las fuerzas de las bandas mostradas por un sistema fuerza-par equivalente en A.

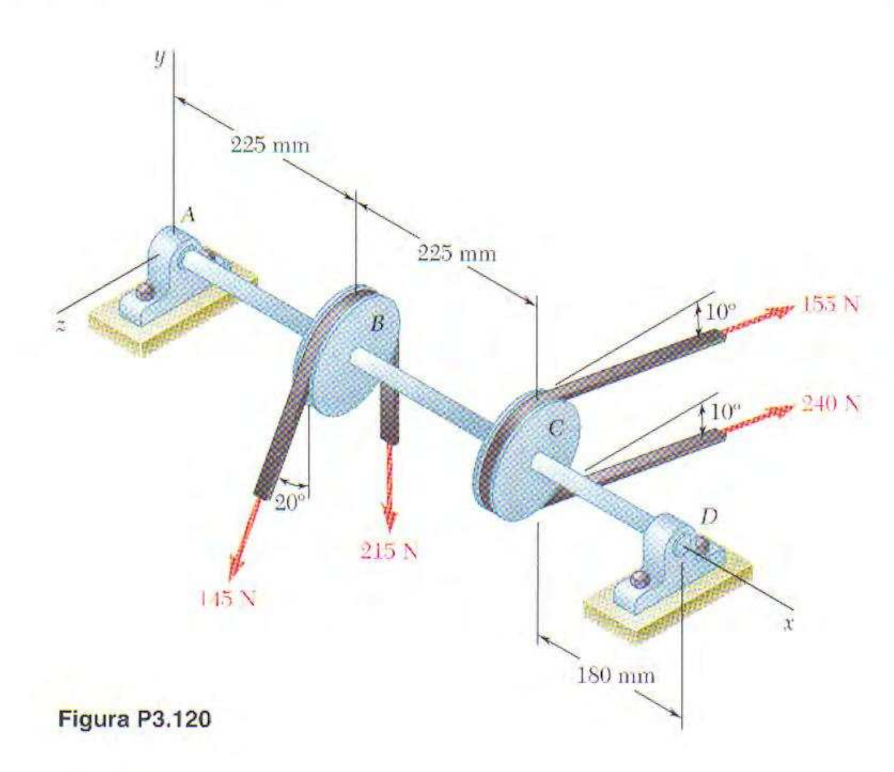


Figura P3.120

3.121 Al usar un sacapuntas manual, un estudiante ejerce sobre éste las fuerzas y el par que se muestran en la figura. *a*) Determine las fuerzas ejercidas en *B* y en *C* si se sabe que las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en *A* que consta de la fuerza $\mathbf{R} = (2.6 \text{ lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (0.7 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1.0 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (0.72 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$. *b*) Encuentre los valores correspondientes de R_y y M_x.

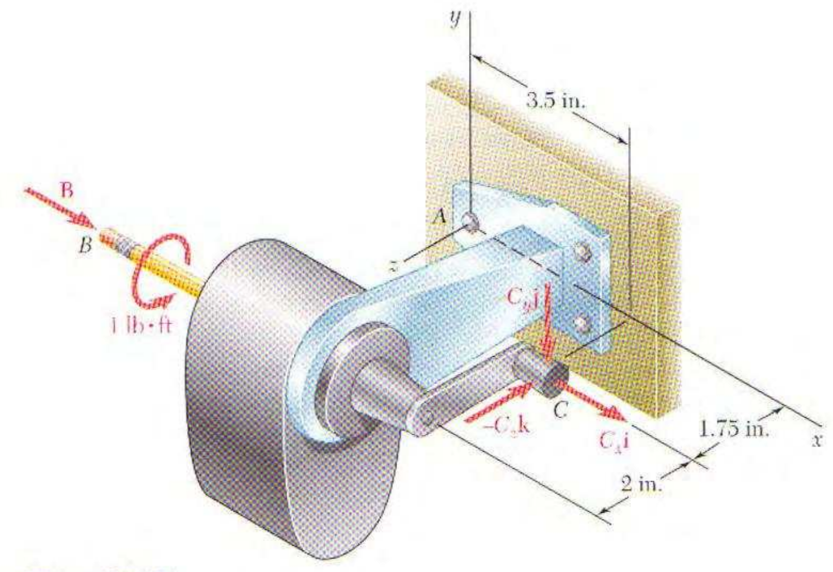


Figura P3.121

3.122 Un mecánico usa una llave tipo pata de gallo para aflojar un perno ubicado en *C*. El mecánico sostiene el maneral por los puntos *A* y *B*, ejerciendo sobre esos puntos las fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en *C* que consta de la fuerza $\mathbf{C} = -(8 \text{ lb})\mathbf{i} + (4 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_C = (360 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i}$, determine las fuerzas aplicadas en *A* y *B* cuando $A_z = 2$ lb.

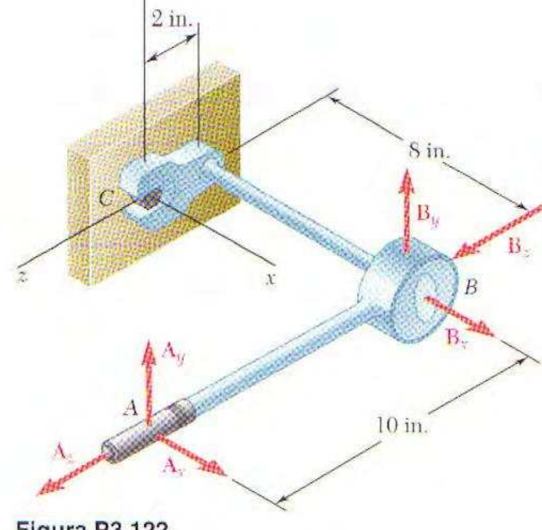


Figura P3.122

3.123 Un puntal ajustable *BC* se utiliza para colocar una pared en posición vertical. Si el sistema fuerza-par que se ejerce sobre la pared es tal que $R = 21.2$ lb y $M = 13.25$ lb · ft, encuentre un sistema fuerza-par equivalente en *A*.

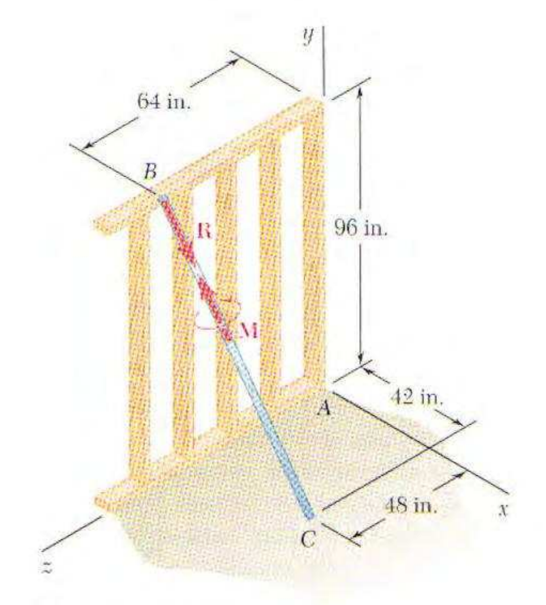


Figura *P3.123*

3.124 Un mecánico reemplaza el sistema de escape de un automóvil al asegurar firmemente el convertidor catalítico FG a sus ménsulas de montaje H e I para después ensamblar de manera holgada los mofles y los tubos de escape. Para colocar el tubo de salida AB, lo empuja hacia adentro y hacia arriba en A mientras lo jala hacia abajo en B. *a*) Reemplace el sistema de fuerzas dado por un sistema fuerza-par equivalente en D. *b*) Determine si el tubo CD tiende a rotar en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido inverso en relación con el mofle DE, según lo observa el mecánico.

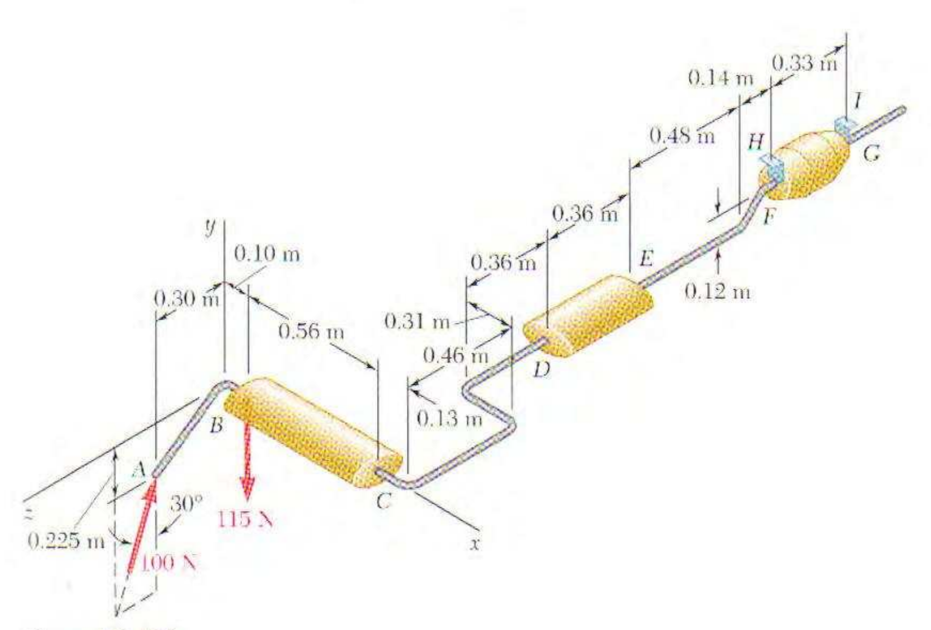


Figura P3.124

3.125 Para el sistema de escape del problema 3.124, *a*) reemplace el sistema de fuerzas dado por un sistema fuerza-par equivalente en F, donde el tubo de escape está conectado con el convertidor catalítico, *b*) determine si el tubo EF tiende a rotar en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido inverso, según lo observa el mecánico.

3.126 El cabezal del taladro radial originalmente estaba colocado con el brazo AB paralelo al eje z, mientras que la broca y el portabrocas estaban colocados paralelos al eje y. El sistema se rotó 25° respecto del eje y y 20° alrededor de la línea de centros del brazo horizontal AB, hasta que quedó en la posición mostrada. El proceso de taladrado comienza al encender el motor y rotar la manivela hasta que la broca entra en contacto con la pieza de trabajo. Reemplace la fuerza y el par ejercidos por el taladro por un sistema equivalente fuerza-par en el centro O de la base de la columna vertical.

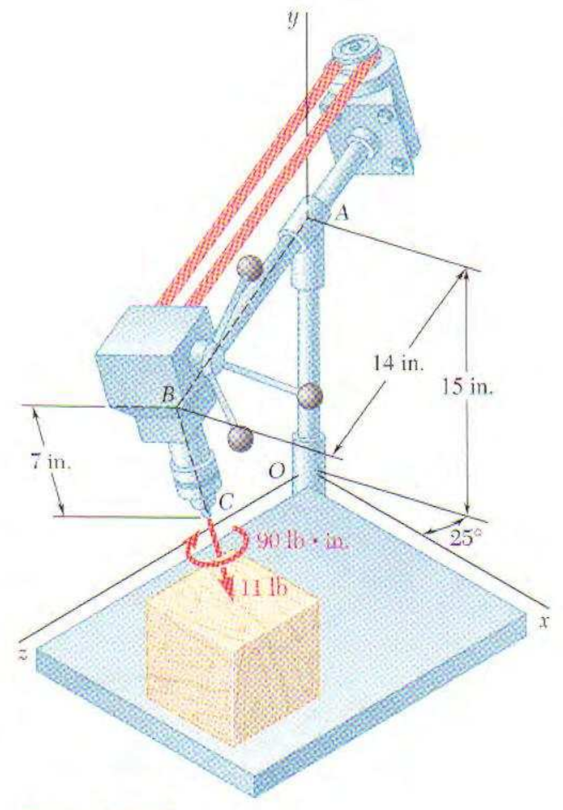


Figura *P3.126*

3.127 Tres niños se encuentran parados en la balsa de 5 × 5 m. Si el peso de los niños que están parados en A, B y C es de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente, determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de los tres pesos.

3.128 Tres niños se encuentran parados en la balsa de 5 × 5 m. Los pesos de los niños que están parados en A, B y C son de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente. Si un cuarto niño que pesa 425 N se sube a la balsa, determine dónde debe estar parado si los otros niños permanecen en la posición mostrada y si la línea de acción de la resultante del peso de los cuatro niños debe pasar por el centro de la balsa.

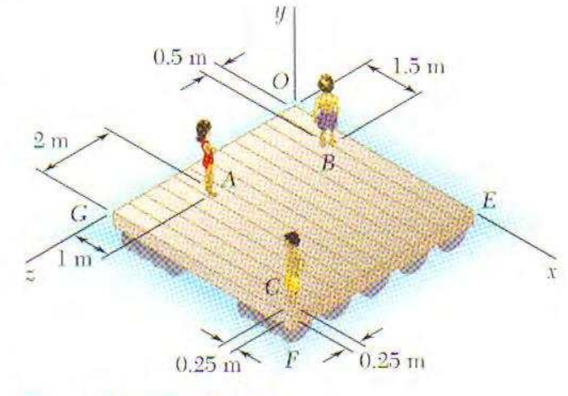


Figura P3.127 y P3.128

3.129 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas del viento cuando $a = 1$ ft y $b = 12$ ft.

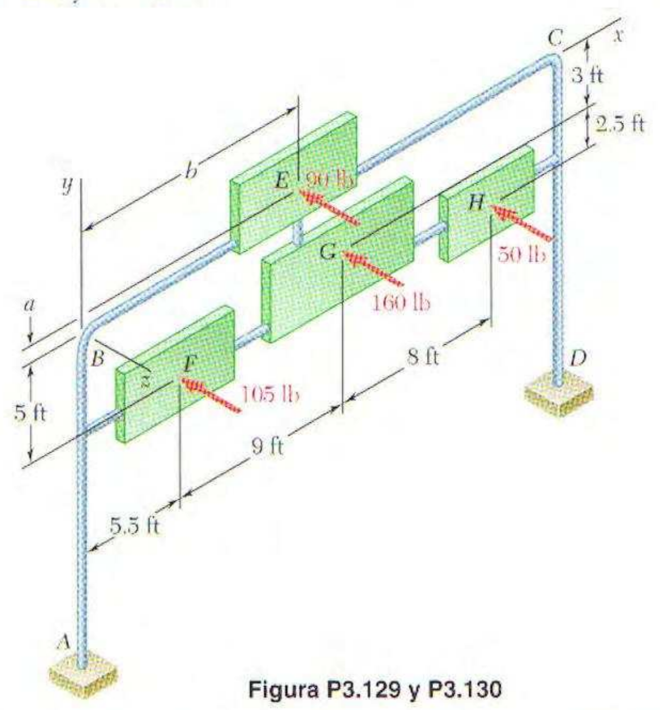


Figura P3.129 y P3.130

3.130 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine a y b tales que el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas se encuentre en G.

***3.131** Un grupo de estudiantes carga la plataforma de un tráiler de 2 × 3.3 m con dos cajas de 0.66 × 0.66 × 0.66 m y con una caja de 0.66 × 0.66 × 1.2 m. Cada una de las cajas se coloca en la parte posterior del tráiler, de tal forma que queden alineadas con la parte trasera y con los costados del tráiler. Determine la carga mínima que los estudiantes deben colocar en una caja adicional de 0.66 × 0.66 × 1.2 m y el sitio en el tráiler donde deben asegurarla si ninguna parte de las cajas debe salirse de los costados. Además, suponga que cada caja está cargada uniformemente y que la línea de acción de la resultante del peso de las cuatro cajas pasa por el punto de intersección de las líneas centrales y el eje del tráiler. (*Sugerencia*: Tome en cuenta que las cajas pueden colocarse sobre sus extremos o sobre sus costados.)

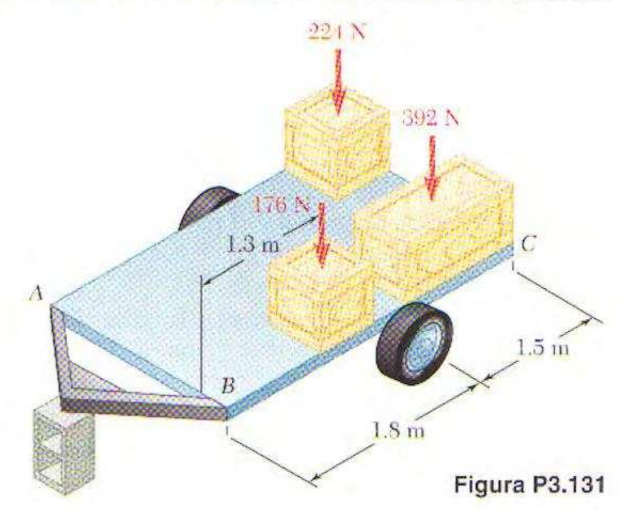


Figura P3.131

*3.132 Retome el problema 3.131 si los estudiantes desean colocar todo el peso posible en una cuarta caja y que al menos uno de los costados de la caja coincida con un costado del tráiler.

*3.133 Un cubo de lado a está sometido a tres fuerzas de la misma magnitud P en las direcciones mostradas en la figura. Reemplace las tres fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine a) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el eje de la llave de torsión.

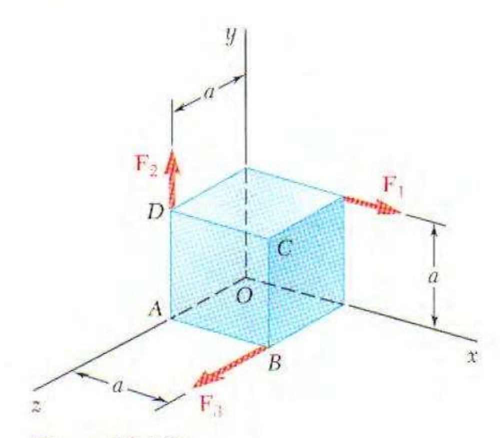


Figura P3.133

*3.134 Sometida a tres fuerzas una pieza de metal laminado se dobla en la forma que se muestra en la figura. Si las fuerzas tienen la misma magnitud P, reemplácelas por una llave de torsión equivalente y determine a) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el eje de la llave de torsión.

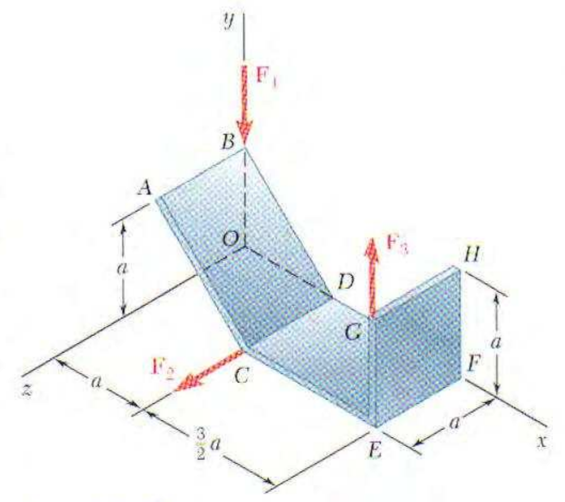


Figura P3.134

*3.135 y *3.136 Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos mediante los que se sujeta una placa de metal a un bloque de madera. Reduzca las fuerzas y los pares a una llave de torsión equivalente y determine a) la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xz.

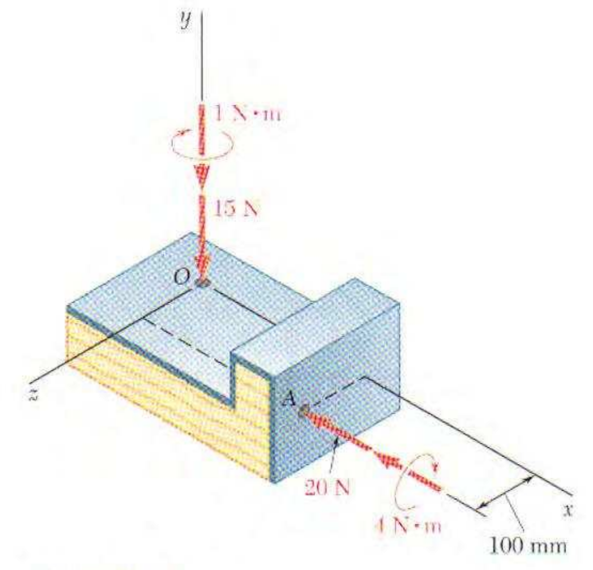


Figura P3.135

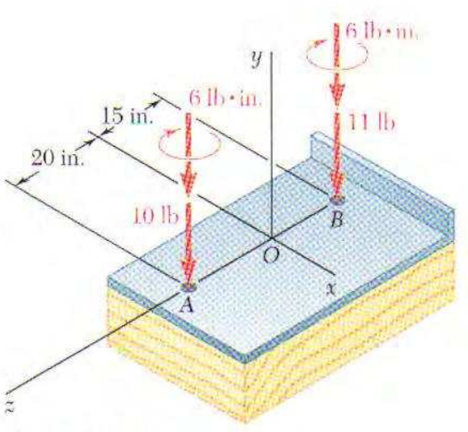


Figura P3.136

***3.137 y *3.138** Dos pernos A y B se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente y determine *a*) la resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xz.

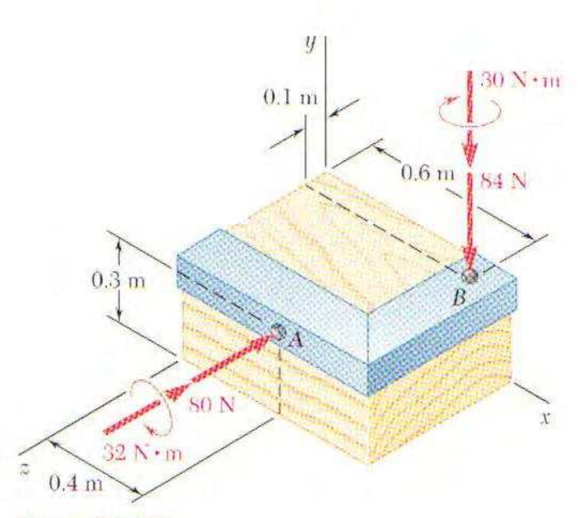


Figura P3.137

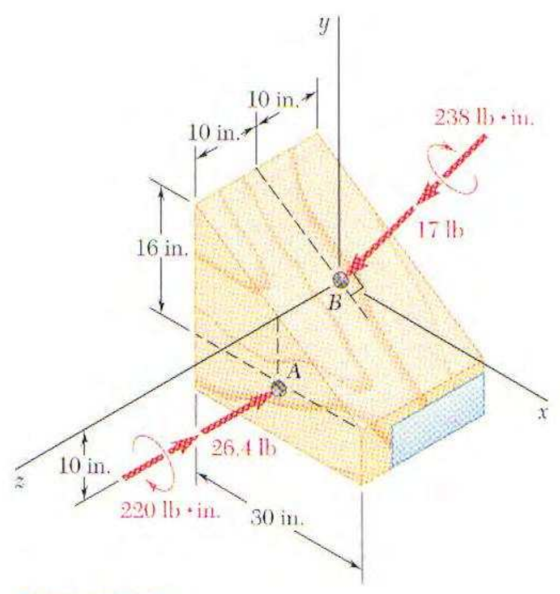


Figura *P3.138*

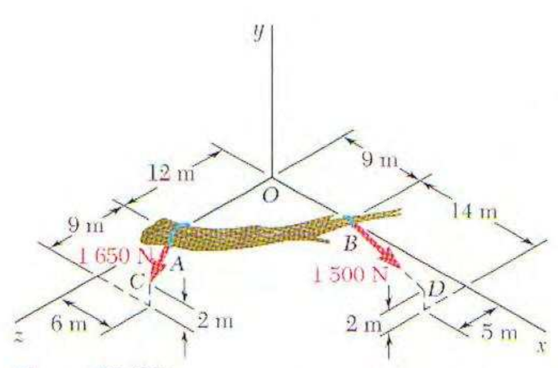


Figura *P3.139*

***3.139** Dos cuerdas atadas en A y B se usan para mover el tronco de un árbol caído como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas ejercidas por las cuerdas por una sola llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz.

***3.140** Un asta bandera se sostiene mediante tres cables atirantados. Si las tensiones en los cables tienen la misma magnitud P, reemplace las fuerzas ejercidas sobre el asta por una llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xz.

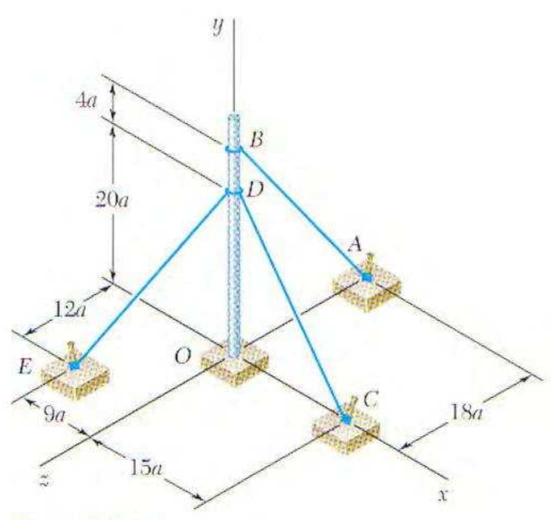


Figura P3.140

***3.141 y *3.142** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente **R**. Si esto es posible, determine **R** y el punto donde la línea de acción de **R** interseca al plano *yz*. Si la reducción no es posible, reemplace el sistema dado por una llave de torsión equivalente y determine su resultante, su paso y el punto donde su eje interseca al plano *yz*.

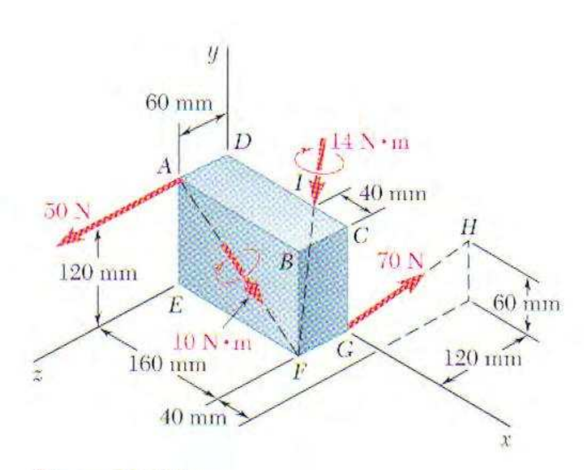


Figura P3.141

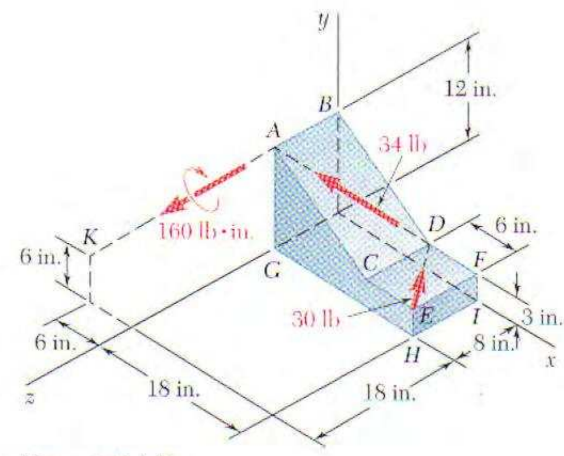


Figura *P3.142*

***3.143** Reemplace la llave de torsión mostrada en la figura por un sistema equivalente que conste de dos fuerzas perpendiculares al eje *y* aplicadas, respectivamente, en *A* y en *B*.

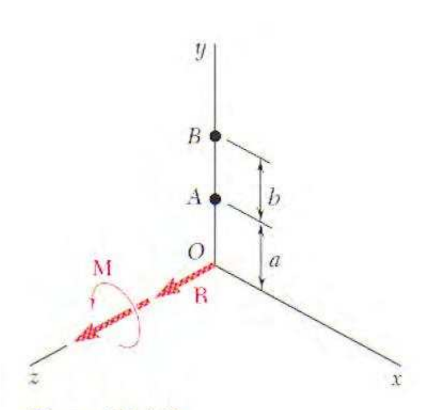


Figura P3.143

***3.144** Demuestre que, en general, una llave de torsión puede ser reemplazada por dos fuerzas, seleccionadas de tal forma que una pase a través de un punto dado, mientras que la otra esté contenida en un plano dado.

***3.145** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas perpendiculares, una de las cuales está aplicada en un punto dado.

***3.146** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas, una de las cuales tiene una línea de acción predefinida.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

Principio de transmisibilidad

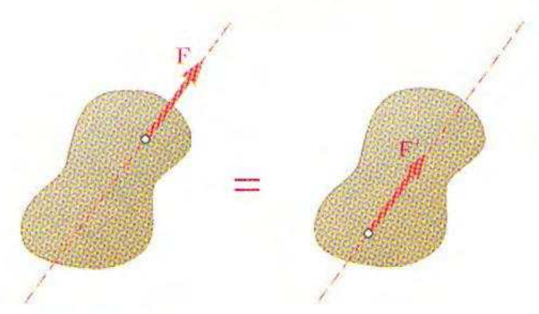


Figura 3.48

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas *externas* e *internas* [sección 3.2] y se vio que, de acuerdo con el *principio de transmisibilidad*, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción [sección 3.3]. En otras palabras, dos fuerzas **F** y **F'**, que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.48). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

Producto vectorial de dos vectores

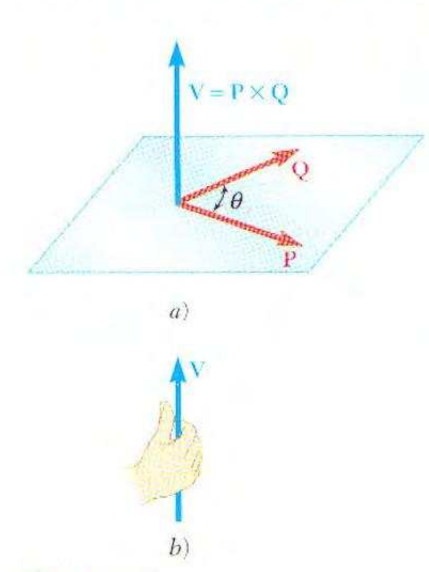


Figura 3.49

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* [sección 3.4]. El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dos vectores **P** y **Q** se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a **P** y a **Q** (figura 3.49), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \qquad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la parte terminal de **V** verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector **P** colineal con el vector **Q** como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores **P**, **Q** y **V** —considerados en ese orden— forman una *tríada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales **Q × P** y **P × Q** están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

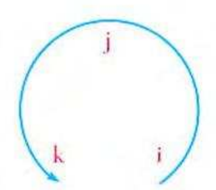


Figura 3.50

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Componentes rectangulares del producto vectorial

Las *componentes rectangulares del producto vectorial* **V** de dos vectores **P** y **Q** fueron expresadas como sigue [sección 3.5]:

$$\begin{aligned} V_x &= P_yQ_z - P_zQ_y \\ V_y &= P_zQ_x - P_xQ_z \\ V_z &= P_xQ_y - P_yQ_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

Momento de una fuerza con respecto a un punto

El *momento de una fuerza* **F** *con respecto a un punto* O se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

donde **r** es el *vector de posición* trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza **F** (figura 3.51). Si se representa con θ el ángulo entre las líneas de acción de **r** y **F**, se encontró que la magnitud del momento de **F** con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de **F**.

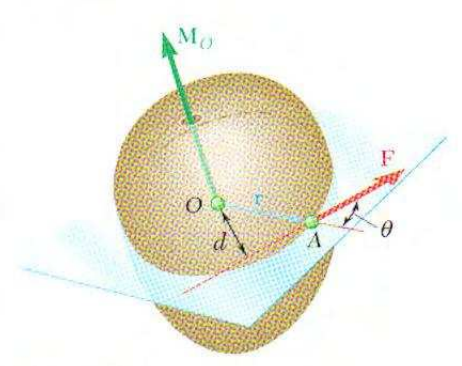


Figura 3.51

Componentes rectangulares del momento

Las *componentes rectangulares del momento* $\mathbf{M}_O$ *de una fuerza* **F** se expresaron [sección 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde x, y y z son las componentes del vector de posición **r** (figura 3.52). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

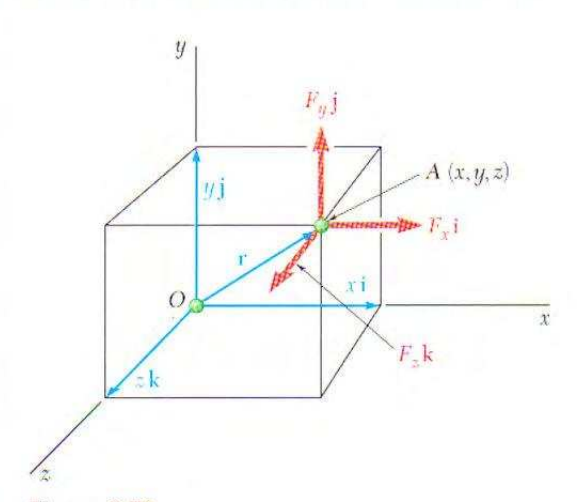


Figura 3.52

En el caso más general del momento de una fuerza **F** aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B, se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de *problemas que involucran únicamente a dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza **F** se encuentra en el plano xy. Su momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \qquad (3.23)$$

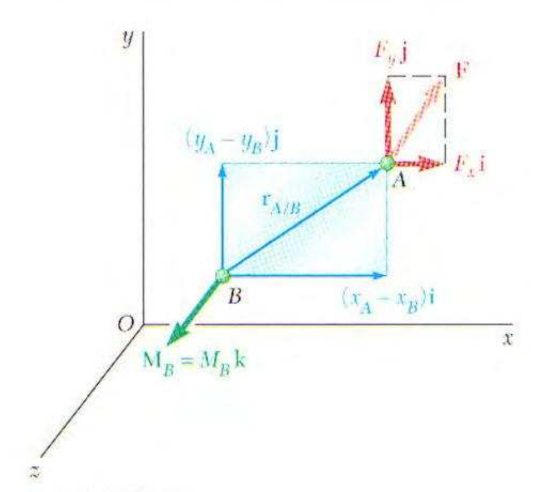


Figura 3.53

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

Producto escalar de dos vectores

El *producto escalar* de dos vectores **P** y **Q** [sección 3.9] se denotó por **P · Q** y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \qquad (3.24)$$

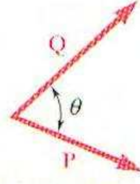


Figura 3.54

donde θ es el ángulo entre **P** y **Q** (figura 3.54). Se expresó el producto escalar de **P** y **Q** en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \qquad (3.30)$$

Proyección de un vector sobre un eje

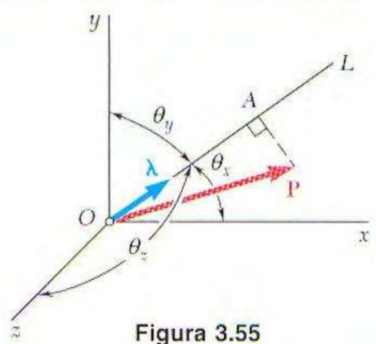


Figura 3.55

La *proyección de un vector* **P** *sobre un eje* OL (figura 3.55) se puede obtener formando el producto escalar de **P** y el vector unitario **λ** a lo largo de OL. Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \qquad (3.36)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \qquad (3.37)$$

donde θ_x, θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje OL con los ejes coordenados.

Producto triple escalar de tres vectores

El *producto triple escalar* de los tres vectores **S**, **P** y **Q** se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \qquad (3.38)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q** [sección 3.10]. Se mostró que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

Momento de una fuerza con respecto a su eje

El *momento de una fuerza* **F** *con respecto a un eje* OL [sección 3.11] se definió como la proyección OC sobre OL del momento $\mathbf{M}_O$ de la fuerza **F** (figura 3.56), esto es, se definió como el producto triple escalar del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$, el vector de posición **r** y la fuerza **F**:

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

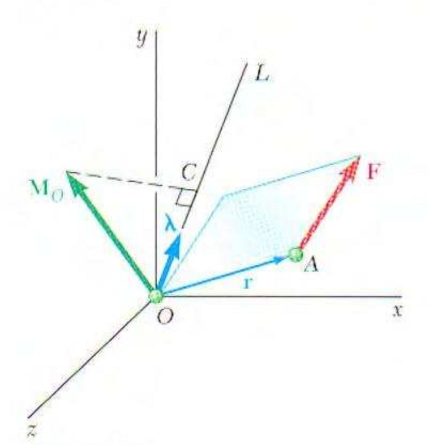


Figura 3.56

Con el uso de la forma de determinante para el producto triple escalar, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL
x, y, z = componentes de **r**
F_x, F_y, F_z = componentes de **F**

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Pares

Se dice que *dos fuerzas* **F** *y* −**F** *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* [sección 3.12]. Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector **M** perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.57).

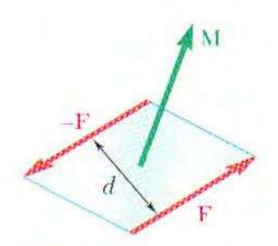


Figura 3.57

Dos pares que tienen el mismo momento **M** son *equivalentes*, esto es, dichos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado [sección 3.13]. La suma de dos pares también es un par [sección 3.14] y el momento **M** del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ de los pares originales [problema resuelto 3.6]. Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el *vector de par*, igual en magnitud y dirección al momento **M** del par [sección 3.15]. Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen O y se puede separar en componentes (figura 3.58).

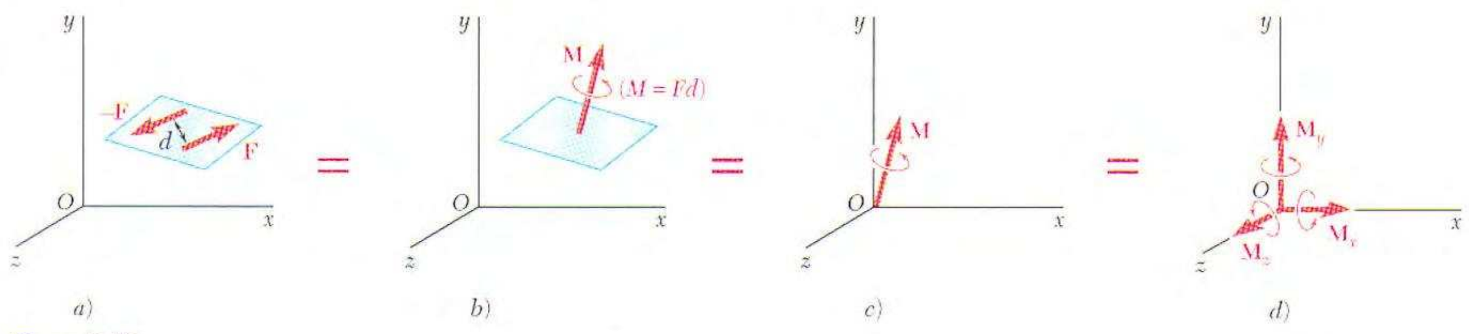


Figura 3.58

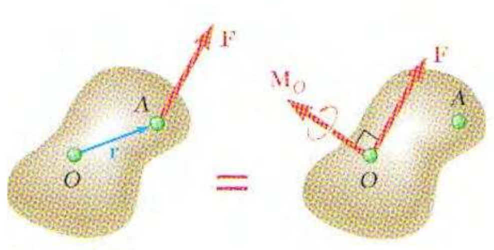


Figura 3.59

Sistema fuerza-par

Cualquier fuerza **F** que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un *sistema fuerza-par* en un punto arbitrario O el cual consta de la fuerza **F** aplicada en O y un par de momento $\mathbf{M}_O$, igual al momento de la fuerza **F** en su posición original con respecto a O [sección 3.16]; se debe señalar que la fuerza **F** y el vector de par $\mathbf{M}_O$ siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.59).

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Se concluye que [sección 3.17] *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado O*, reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en O (figura 3.60) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener a la fuerza resultante **R** y al vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ [problemas resueltos 3.8 al 3.11]. Obsérvese que, en general, la resultante **R** y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ no serán perpendiculares entre sí.

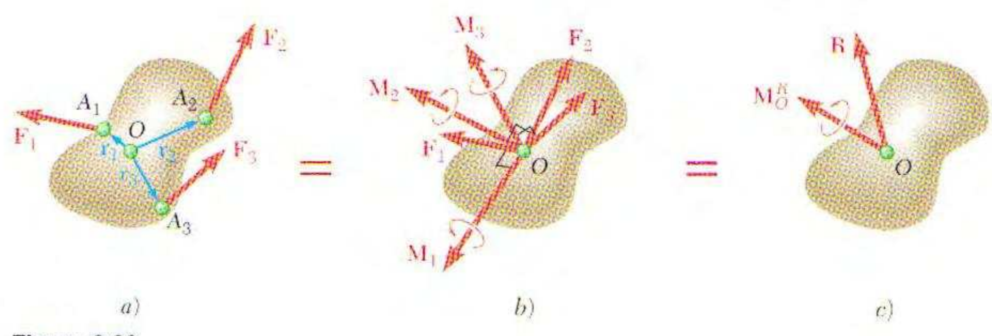


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de fuerzas

Con base en lo anterior, se concluyó [sección 3.18] que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas* $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, . . . *y* $\mathbf{F}'_1$, $\mathbf{F}'_2$, $\mathbf{F}'_3$, . . . , *son equivalentes si, y sólo si,*

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \qquad \text{y} \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \tag{3.57}$$

Reducción adicional de un sistema de fuerzas

Si la fuerza resultante **R** y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante [sección 3.20]. Éste es el caso para sistemas que están constituidos por: *a*) fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b*) fuerzas coplanares [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o *c*) fuerzas paralelas [problema resuelto 3.11]. Si la resultante **R** y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ *no* son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede* ser reducido a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante **R** y un vector de par $\mathbf{M}_1$ dirigido a lo largo de **R** [sección 3.21 y problema resuelto 3.12].

Problemas de repaso

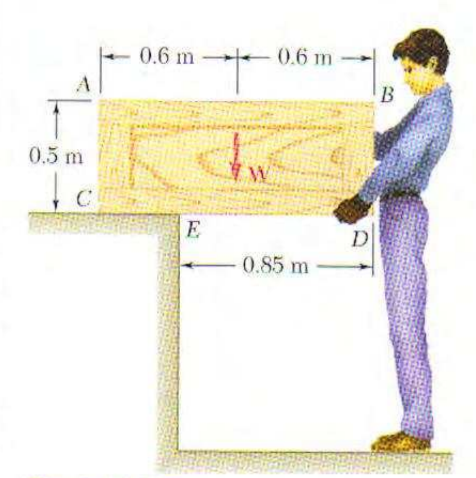


Figura P3.147

3.147 Una caja de madera de 80 kg de masa se sostiene en la posición mostrada en la figura. Determine *a*) el momento alrededor de *E* generado por el peso **W** de la caja de madera y *b*) la fuerza mínima aplicada en *B* que produce un momento alrededor de *E* de igual magnitud pero con sentido opuesto.

3.148 Se sabe que la biela *AB* ejerce sobre la manivela *BC* una fuerza de 1.5 kN dirigida hacia abajo y hacia la izquierda a lo largo de la línea central de *AB*. Determine el momento de esa fuerza alrededor de *C*.

3.149 Una caña de pescar *AB* de 6 ft se ancla de manera segura en la arena de una playa. Después de que un pez pica en el anzuelo, la fuerza resultante en la línea es de 6 lb. Determine el momento alrededor de *A* de la fuerza ejercida por la línea en *B*.

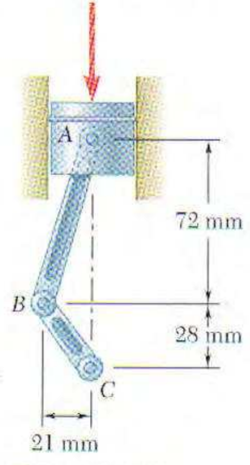


Figura P3.148

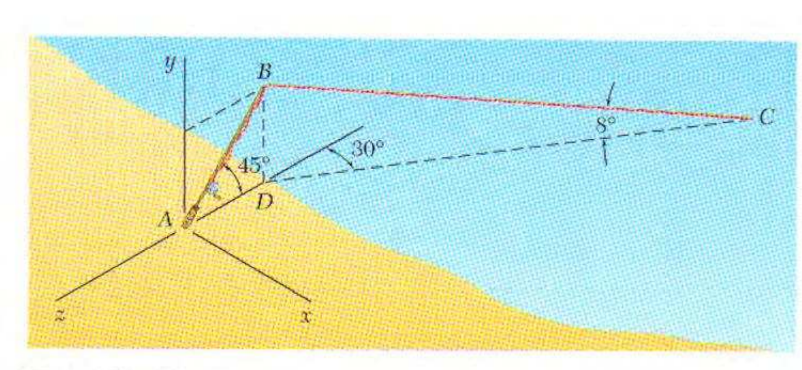


Figura P3.149

3.150 Las cuerdas *AB* y *BC* son dos de las cuerdas usadas para sostener una carpa. Las dos cuerdas están atadas a una estaca en *B*. Si la tensión en la cuerda *AB* es de 540 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda *AB* y la estaca, *b*) la proyección sobre la estaca de la fuerza ejercida por la cuerda *AB* en el punto *B*.

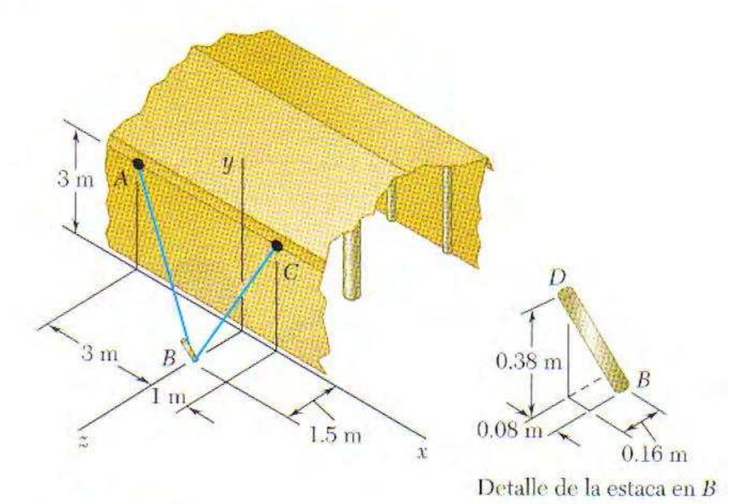


Figura *P3.150*

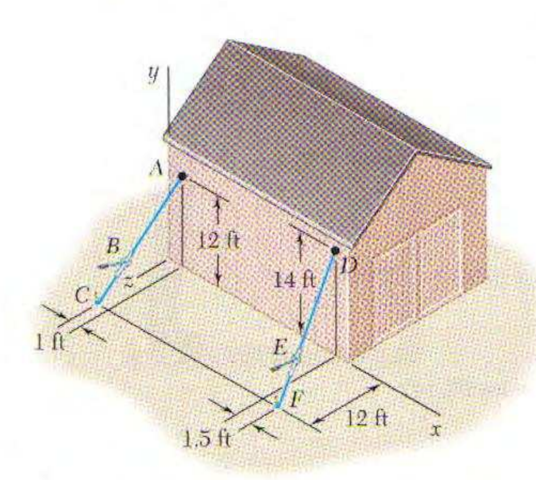


Figura P3.151

3.151 Un granjero emplea cables para sujetar firmemente una de las paredes de un granero pequeño a los tensores B y E. Si se sabe que la suma de los momentos, respecto del eje x, de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el granero en los puntos A y D es de 4 728 lb · ft, determine la magnitud de $\mathbf{T}_{DE}$ cuando $T_{AB} = 255$ lb.

3.152 Retome el problema 3.151 si la tensión en el cable AB es de 306 lb.

3.153 Un arnés de alambre se fabrica al enredar dos o tres alambres alrededor de clavijas de 2 in. de diámetro montadas sobre una hoja de madera. Si la fuerza en cada alambre es de 3 lb, determine el par resultante que actúa sobre la madera cuando $a = 18$ in. y *a*) sólo se colocan los alambres AB y CD, *b*) se colocan los tres alambres.

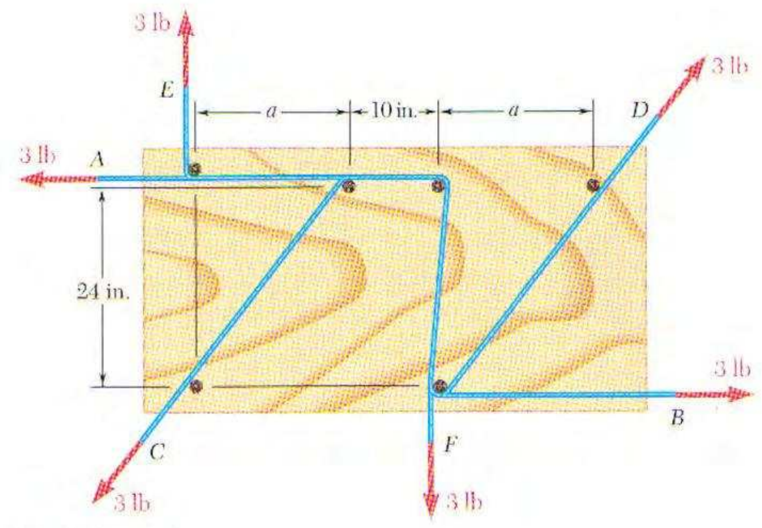


Figura P3.153

3.154 Un trabajador trata de mover una roca aplicando una fuerza de 360 N a una barra de acero, como se muestra en la figura. *a*) Reemplace esa fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en D. *b*) Dos trabajadores intentan mover la misma roca aplicando una fuerza vertical en A y otra fuerza en D. Determine las dos fuerzas si éstas son equivalentes a la fuerza única del inciso *a*).

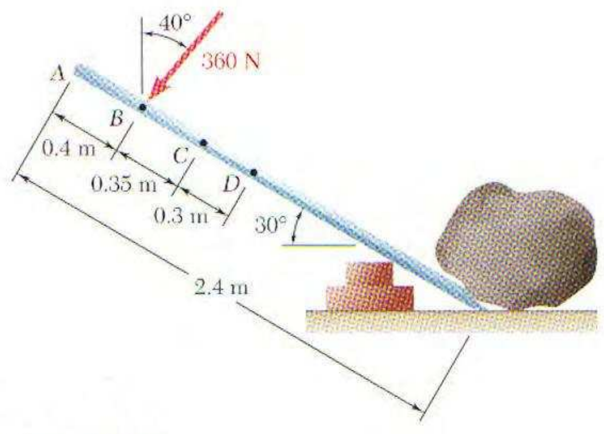


Figura *P3.154*

3.155 Una fuerza de 110 N, que actúa en un plano vertical paralelo al plano yz, se aplica a la manija horizontal AB de 220 mm de longitud de una llave de torsión. Reemplace la fuerza por un sistema fuerza-par equivalente en el origen O del sistema coordenado.

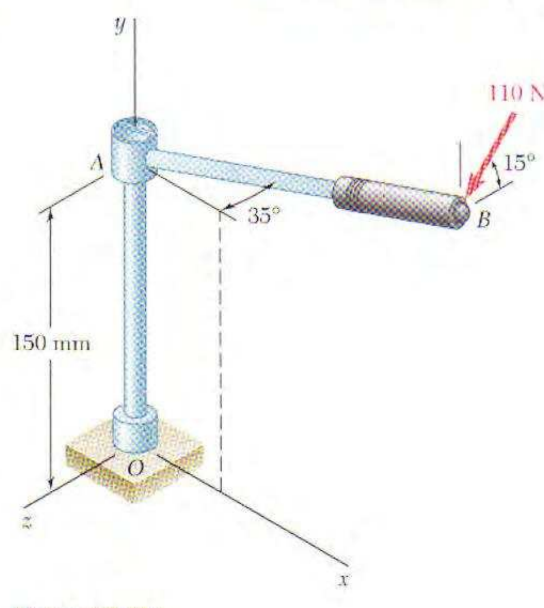


Figura P3.155

3.156 Cuatro cuerdas que se encuentran atadas a una caja ejercen las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas deben reemplazarse por una sola fuerza equivalente aplicada en un punto sobre la línea AB, determine *a*) la fuerza equivalente y la distancia desde A hasta el punto de aplicación de la fuerza si $\alpha = 30°$, *b*) el valor de α tal que la fuerza equivalente se aplique en el punto B.

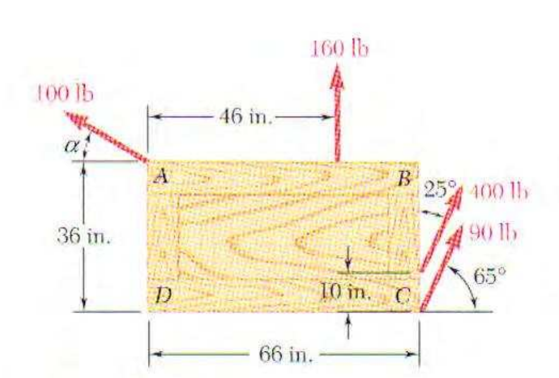


Figura P3.156

3.157 Una paleta sostenida mediante un berbiquí se utiliza para apretar un tornillo en A. *a*) Determine las fuerzas ejercidas en B y C, si se sabe que estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en A que consiste en $\mathbf{R} = -(30\text{ N})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{M}_A^R = -(12\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$. *b*) Encuentre los valores correspondientes de R_y y R_z. *c*) Determine la orientación de la ranura en la cabeza del tornillo para la cual es menos probable que la paleta se resbale, si el berbiquí se encuentra en la posición mostrada.

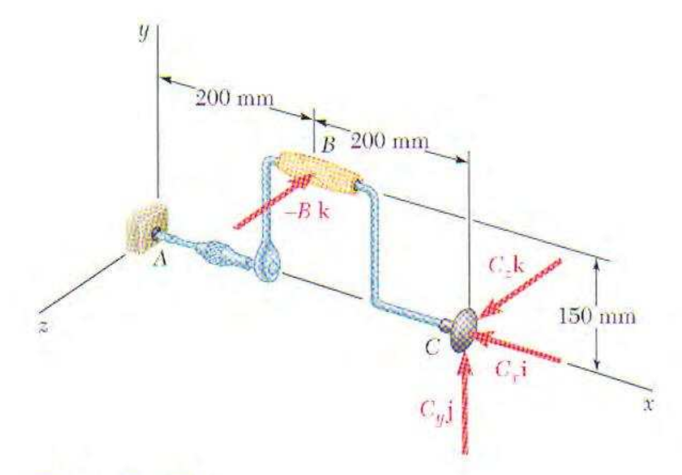


Figura P3.157

3.158 Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 12 ft soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de las cargas adicionales que deben aplicarse en B y F si la resultante de las seis cargas debe pasar por el centro de la base.

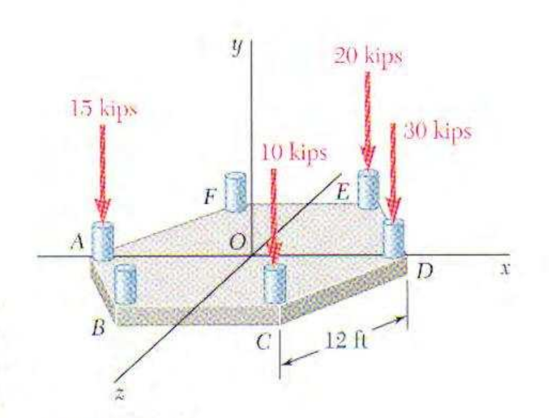


Figura *P3.158*

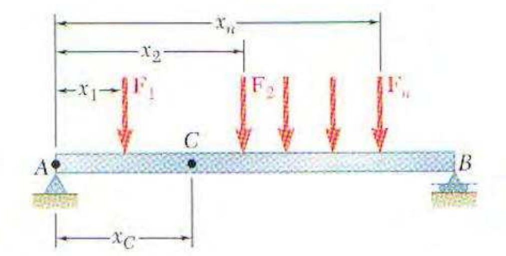


Figura P3.C1

Problemas de computadora

3.C1 Una viga AB está sometida a varias fuerzas verticales como se muestra en la figura. Use software para determinar la magnitud de la resultante de las fuerzas y la distancia x_C al punto C, el punto donde la línea de acción de la resultante interseca a AB. Use este software para resolver *a*) el problema resuelto 3.8*c*, *b*) el problema 3.106*a*.

3.C2 Utilice software para determinar la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas verticales $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, las cuales actúan en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que se encuentran en el plano xz. Use este software para resolver *a*) el problema resuelto 3.11, *b*) el problema 3.127, *c*) el problema 3.129.

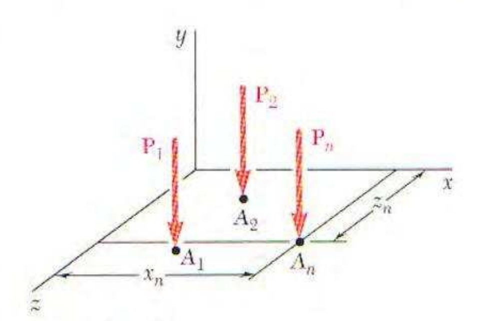


Figura P3.C2

3.C3 Un amigo le pide ayuda en el diseño de cajas para cultivar flores. Las cajas deben tener 4, 5, 6 u 8 lados, los cuales pueden estar inclinados hacia fuera 10°, 20° o 30°. Use software para determinar el ángulo α del bisel para cada uno de los doce diseños propuestos. (*Sugerencia*: El ángulo del bisel es igual a la mitad del ángulo formado por las normales que se dirigen hacia adentro de dos lados adyacentes.)

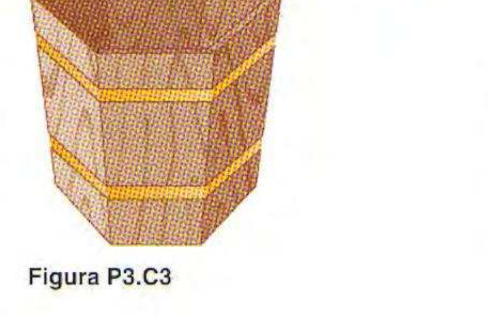


Figura P3.C3

3.C4 El fabricante de un carrete para mangueras desea determinar el momento de la fuerza $\mathbf{F}$ alrededor del eje AA'. La magnitud de la fuerza en newtons está definida por la relación $F = 300(1 - x/L)$, donde x es la longitud de manguera enrollada sobre el tambor de 0.6 m de diámetro y L es la longitud total de la manguera. Use software para calcular el momento requerido para una manguera de 30 m de longitud y 50 mm de diámetro. Comience con $x = 0$ y calcule el momento después de cada vuelta del tambor hasta que la manguera esté enrollada sobre el carrete.

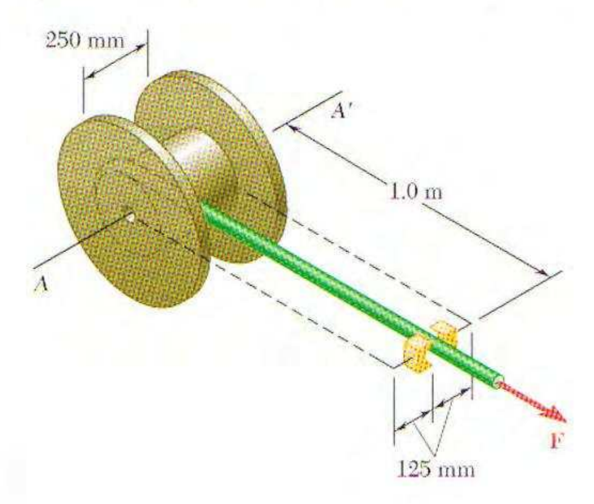


Figura P3.C4

3.C5 Un sistema de n fuerzas actúa sobre un cuerpo. Utilice software para calcular el sistema fuerza-par equivalente en el origen de los ejes coordenados. También determine la magnitud y el punto de aplicación en el plano xz de la resultante del sistema de fuerzas original, si la fuerza equivalente y el par equivalente son ortogonales. Utilice este programa para resolver *a*) el problema 3.113, *b*) el problema 3.120, *c*) el problema 3.127.

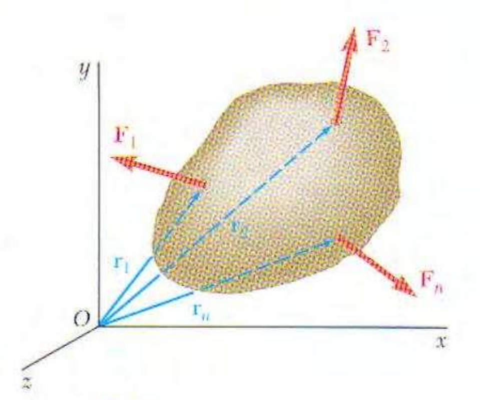


Figura P3.C5

3.C6 Dos ductos cilíndricos, AB y CD, entran a una habitación a través de dos paredes paralelas. Las líneas centrales de los ductos son paralelas entre sí pero no son perpendiculares a las paredes. Los ductos estarán conectados mediante dos codos flexibles y una porción central recta. Use software para determinar las longitudes de AB y CD que minimicen la distancia entre el eje de la porción recta y un termómetro montado sobre la pared en E. Suponga que los codos tienen una longitud despreciable y que AB y CD tienen líneas centrales definidas por $\lambda_{AB} = (7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k})/9$ y $\lambda_{CD} = (-7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k})/9$ y que pueden variar en longitud desde 9 in. hasta 36 in.

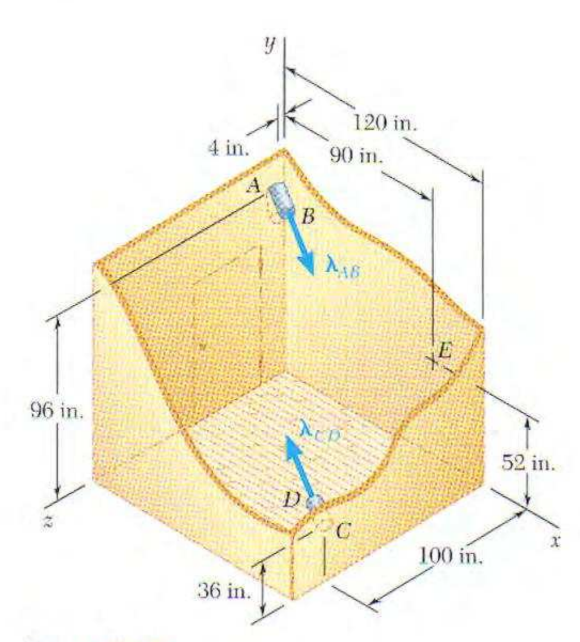
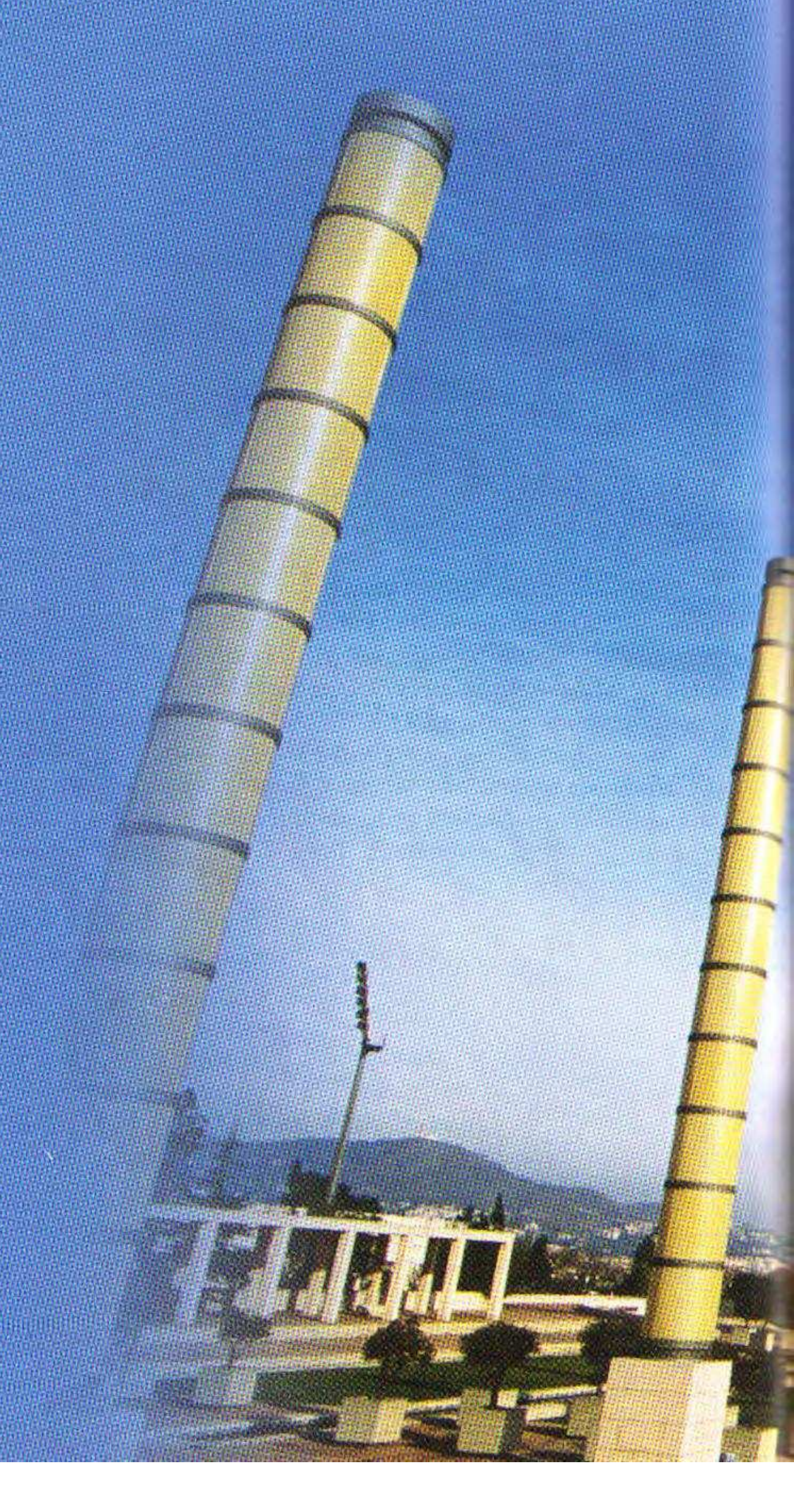
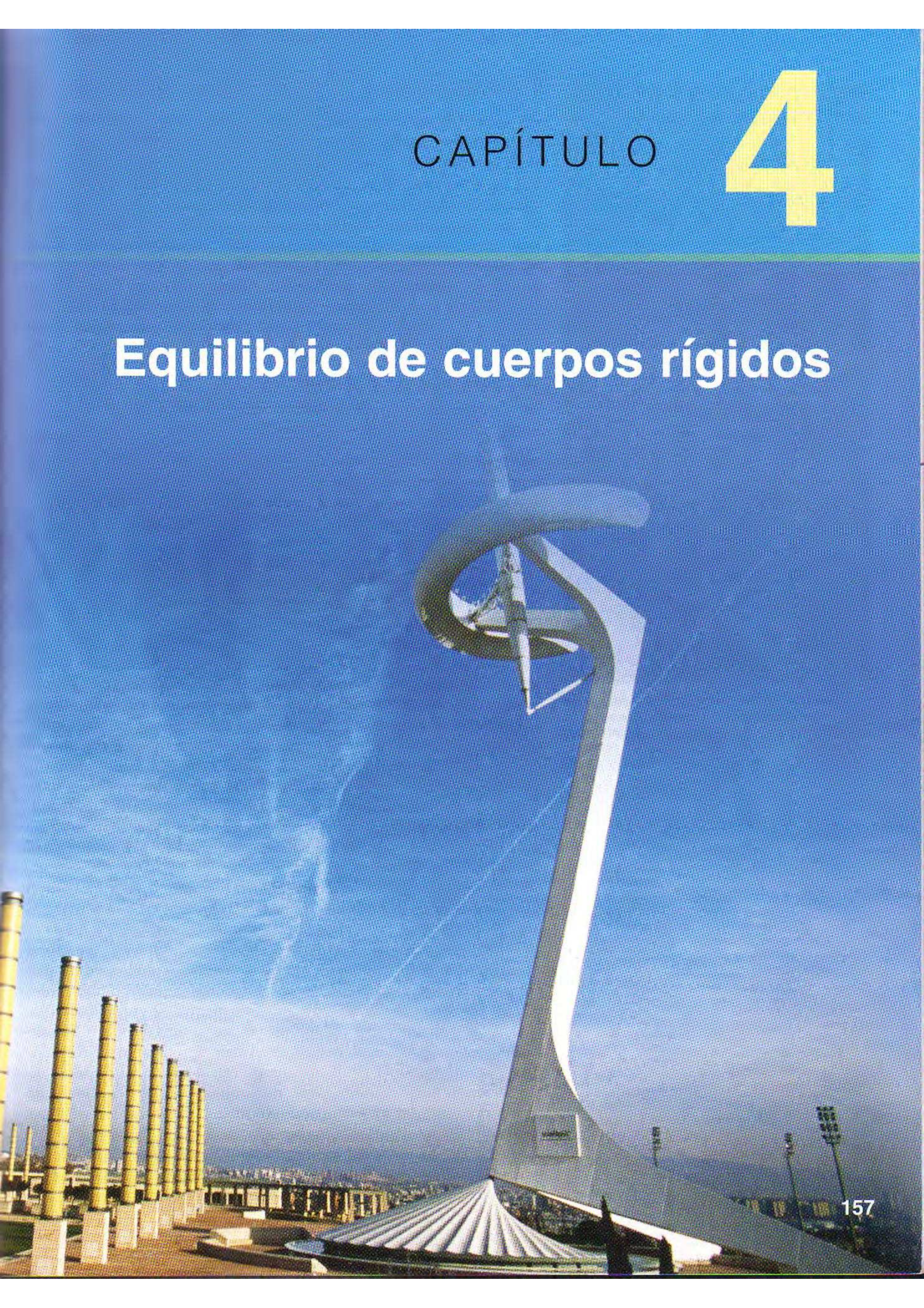


Figura P3.C6

Esta torre de telecomunicaciones construida en el corazón del complejo olímpico de Barcelona para transmitir los juegos de 1992, está diseñada para permanecer en equilibrio bajo la fuerza vertical de la gravedad y las fuerzas laterales ejercidas por el viento.





CAPÍTULO 4

Equilibrio de cuerpos rígidos

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden reducirse a un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O. Cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en *equilibrio*.

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se pueden obtener igualando a cero a $\mathbf{R}$ y a $\mathbf{M}_O^R$ en las relaciones (3.52) de la sección 3.17:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido por medio de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Las ecuaciones obtenidas se pueden emplear para determinar fuerzas desconocidas que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas sobre éste por sus puntos de apoyo. Se observa que las ecuaciones (4.2) expresan el hecho de que las componentes de las fuerzas externas en las direcciones x, y y z están en equilibrio; las ecuaciones (4.3) expresan a su vez que los momentos de las fuerzas externas con respecto a los ejes x, y y z también están en equilibrio. Por tanto, para un cuerpo rígido en equilibrio el sistema de fuerzas externas no le impartirá un movimiento traslacional o rotacional al cuerpo en consideración.

Para poder escribir las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido, es esencial identificar primero todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo y, entonces, dibujar el *diagrama de cuerpo libre* correspondiente. En este capítulo se considerará primero el equilibrio de *estructuras bidimensionales* sujetas a fuerzas contenidas en sus planos y se aprenderá cómo dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Además de las fuerzas *aplicadas* sobre una estructura, se considerarán las *reacciones* ejercidas sobre esta última por sus puntos de apoyo. Se asociará un tipo específico de reacción con cada tipo de apoyo. Se aprenderá cómo determinar si una estructura está apoyada apropiadamente, de forma que se pueda saber de antemano si las ecuaciones de equilibrio podrán resolverse para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas.

En la última parte del capítulo se considerará el equilibrio de estructuras tridimensionales y se realizará el mismo tipo de análisis para estas estructuras y para sus puntos de apoyo.

4.2. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Al resolver un problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es esencial que se consideren *todas* las fuerzas que actúan sobre éste; además, es importante excluir cualquier fuerza que no esté dada directamente sobre dicho cuerpo. Omitir o agregar una fuerza extraña podría destruir las condiciones de equilibrio. Por tanto, el primer paso en la solución del problema es esquematizar un *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo rígido en consideración. Los diagramas de cuerpo libre ya fueron utilizados en muchas ocasiones en el capítulo 2. Sin embargo, en vista de su importancia para la solución de problemas de equilibrio, aquí se resumen los diferentes pasos que se deben seguir al momento de dibujar un diagrama de cuerpo libre.



Fotografía 4.1 Un diagrama de cuerpo libre del tractor que se muestra en la foto incluiría todas las fuerzas externas que actúan sobre él: el peso del tractor, el peso de la carga en la pala y las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las llantas.



Fotografía 4.2 En el capítulo 6 se expondrá cómo determinar las fuerzas internas en estructuras hechas de varias piezas conectadas, como las fuerzas en los elementos que soportan la pala del tractor de la fotografía 4.1.

1. Se debe tomar una decisión acertada en relación con la selección del cuerpo libre que será utilizado. Después se debe separar al cuerpo del suelo y de todos los demás cuerpos. Así, se realiza un croquis del contorno del cuerpo ya aislado.

2. Todas las fuerzas externas deben indicarse en el diagrama de cuerpo libre. Estas fuerzas representan las acciones ejercidas *sobre* el cuerpo libre *por* el suelo y *por* los cuerpos que han sido separados del mismo; estas fuerzas deben aplicarse en los diversos puntos sobre los que el cuerpo libre estaba apoyado en el suelo o estaba conectado a otros cuerpos. También se debe incluir entre las fuerzas externas el *peso* del cuerpo libre, puesto que representa la atracción ejercida por la Tierra sobre las distintas partículas que lo constituyen. Como se verá en el capítulo 5, el peso debe aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está constituido por varias partes, las fuerzas que dichas partes ejercen entre sí *no* deben incluirse entre las fuerzas externas; siempre que se considere completo al cuerpo libre, son fuerzas internas.

3. Las magnitudes y las direcciones de las *fuerzas externas* que son *conocidas* deben señalarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. Cuando se indiquen las direcciones de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las ejercidas *sobre*, y no *por*, el cuerpo libre. Por lo general, las fuerzas externas conocidas incluyen el *peso* del cuerpo libre y las *fuerzas aplicadas* con un propósito en particular.

4. Las *fuerzas externas desconocidas* consisten en las *reacciones* a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre. Las reacciones lo obligan a permanecer en la misma posición y, por esta razón, algunas veces reciben el nombre de *fuerzas de restricción*. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre está *apoyado* o *conectado* a otros cuerpos y deben indicarse con claridad. Las reacciones se estudian con más detalle en las secciones 4.3 y 4.8.

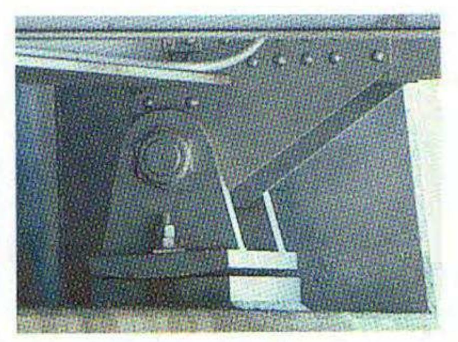
5. El diagrama de cuerpo libre también debe incluir dimensiones, puesto que éstas se pueden necesitar para el cálculo de momentos de fuerzas. Sin embargo, cualquier otro detalle debe omitirse.



EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

4.3. REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL

Fotografía 4.3 Cuando el eslabón del mecanismo de apertura del toldo para ventana se extiende, la fuerza que éste ejerce sobre el deslizador produce una fuerza normal aplicada sobre la barra, lo que causa que el toldo se abra.



Fotografía 4.4 El apoyo oscilatorio del estribo montado, que se muestra en la fotografía, se usa para apoyar el camino sobre un puente.



Fotografía 4.5 Se muestra la expansión del apoyo oscilatorio de un puente con plataforma de trabes. La superficie convexa del oscilador le permite al apoyo de la trabe moverse en forma horizontal.

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura que se está analizando y las fuerzas aplicadas sobre la misma están contenidas en el mismo plano. De la forma más clara, las reacciones necesarias para mantener a la estructura en la misma posición también estarán contenidas en el mismo plano.

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de *apoyos* (puntos de apoyo) o *conexiones*:

1. *Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida*. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos, balancines, superficies sin fricción, eslabones* o *bielas* y *cables cortos, collarines sobre barras sin fricción* y *pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos mencionados anteriormente junto con las reacciones que producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción; dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.

2. *Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas*. Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados, articulaciones* o *bisagras* y *superficies rugosas*. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran *dos incógnitas* que usualmente se representan por sus componentes x y y. En el caso de una superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.

3. *Reacciones equivalentes a una fuerza y un par*. Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran *tres incógnitas*, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y en el momento del par.

Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
Rodillos o patines; Balancín; Superficie sin fricción	Fuerza con línea de acción conocida	1
Cable corto; Eslabón corto	Fuerza con línea de acción conocida	1
Collarín sobre una barra sin fricción; Perno sin fricción en una ranura lisa	90° Fuerza con línea de acción conocida	1
Perno sin fricción, articulación o bisagra; Superficie rugosa	o α Fuerza de dirección desconocida	2
Apoyo fijo	o α Fuerza y par	3

Figura 4.1 Reacciones en apoyos y conexiones.

Cuando el sentido de una fuerza o un par desconocido no es evidente, no se debe intentar determinarlo. En lugar de ello, se supondrá arbitrariamente el sentido de la fuerza o el par; el signo de la suposición obtenida indicará si la respuesta fue correcta o no.

reacciones correspondientes a estos apoyos involucraban *tres incógnitas*, las cuales podían determinarse resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio. Cuando se presenta una situación como ésta, se dice que son reacciones *estáticamente determinadas*.

En la figura 4.4*a* la armadura mostrada se sostiene por pernos en A y B. Estos apoyos proporcionan más restricciones de las necesarias para evitar que la armadura se mueva bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. También se observa a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.4*b* que las reacciones correspondientes involucran *cuatro incógnitas*. Puesto que, como se señaló en la sección 4.4, sólo están disponibles tres ecuaciones de equilibrio independientes, se tienen *más incógnitas que ecuaciones*; por tanto, no se pueden determinar todas las incógnitas. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ proporcionan, respectivamente, las componentes verticales B_y y A_y, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ sólo proporciona la suma $A_x + B_x$ de las componentes horizontales de las reacciones en A y B. Se dice que las componentes A_x y B_x son *estáticamente indeterminadas*. Éstas pueden determinarse considerando las deformaciones ocasionadas en la armadura por la condición de carga dada, pero este método está fuera del alcance de la estática y corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

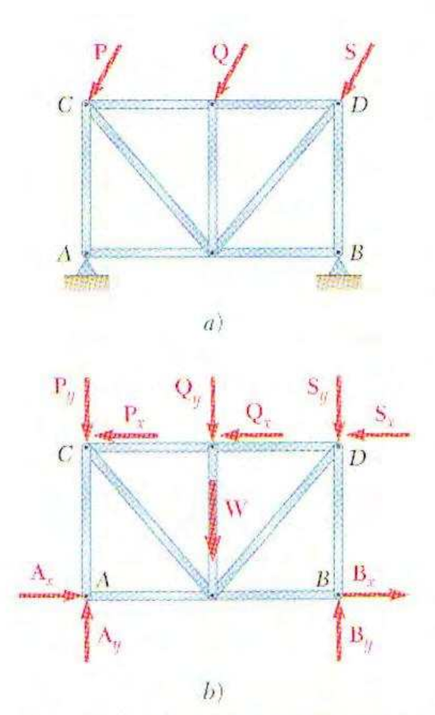


Figura 4.4 Reacciones estáticamente indeterminadas.

Los apoyos usados para sostener la armadura mostrada en la figura 4.5*a* consisten en los rodillos en A y B. Es evidente que las restricciones proporcionadas por estos apoyos no son suficientes para impedir que la armadura se mueva. Aunque se impide cualquier movimiento vertical, no hay nada que evite que la armadura pueda moverse en forma horizontal. Bajo estas circunstancias, se dice que la armadura tiene *restricción parcial*.[†] En la figura 4.5*b* se observa que las reacciones en A y B sólo involucran *dos incógnitas*. Como aún se tienen que cumplir tres ecuaciones de equilibrio, hay *menos incógnitas que ecuaciones* y, en general, una de las ecuaciones de equilibrio no se cumplirá. Mientras que las ecuaciones $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se pueden cumplir por medio de una selección apropiada de las reacciones en A y B, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no será satisfecha a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sea igual a cero. Por tanto, no se puede mantener el equilibrio de la armadura de la figura 4.5 bajo condiciones generales de carga.

De lo anterior se concluye que si un cuerpo rígido tiene restricción completa y si las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, *entonces habrá tantas incógnitas como ecuaciones de equilibrio*. Cuando esta condición *no se cumple*, se tiene la certeza de que el cuerpo rígido no está completamente restringido o de que las reacciones en sus apoyos no son estáticamente determinadas; además, también es posible que el cuerpo rígido no esté completamente restringido y que las reacciones sean estáticamente indeterminadas.

Sin embargo, se debe señalar que la condición ya mencionada, aunque es *necesaria, no es suficiente*. En otras palabras, el hecho de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones no garantiza que el cuerpo tenga restricción completa o que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. Observe la figura 4.6*a* en la cual la armadura mostrada se sostiene por medio de rodillos en A,

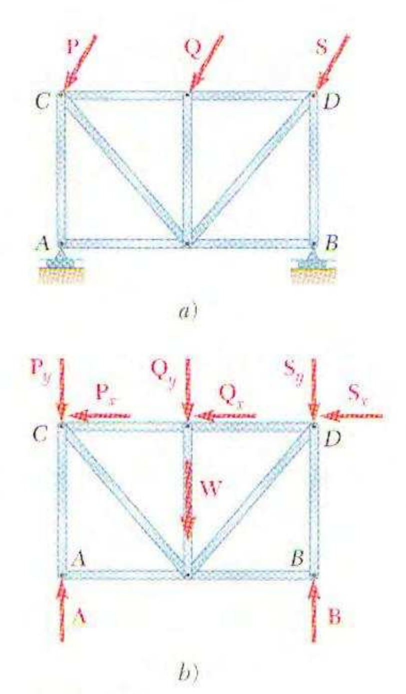


Figura 4.5 Restricciones parciales.

[†]En ocasiones se hace referencia a los cuerpos con restricción parcial como *inestables*. Sin embargo, para evitar confusiones entre este tipo de inestabilidad, debida a un número insuficiente de restricciones y el tipo de inestabilidad considerada en el capítulo 10, la cual está relacionada con el comportamiento de un cuerpo rígido cuando se perturba su equilibrio, se reservará el uso de las palabras *estable* e *inestable* para este último caso.

B y E. A pesar de que existen tres reacciones desconocidas **A**, **B** y **E** (figura 4.6b), la ecuación $\Sigma F_x = 0$ no se cumplirá a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas resulte igual a cero. Aunque hay un número suficiente de restricciones, éstas no están ubicadas de manera apropiada y no existe ningún impedimento para que la armadura se mueva horizontalmente. En este caso, se dice que la armadura está *impropiamente restringida*. Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio para determinar tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Por tanto, las reacciones impropias también producen indeterminación estática.

Otro ejemplo de restricciones impropias —y de indeterminación estática— lo proporciona la armadura mostrada en la figura 4.7, la cual está sostenida por un perno en A y por rodillos en B y C, que en conjunto involucran cuatro incógnitas. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes, las reacciones en los apoyos son estáticamente indeterminadas. Por otro lado, obsérvese que no se puede cumplir la ecuación $\Sigma M_A = 0$ bajo condiciones generales de carga puesto que las líneas de acción de las reacciones **B** y **C** pasan a través de A. Entonces, se concluye que la armadura puede rotar alrededor de A y, por ende, está impropiamente restringida.[†]

Los ejemplos de las figuras 4.6 y 4.7 conducen a la conclusión de que *un cuerpo rígido está impropiamente restringido siempre que los apoyos estén ubicados de tal forma que las reacciones sean concurrentes o paralelas*,[‡] aunque proporcionen un número suficiente de reacciones.

En resumen, para asegurarse de que un cuerpo rígido bidimensional está completamente restringido y de que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, se debe verificar que las reacciones involucren tres —y sólo tres— incógnitas y que los apoyos estén ubicados de manera que no requieran que las reacciones sean concurrentes o paralelas.

Los apoyos que involucran reacciones estáticamente indeterminadas deben utilizarse con cuidado en el *diseño* de estructuras y con pleno conocimiento de los problemas que pueden causar. Por otra parte, es usual que el *análisis* de estructuras con reacciones estáticamente indeterminadas se realice en forma parcial por medio de los métodos de la estática. Por ejemplo, en el caso de la armadura de la figura 4.4, las componentes verticales de las reacciones en A y B se obtuvieron a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Por razones obvias, los apoyos que originan restricciones parciales o impropias se deben evitar en el diseño de estructuras estacionarias. Sin embargo, una estructura restringida en forma parcial o impropia no necesariamente se colapsará; bajo ciertas condiciones de carga en particular, se puede mantener el equilibrio. Por ejemplo, las armaduras de las figuras 4.5 y 4.6 estarán en equilibrio si las fuerzas aplicadas **P**, **Q** y **S** son verticales. Además, las estructuras diseñadas para moverse sólo deben estar parcialmente restringidas. Por ejemplo, un carro de ferrocarril sería de poca utilidad si estuviera completamente restringido por tener sus frenos aplicados en forma permanente.

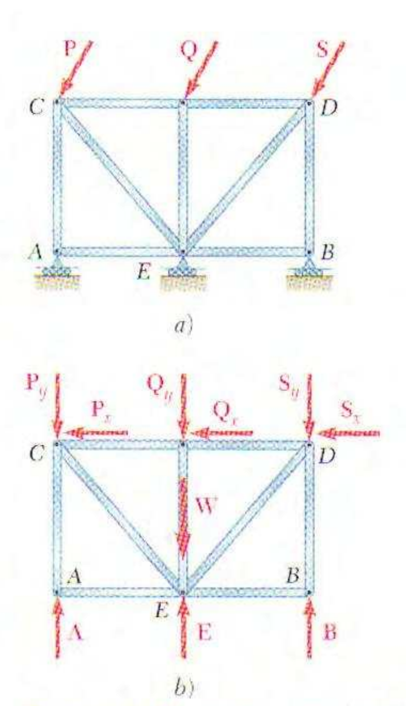


Figura 4.6 Restricciones impropias.

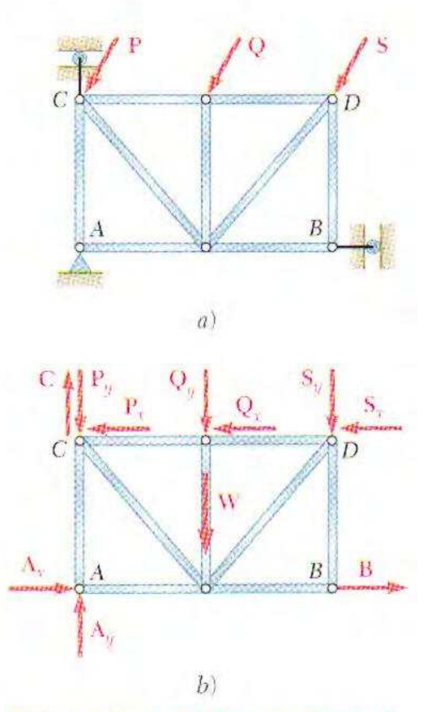
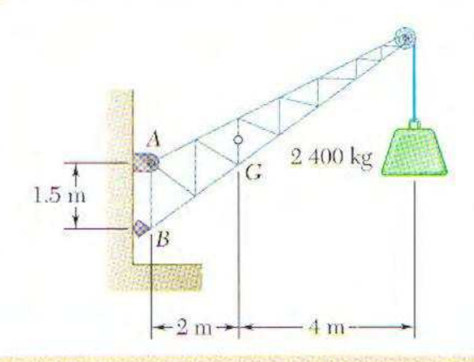


Figura 4.7 Restricciones impropias.

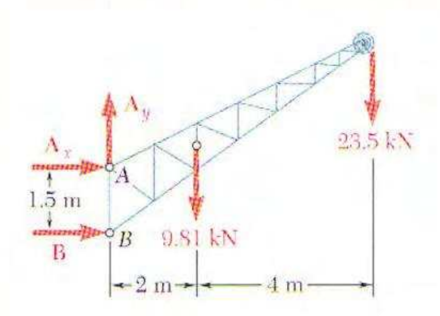
[†] La rotación de la armadura con respecto a A requiere algo de "juego" en los apoyos en B y C. En la práctica siempre existirá dicho juego. Además, se observa que si el juego es mínimo, el desplazamiento de los rodillos B y C, y por tanto, las distancias desde A hasta las líneas de acción de las reacciones **B** y **C**, también serán pequeñas. Así, la ecuación $\Sigma M_A = 0$ requiere que **B** y **C** sean muy grandes, lo cual puede causar la falla de los apoyos en B y C.

[‡] Debido a que esta situación surge por un arreglo o *geometría* inadecuados de los apoyos, comúnmente se hace referencia a la misma como *inestabilidad geométrica*.



PROBLEMA RESUELTO 4.1

Una grúa fija tiene una masa de 1 000 kg y se usa para levantar una caja de 2 400 kg. La grúa se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un balancín en B. El centro de gravedad de la grúa está ubicado en G. Determine las componentes de las reacciones en A y B.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la grúa. Si multiplica las masas de la grúa y de la caja por $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, se obtienen sus respectivos pesos, esto es, 9 810 N o 9.81 kN y 23 500 N o 23.5 kN. La reacción en el perno A es una fuerza con dirección desconocida; ésta se representa por sus componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. La reacción en el balancín B es perpendicular a su superficie; por tanto, dicha reacción es horizontal. Se supone que $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}$ actúan en las direcciones mostradas en la figura.

Determinación de B. Se expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto al punto A es igual a cero. La ecuación que se obtiene no contiene a A_x ni a A_y puesto que los momentos de $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ con respecto a A son iguales a cero. Si se multiplica la magnitud de cada fuerza por su distancia perpendicular a partir de A, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0: \quad +B(1.5 \text{ m}) - (9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$
$$B = +107.1 \text{ kN} \qquad \mathbf{B} = 107.1 \text{ kN} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Como el resultado es positivo, la reacción está dirigida en la forma que se supuso.

Determinación de $\mathbf{A}_x$. La magnitud de $\mathbf{A}_x$ se determina con la suma de las componentes horizontales de todas las fuerzas externas, la cual es igual a cero.

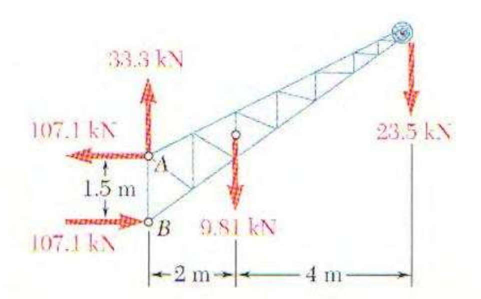
$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$
$$A_x + 107.1 \text{ kN} = 0$$
$$A_x = -107.1 \text{ kN} \qquad \mathbf{A}_x = 107.1 \text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

Como el resultado es negativo, el sentido de $\mathbf{A}_x$ es opuesto al que se había supuesto originalmente.

Determinación de $\mathbf{A}_y$. La suma de las componentes verticales también debe ser igual a cero.

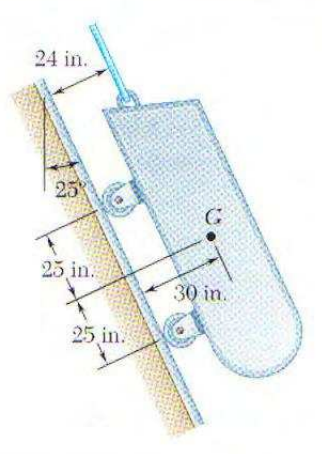
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad A_y - 9.81 \text{ kN} - 23.5 \text{ kN} = 0$$
$$A_y = +33.3 \text{ kN} \qquad \mathbf{A}_y = 33.3 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

Sumando vectorialmente las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ se encuentra que la reacción en A es 112.2 kN $\measuredangle$17.3°.



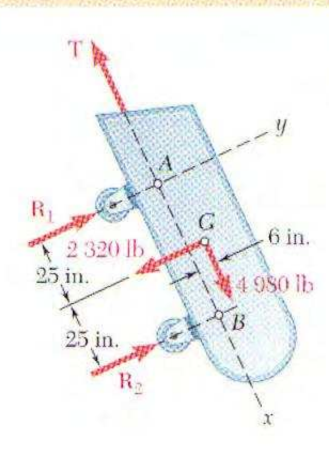
Comprobación. Los valores obtenidos para las reacciones se pueden comprobar recordando que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. Por ejemplo, considerando al punto B, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = -(9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107.1 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) = 0$$



PROBLEMA RESUELTO 4.3

Un carro de carga se encuentra en reposo sobre un carril que forma un ángulo de 25° con respecto a la vertical. El peso total del carro y su carga es de 5 500 lb y éste actúa en un punto que se encuentra a 30 in. del carril y que es equidistante a los dos ejes. El carro se sostiene por medio de un cable que está unido a éste en un punto que se encuentra a 24 in. del carril. Determine la tensión en el cable y la reacción en cada par de ruedas.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carro. La reacción en cada rueda es perpendicular al carril y la fuerza de tensión **T** es paralela a éste. Por conveniencia se selecciona al eje x paralelo al carril y al eje y perpendicular al mismo. Entonces, el peso de 5 500 lb se descompone en sus componentes x y y.

$$W_x = +(5\,500 \text{ lb}) \cos 25° = +4\,980 \text{ lb}$$
$$W_y = -(5\,500 \text{ lb}) \text{ sen } 25° = -2\,320 \text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se toman momentos con respecto a A para eliminar a **T** y a $\mathbf{R}_1$ de los cálculos.

$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0: \quad -(2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) + R_2(50 \text{ in.}) = 0$$
$$R_2 = +1\,758 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_2 = 1\,758 \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

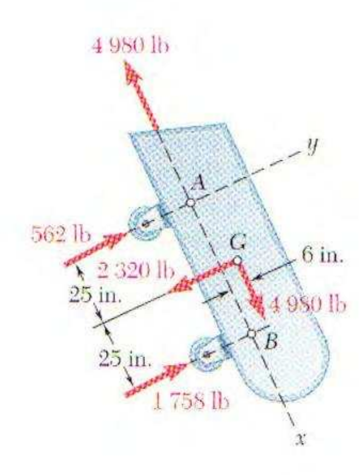
Ahora, tomando momentos con respecto a B para eliminar a **T** y a $\mathbf{R}_2$ de los cálculos, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0: \quad (2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - R_1(50 \text{ in.}) = 0$$
$$R_1 = +562 \text{ lb} \qquad \mathbf{R}_1 = +562 \text{ lb} \nearrow \blacktriangleleft$$

El valor de T se obtiene a partir de

$$\searrow+\Sigma F_x = 0: \quad +4\,980 \text{ lb} - T = 0$$
$$T = +4\,980 \text{ lb} \qquad \mathbf{T} = 4\,980 \text{ lb} \nwarrow \blacktriangleleft$$

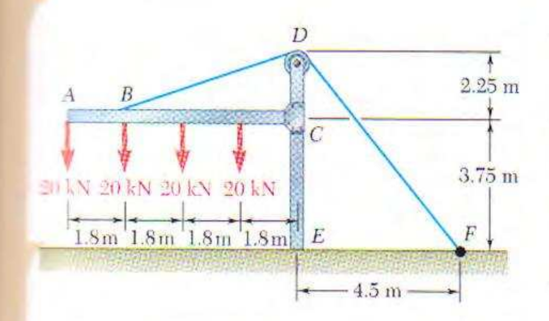
Los valores encontrados para las reacciones se muestran en el croquis adjunto.



Comprobación. Para corroborar los cálculos se escribe

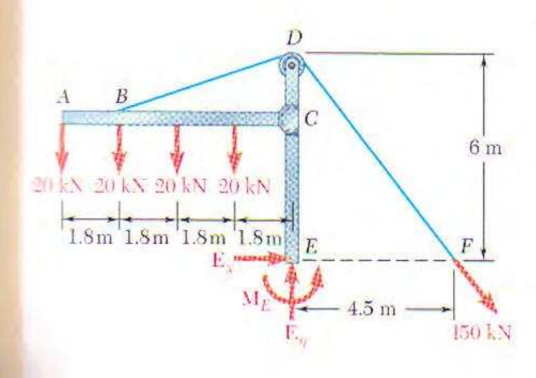
$$\nearrow+\Sigma F_y = +562 \text{ lb} + 1\,758 \text{ lb} - 2\,320 \text{ lb} = 0$$

También pudo haberse verificado la solución calculando los momentos con respecto a cualquier punto distinto de A o de B.



PROBLEMA RESUELTO 4.4

El marco mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. Se sabe que la tensión en el cable es de 150 kN, determine la reacción en el extremo fijo *E*.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del marco junto con el cable *BDF*. La reacción en el extremo fijo *E* está representada con las componentes de fuerza $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$ y por el par $\mathbf{M}_E$. Las otras fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cuatro cargas de 20 kN y la fuerza de 150 kN ejercida en el extremo *F* del cable.

Ecuaciones de equilibrio. Observe que $DF = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 7.5$ m, se escribe

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \qquad E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

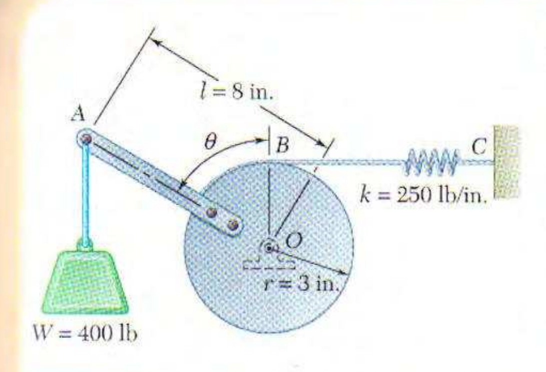
$$E_x = -90.0 \text{ kN} \qquad \mathbf{E}_x = 90.0 \text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN} \qquad \mathbf{E}_y = 200 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft$$

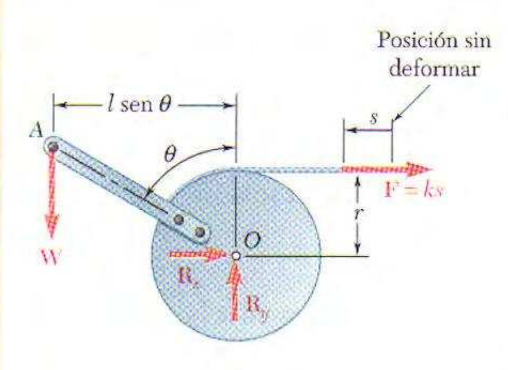
$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \qquad (20 \text{ kN})(7.2 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5.4 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(3.6 \text{ m})$$
$$+ (20 \text{ kN})(1.8 \text{ m}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})(4.5 \text{ m}) + M_E = 0$$

$$M_E = +180.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \mathbf{M}_E = 180.0 \text{ kN}\cdot\text{m} \circlearrowleft \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 4.5

Un peso de 400 lb se une a la palanca mostrada en la figura en el punto *A*. La constante del resorte *BC* es $k = 250$ lb/in. y éste no se encuentra deformado cuando $\theta = 0$. Determine la posición de equilibrio.



SOLUCIÓN

Diagrama del cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la palanca junto al cilindro. Represente con *s* la elongación del resorte a partir de la posición en que éste no se encuentra deformado y observe que $s = r\theta$, se tiene que $F = ks = kr\theta$.

Ecuación de equilibrio. Sumando los momentos de **W** y de **F** con respecto a *O*, se escribe

$$+\circlearrowleft\Sigma M_O = 0: \quad Wl \text{ sen } \theta - r(kr\theta) = 0 \qquad \text{sen } \theta = \frac{kr^2}{Wl}\theta$$

Sustituyendo los datos numéricos que fueron proporcionados se obtiene

$$\text{sen } \theta = \frac{(250 \text{ lb/in.})(3 \text{ in.})^2}{(400 \text{ lb})(8 \text{ in.})}\theta \qquad \text{sen } \theta = 0.703\theta$$

Al resolver por prueba y error, se encuentra $\qquad \theta = 0 \qquad \theta = 80.3° \blacktriangleleft$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido que se encuentra en equilibrio forman un sistema equivalente a cero. Para resolver un problema de equilibrio la primera tarea consiste en dibujar un *diagrama de cuerpo libre* que sea claro y de tamaño razonable en el cual se muestren todas las fuerzas externas. Se deben incluir tanto las fuerzas conocidas como las desconocidas.

Para un cuerpo rígido bidimensional, las reacciones en los apoyos pueden involucrar una, dos o tres incógnitas dependiendo del tipo de apoyo de que se trate (figura 4.1). Un diagrama de cuerpo libre es esencial para resolver de manera correcta un problema. Nunca se debe continuar con la solución de un problema mientras no se esté seguro de que en el diagrama de cuerpo libre están presentes todas las cargas, todas las reacciones y el peso del cuerpo (cuando esto último sea apropiado).

1. ***Se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio*** y resolverlas para *tres incógnitas*. Las tres ecuaciones pueden ser

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_O = 0$$

Sin embargo, existen varios conjuntos de ecuaciones que se pueden escribir, tales como

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y, o

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

donde los puntos A, B y C no se encuentran sobre una línea recta.

2. ***Para simplificar la solución*** resulta conveniente utilizar alguna de las técnicas de solución que se presentan a continuación, siempre y cuando sean aplicables al caso en consideración.

a) Sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas, se obtiene una ecuación que involucra a una sola incógnita.

b) Sumar componentes en dirección perpendicular a dos fuerzas paralelas que son desconocidas, se obtiene una ecuación que involucra a una sola incógnita.

3. ***Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre,*** se puede determinar la existencia de una de las siguientes situaciones especiales.

a) Las reacciones involucran menos de tres incógnitas; se dice que el cuerpo está *parcialmente restringido* y su movimiento es posible.

b) Las reacciones involucran más de tres incógnitas; se dice que las reacciones son *estáticamente indeterminadas*. Aunque se pueden calcular una o dos reacciones, no es posible determinarlas todas.

c) Las reacciones pasan a través de un solo punto o son paralelas; se dice que el cuerpo está *impropiamente restringido* y se puede presentar movimiento bajo una condición general de carga.

Problemas

4.1 Un tractor de 2 100 lb se utiliza para levantar 900 lb de grava. Determine la reacción en las *a*) llantas traseras *A*, *b*) llantas delanteras *B*.

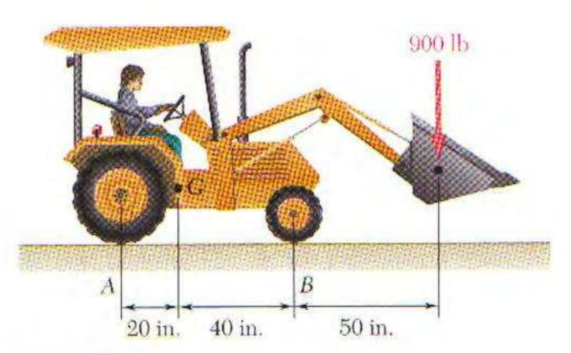


Figura P4.1

4.2 La jardinera que se muestra en la figura usa una carretilla de 60 N para transportar una bolsa de 250 N de fertilizante. ¿Cuál es la fuerza que debe ejercer en cada manubrio?

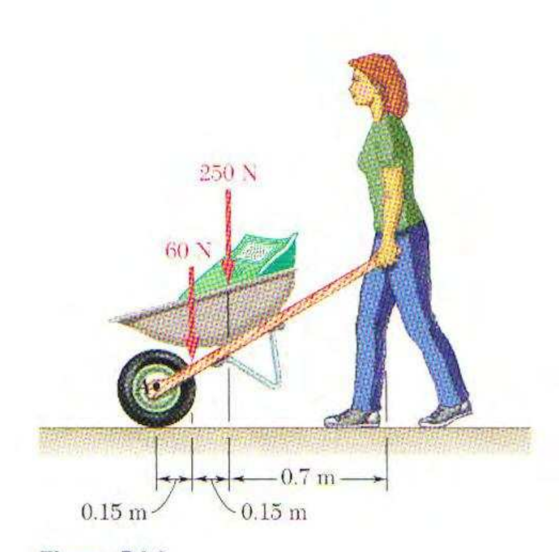


Figura P4.2

4.3 La jardinera del problema 4.2 desea transportar una segunda bolsa de 250 N de fertilizante al mismo tiempo que la primera. Determine la máxima distancia horizontal permisible desde el eje *A* de la llanta de la carretilla hasta el centro de gravedad de la segunda bolsa, si la jardinera sólo puede cargar 75 N con cada brazo.

4.4 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine *a*) la reacción en *A*, *b*) la tensión en el cable *BC*.

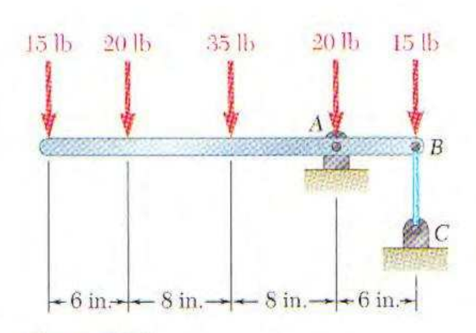


Figura P4.4

4.5 Dos cajas, cada una con una masa de 350 kg, se colocan en la parte trasera de una camioneta de 1 400 kg como se muestra en la figura. Determine las reacciones en las *a*) llantas traseras *A* y *b*) llantas delanteras *B*.

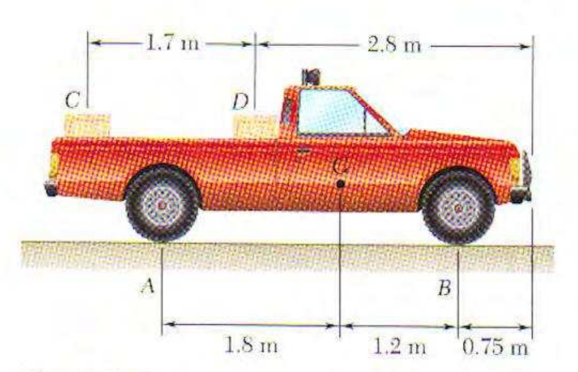


Figura P4.5

4.6 Retome el problema 4.5, y ahora suponga que la caja *D* se retira y que la posición de la caja *C* permanece intacta.

4.7 Una ménsula en forma de T sostiene las cuatro cargas mostradas. Determine las reacciones en *A* y *B* si *a*) $a = 10$ in., *b*) $a = 7$ in.

4.8 Para la ménsula y las cargas del problema 4.7, determine la distancia mínima *a* si la ménsula no debe moverse.

4.9 El valor máximo permisible para cada una de las reacciones es de 180 N. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine el rango de valores de la distancia *d* para los cuales la viga es segura.

4.10 Retome el problema 4.9, y ahora suponga que la carga de 50 N se sustituye por una carga de 80 N.

4.11 Para la viga del problema resuelto 4.2, determine el rango de valores de *P* para los cuales la viga es segura, si se sabe que el máximo valor permisible para cada una de las reacciones es de 30 kips y que la reacción en *A* debe estar dirigida hacia arriba.

4.12 La viga *AB* de 10 m descansa sobre los apoyos *C* y *D*, pero no está unida a ellos. Si se desprecia el peso de la viga, determine el rango de valores de *P* para los cuales la viga permanecerá en equilibrio.

4.13 El máximo valor permisible de cada una de las reacciones es de 50 kN y cada reacción debe estar dirigida hacia arriba. Si se desprecia el peso de la viga, determine el rango de valores de *P* para los cuales la viga es segura.

4.14 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de la distancia *a* para los cuales la reacción en *B* no excede 100 lb hacia abajo o 200 lb hacia arriba.

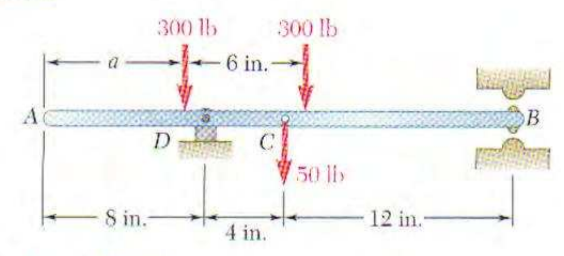


Figura P4.14

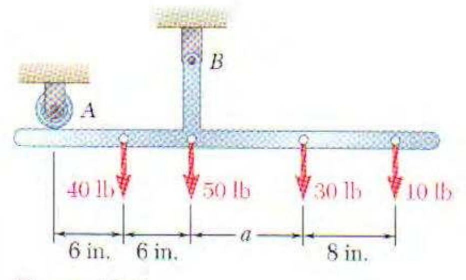


Figura *P4.7*

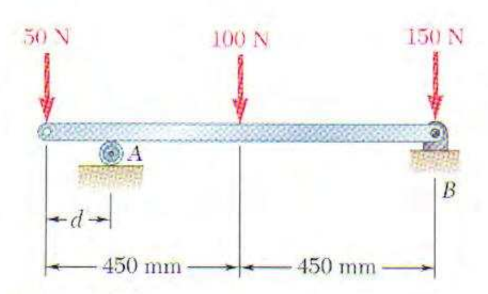


Figura P4.9

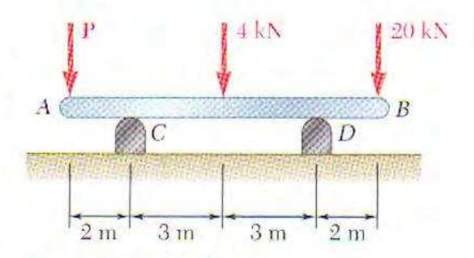


Figura P4.12 y *P4.13*

4.15 Los eslabones AB y DE están conectados mediante una manivela de campana como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el eslabón AB es de 720 N, determine *a*) la tensión en el eslabón DE, *b*) la reacción en C.

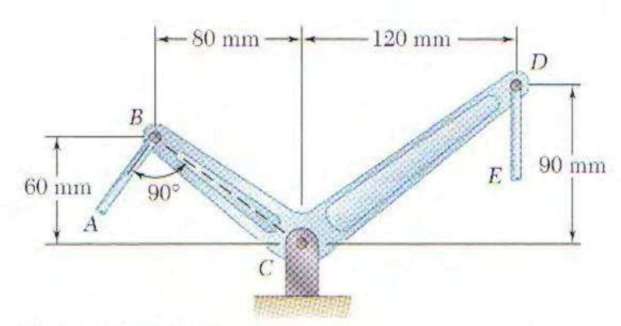


Figura P4.15 y *P4.16*

4.16 Los eslabones AB y DE están conectados mediante una manivela de campana como se muestra en la figura. Determine la fuerza máxima que puede ejercer con seguridad el eslabón AB sobre la mani vela de campana si el máximo valor permisible para la reacción en C es de 1 600 N.

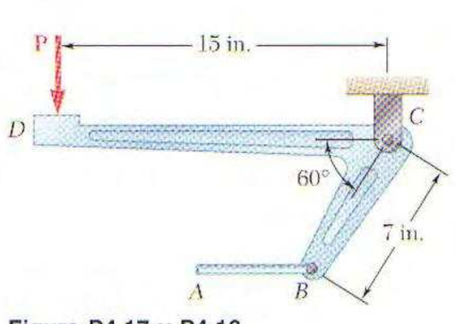


Figura P4.17 y P4.18

4.17 La tensión requerida en el cable AB es de 200 lb. Determine *a*) la fuerza vertical **P** que debe aplicarse sobre el pedal, *b*) la reacción correspondiente en C.

4.18 Determine la máxima tensión que puede desarrollarse en el cable AB si el máximo valor permisible de la reacción en C es de 250 lb.

4.19 La ménsula BCD está articulada en C y se une a una barra de control en B. Para la carga mostrada, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C.

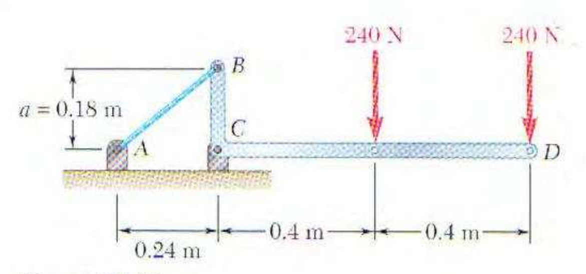


Figura P4.19

4.20 Retome el problema 4.19, y ahora suponga que $a = 0.32$ m.

4.21 Determine las reacciones en A y B cuando *a*) $h = 0$, *b*) $h = 200$ mm.

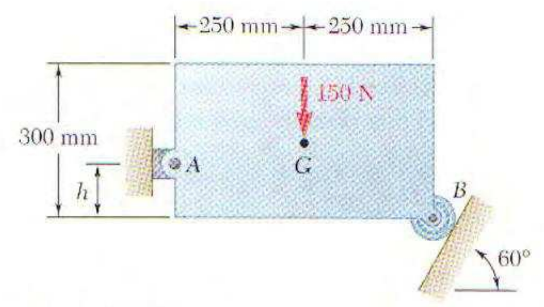


Figura P4.21

4.22 Para el marco y las cargas mostradas, determine las reacciones en A y E cuando *a*) $\alpha = 30°$, *b*) $\alpha = 45°$.

4.23 y 4.24 Para cada una de las placas y cargas mostradas, determine las reacciones en A y B.

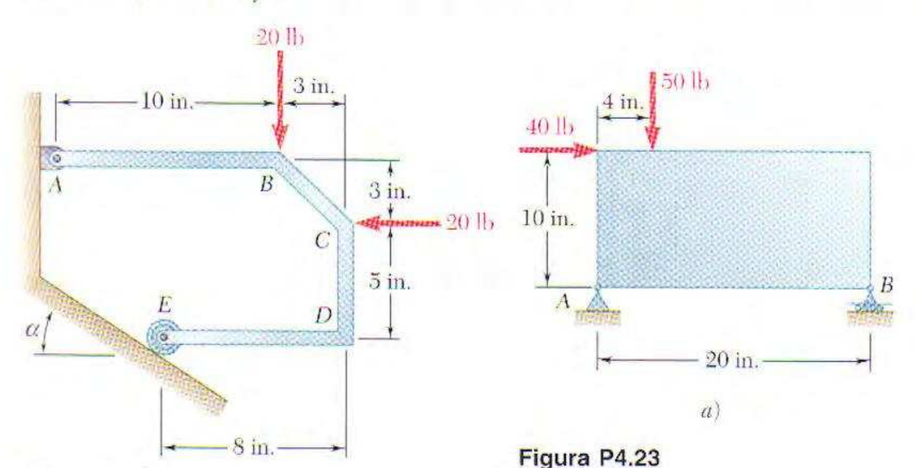


Figura *P4.22*

Figura P4.23

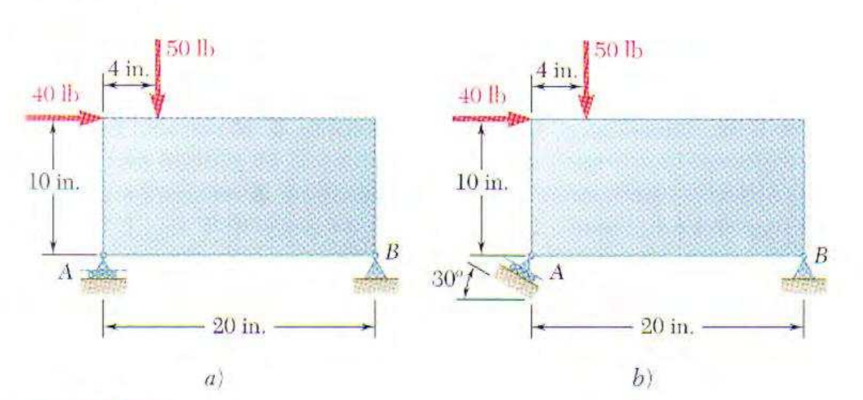


Figura P4.24

4.25 Determine las reacciones en A y B cuando *a*) $\alpha = 0$, *b*) $\alpha = 90°$ y *c*) $\alpha = 30°$.

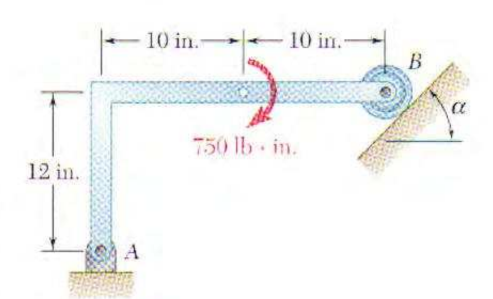


Figura *P4.25*

4.26 Una varilla AB que está articulada en A y se encuentra unida al cable BD en B, soporta las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $d = 200$ mm, determine *a*) la tensión en el cable BD, *b*) la reacción en A.

4.27 Una varilla AB que está articulada en A y se encuentra unida al cable BD en B, soporta las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $d = 150$ mm, determine *a*) la tensión en el cable BD, *b*) la reacción en A.

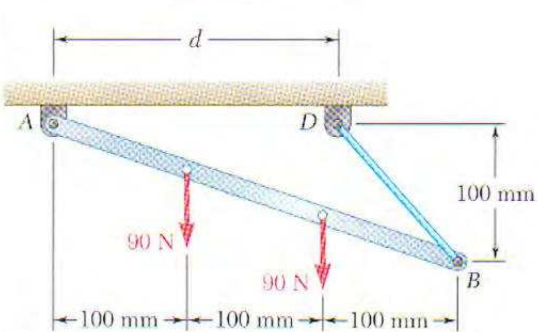


Figura P4.26 y P4.27

4.28 Una palanca AB está articulada en C y se encuentra unida a un cable de control en A. Si la palanca se somete a una fuerza horizontal en B de 500 N, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C.

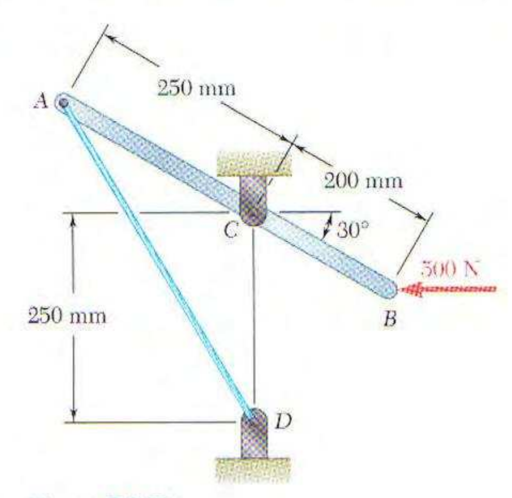


Figura P4.28

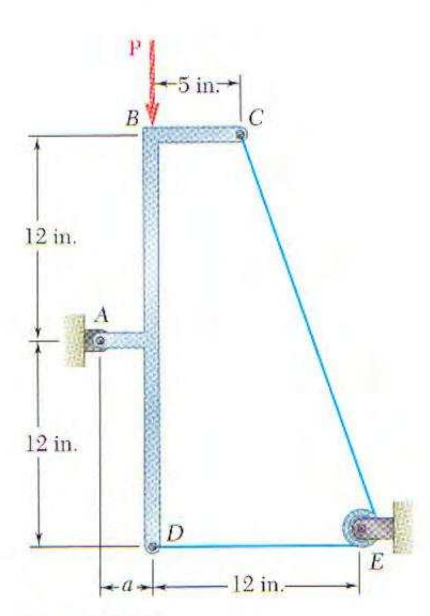


Figura P4.29

4.29 Se aplica una fuerza **P** con magnitud de 280 lb al elemento $ABCD$, el cual se sostiene mediante un pasador sin fricción en A y por medio del cable CED. Como el cable pasa sobre una pequeña polea en E, se puede suponer que la tensión es la misma en los tramos CE y ED del cable. Para el caso en que $a = 3$ in., determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la reacción en A.

4.30 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en el apoyo C.

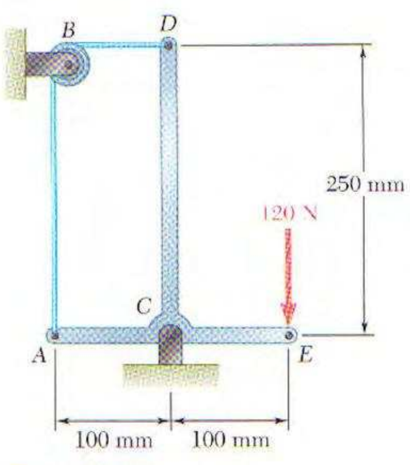


Figura P4.30

4.31 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R. Si se sabe que $\theta = 30°$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C.

4.32 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R. Si se sabe que $\theta = 60°$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C.

4.33 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 60°$.

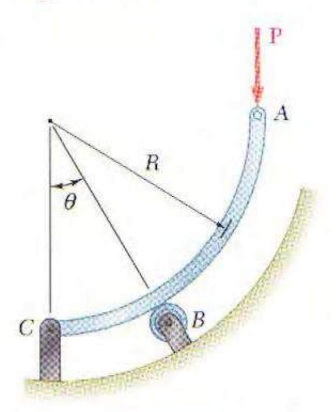


Figura *P4.31* y *P4.32*

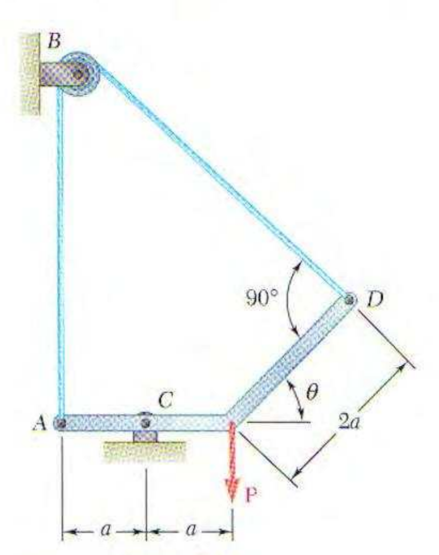


Figura P4.33 y P4.34

4.34 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 45°$.

4.35 Una varilla ligera AD se sostiene mediante clavijas sin fricción en B y C y descansa contra una pared sin fricción en A. Se aplica una fuerza vertical de 120 lb en D. Determine las reacciones en A, B y C.

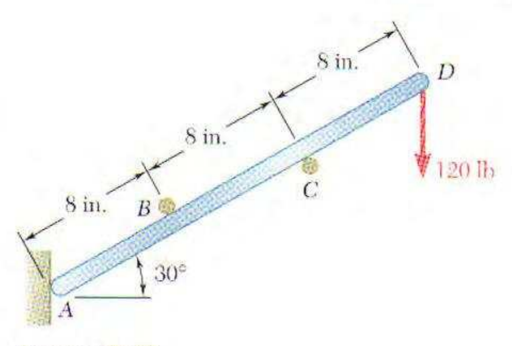


Figura P4.35

4.36 Una barra ligera AD se encuentra suspendida de un cable BE y sostiene un bloque de 50 lb en C. Los extremos A y D de la barra están en contacto con paredes verticales sin fricción. Determine la tensión en el cable BE y las reacciones en A y D.

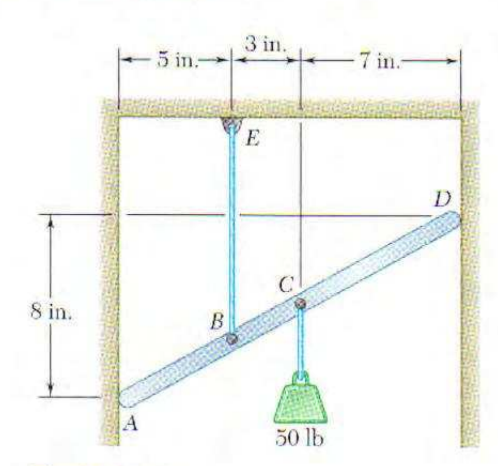


Figura P4.36

4.37 La barra AC soporta dos cargas de 400 N como se muestra en la figura. Los rodillos en A y C descansan sobre superficies sin fricción y el cable BD está unido en B. Determine *a*) la tensión en el cable BD, *b*) la reacción en A y *c*) la reacción en C.

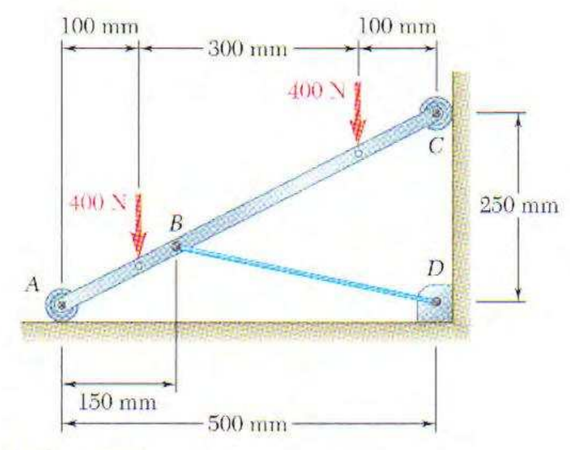


Figura P4.37

4.38 Determine la tensión en cada cable y la reacción en D.

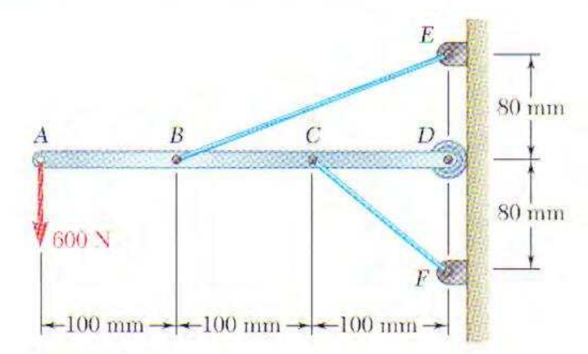


Figura P4.38

4.39 Se cortan dos ranuras en la placa DEF mostrada en la figura, y la placa se coloca de manera que las ranuras se ajusten a dos pasadores fijos sin fricción en A y B. Si se sabe que $P = 15$ lb, determine *a*) la fuerza que ejerce cada pasador sobre la placa, *b*) la reacción en F.

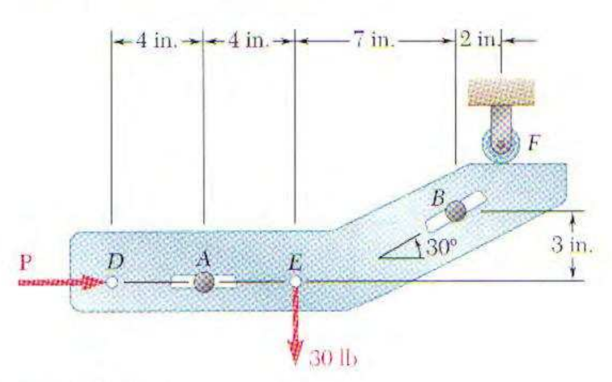


Figura *P4.39*

4.40 Para la placa del problema 4.39, la reacción en F debe estar dirigida hacia abajo, y su valor permisible máximo es de 20 lb. Si se desprecia la fricción en los pasadores, determine el rango requerido para los valores de P.

4.41 La barra AD se une en A y C a los collarines que pueden moverse libremente sobre las varillas mostradas. Si la cuerda BE está en posición vertical ($\alpha = 0$), determine la tensión en la cuerda y las reacciones en A y en C.

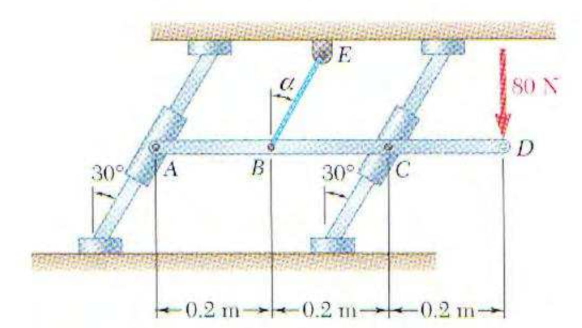


Figura P4.41

4.42 Ahora resuelva el problema 4.41 si la cuerda BE se encuentra paralela a las varillas ($\alpha = 30°$).

4.43 Una masa de 8 kg puede sostenerse de las tres formas diferentes que se muestran en la figura. Si se sabe que las poleas tienen un radio de 100 mm, determine en cada caso las reacciones en A.

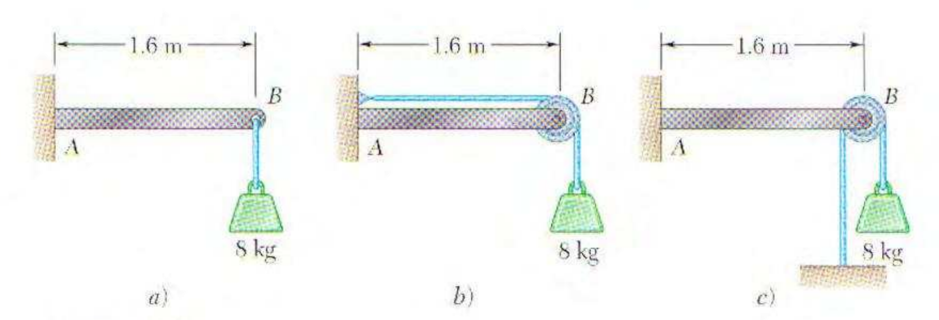


Figura P4.43

4.44 Mientras una cinta pasa a través del sistema de apoyo mostrado en la figura, sobre ésta se mantiene una tensión de 5 lb. Si se sabe que el radio de cada polea es de 0.4 in., determine la reacción en C.

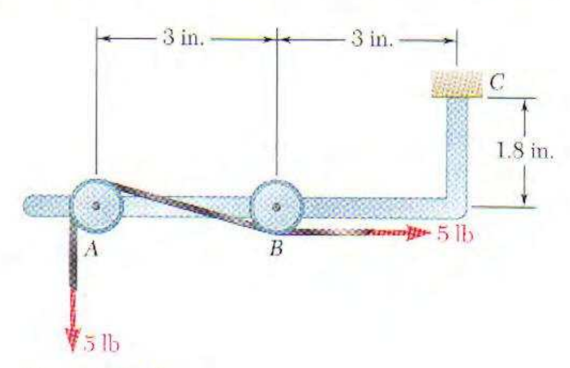


Figura P4.44

4.45 Retome el problema 4.44, y ahora suponga que se usan poleas con 0.6 in. de radio.

4.46 Un poste telefónico de 6 m que pesa 1 600 N se usa para sostener los extremos de dos alambres. Los alambres forman con la horizontal los ángulos que se muestran en la figura y las tensiones en los alambres son, respectivamente, $T_1 = 600$ N y $T_2 = 375$ N. Determine la reacción en el extremo fijo A.

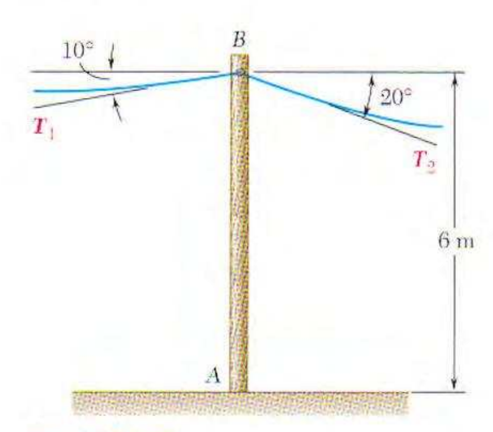


Figura P4.46

4.47 La viga AD soporta las dos cargas de 40 lb que se muestran en la figura. La viga se sostiene mediante un soporte fijo en D y por medio del cable BE que está unido al contrapeso W. Determine la reacción en D cuando *a*) $W = 100$ lb, *b*) $W = 90$ lb.

4.48 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de W para los que la magnitud del par en D no excede 40 lb · ft.

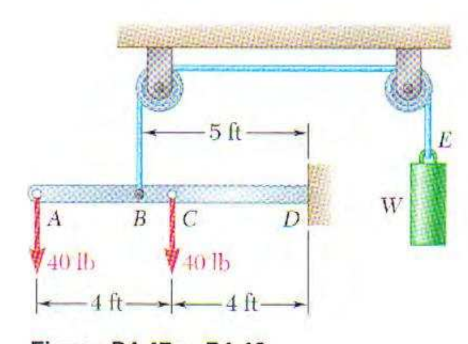


Figura P4.47 y *P4.48*



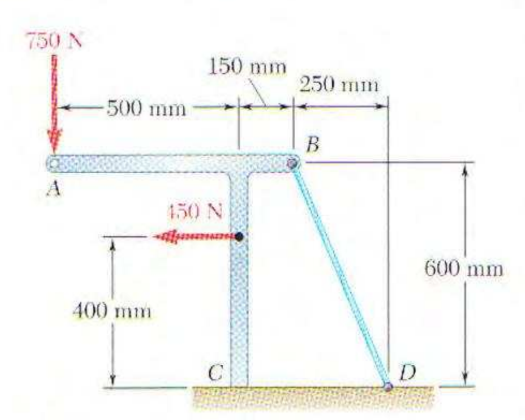


Figura P4.49 y P4.50

4.49 Si se sabe que la tensión en el alambre BD es de 1 300 N, determine la reacción del bastidor mostrado en el apoyo fijo C.

4.50 Determine el rango de valores permisibles para la tensión en el alambre BD si la magnitud del par en el apoyo fijo C no debe ser mayor que 100 N · m.

4.51 Una carga vertical **P** se aplica en el extremo B de la barra BC. *a*) Desprecie el peso de la varilla y exprese el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio en términos de P, l y el contrapeso W. *b*) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 2W$.

4.52 Una barra delgada AB con un peso W está unida a los bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. Los bloques se conectan entre sí mediante una cuerda elástica que pasa sobre una polea en C. *a*) Exprese la tensión en la cuerda en términos de W y θ. *b*) Determine el valor de θ para el cual la tensión en la cuerda es igual a $3W$.

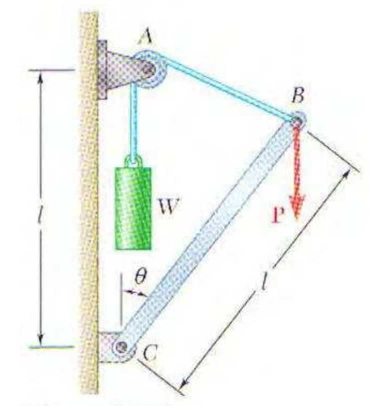


Figura P4.51

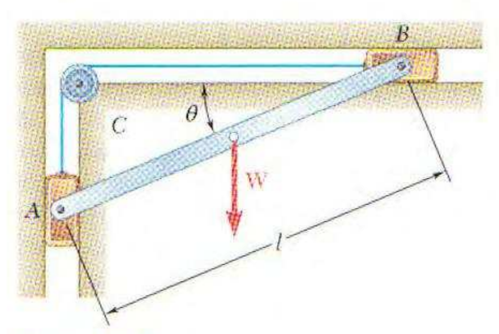


Figura P4.52

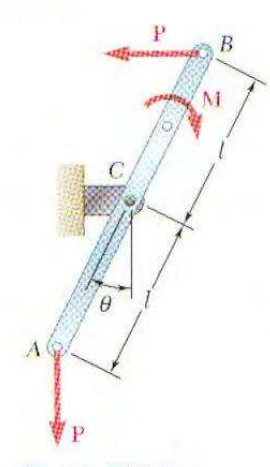


Figura P4.53

4.53 La barra AB se somete a la acción de un par **M** y a dos fuerzas, cada una de las cuales tiene una magnitud P. *a*) Obtenga una ecuación en función de θ, P, M y l que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio. *b*) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $M = 150$ N · m., $P = 200$ N y $l = 600$ mm.

4.54 La varilla AB está unida a un collarín en A y descansa contra un pequeño rodillo en C. *a*) Desprecie el peso de la varilla AB y obtenga una ecuación en términos de P, Q, a, l y θ que se cumpla cuando la varilla está en equilibrio. *b*) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 16$ lb, $Q = 12$ lb, $l = 20$ in. y $a = 5$ in.

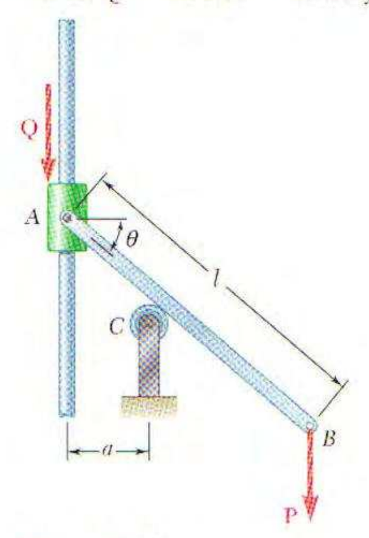


Figura P4.54

4.55 Un collarín B de peso W puede moverse libremente a lo largo de la barra vertical mostrada en la figura. El resorte de constante k se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a*) Encuentre una ecuación en términos de θ, W, k y l que se cumpla cuando el collarín está en equilibrio. *b*) Si se sabe que $W = 300$ N, $l = 500$ mm y $k = 800$ N/m, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

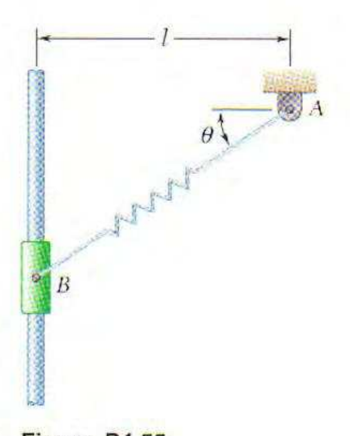


Figura *P4.55*

4.56 Una carga vertical **P** se aplica en el extremo B de la barra BC. La constante del resorte es k y se encuentra sin deformar cuando $\theta = 90°$. Sin tomar en cuenta el peso de la barra, determine *a*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio, expresado en términos de P, k y l y *b*) el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = \frac{1}{4}kl$.

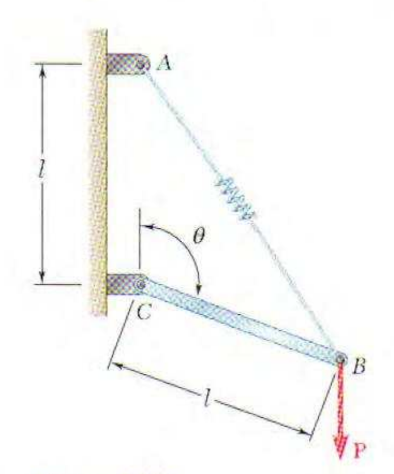


Figura *P4.56*

4.57 Retome el problema resuelto 4.5, y ahora suponga que el resorte se encuentra sin deformación cuando $\theta = 90°$.

4.58 Una barra delgada AB de peso W se une a los bloques A y B que se mueven libremente sobre las guías mostradas en la figura. El resorte, que tiene una constante k, se encuentra sin deformar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, encuentre una ecuación en términos de W, k, l y θ que se cumpla cuando la barra está en equilibrio. *b*) Determine el valor de θ cuando $W = 75$ lb, $l = 30$ in. y $k = 3$ lb/in.

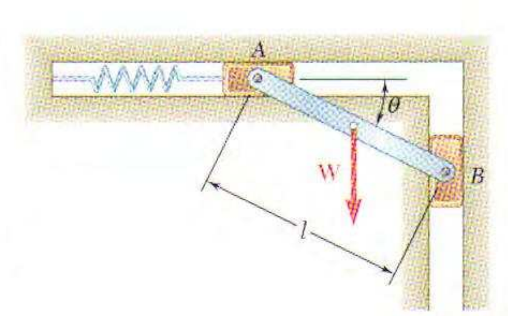


Figura P4.58

4.59 Ocho placas rectangulares idénticas de 500×750 mm, cada una con una masa $m = 40$ kg, se mantienen en el plano vertical mostrado en la figura. Todas las conexiones consisten en pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. En cada caso, determine *a*) si la placa está completa, parcial o impropiamente restringida, *b*) si las reacciones son estáticamente determinadas o indeterminadas y *c*) si, en la posición mostrada, se mantiene el equilibrio de la placa. También, de ser posible, calcule las reacciones.

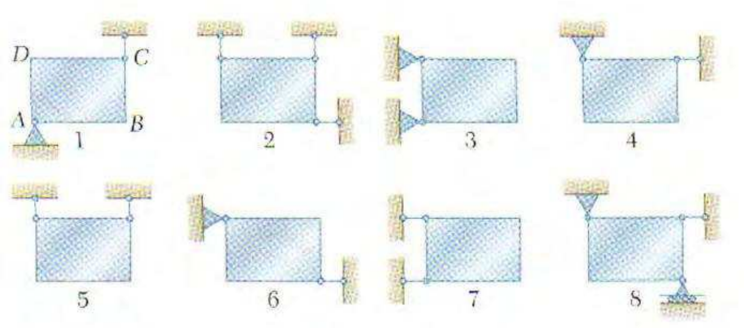


Figura P4.59

4.60 La ménsula ABC puede sostenerse en las ocho formas diferentes mostradas en la figura. Todas las conexiones consisten en pernos sin fricción, rodillos o eslabones cortos. Para cada caso responda las preguntas enlistadas en el problema 4.59 y, de ser posible, calcule las reacciones suponiendo que la magnitud de la fuerza **P** es de 100 lb.

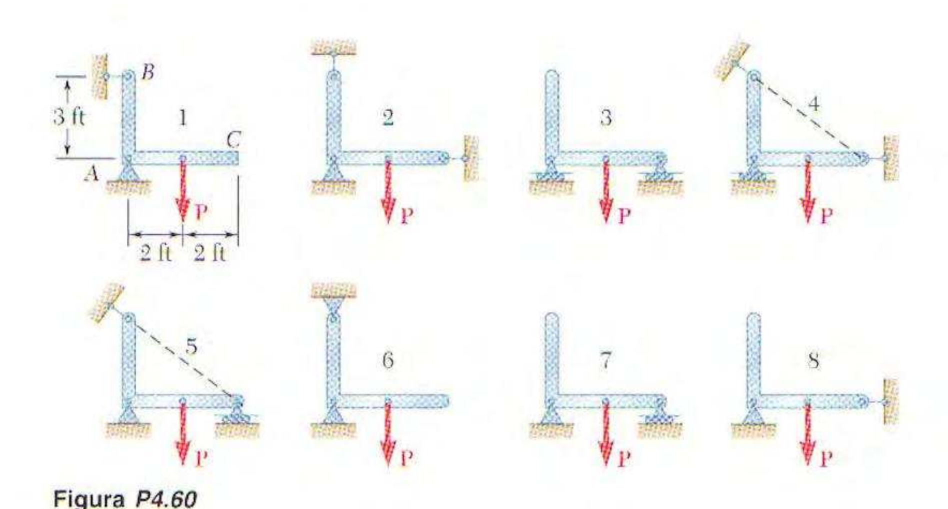


Figura *P4.60*

4.6. EQUILIBRIO DE UN CUERPO SUJETO A DOS FUERZAS

Un caso particular de equilibrio que es de considerable interés es el de un cuerpo rígido sujeto a la acción de dos fuerzas. Por lo general, un cuerpo que se encuentra en estas circunstancias recibe el nombre de *cuerpo sujeto a dos fuerzas*. A continuación se demostrará que *si un cuerpo sujeto a dos fuerzas está en equilibrio entonces las dos fuerzas que actúan sobre éste deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.*

Considérese una placa en ángulo sujeta a dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan, respectivamente, en A y B (figura 4.8*a*). Si la placa está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Primero se suman momentos con respecto a A. Como, obviamente, el momento de $\mathbf{F}_1$ es igual a cero, el momento de $\mathbf{F}_2$ también debe ser igual a cero y la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ debe pasar a través de A (figura 4.8*b*). En forma similar, sumando momentos con respecto a B se demuestra que la línea de acción de $\mathbf{F}_1$ debe pasar a través de B (figura 4.8*c*). Por tanto, ambas fuerzas tienen la misma línea de acción (que resulta ser la línea AB). A partir de cualquiera de las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se observa que las fuerzas también deben tener la misma magnitud pero sentidos opuestos.

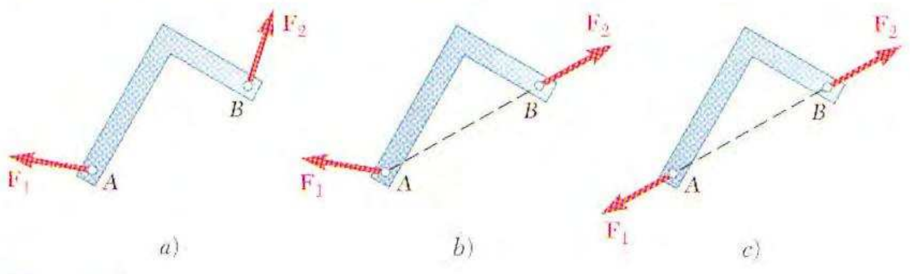


Figura 4.8

Si varias fuerzas actúan en dos puntos A y B, las fuerzas que actúan en A pueden ser reemplazadas por su resultante $\mathbf{F}_1$ y las de B pueden reemplazarse por su resultante $\mathbf{F}_2$. Por tanto, en una forma más general, un cuerpo sujeto a dos fuerzas puede definirse como *un cuerpo rígido sujeto a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos*. Entonces, las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (figura 4.8).

En el estudio de estructuras, marcos y máquinas se verá que saber identificar los cuerpos sometidos a la acción de dos fuerzas simplifica la solución de ciertos problemas.

4.7. EQUILIBRIO DE UN CUERPO SUJETO A TRES FUERZAS

Otro caso de equilibrio que es de gran interés es aquel de un *cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas*, esto es, un cuerpo rígido sobre el que actúan tres fuerzas o, en forma más general, *un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos*. Considérese un cuerpo rígido bajo un sistema de fuerzas que puede reducirse a tres fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ que actúan, respectivamente, en A, B y C (figura 4.9*a*). A continuación se demostrará que si el cuerpo está en equilibrio, *las líneas de acción de las tres fuerzas deben ser concurrentes o paralelas*.

Como el cuerpo rígido está en equilibrio, la suma de los momentos de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ con respecto a cualquier eje debe ser igual a cero. Suponga que las líneas de acción de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se intersecan y al representar su punto de intersección con D, se suman momentos con respecto a D (figura 4.9*b*). Como los momentos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con respecto a D son iguales a cero, el momento de $\mathbf{F}_3$ con respecto a D también debe ser igual a cero y la línea de acción de $\mathbf{F}_3$ debe pasar a través de D (figura 4.9*c*). Por tanto, las tres líneas de acción son concurrentes. La única excepción se da cuando ninguna de las líneas de acción se intersecan; entonces, dichas líneas son paralelas.

Aunque los problemas relacionados con cuerpos sujetos a tres fuerzas se pueden resolver por medio de los métodos generales de las secciones 4.3 a la 4.5, la propiedad que se acaba de establecer puede utilizarse para resolverlos en forma gráfica o matemática a partir de relaciones trigonométricas o geométricas simples.

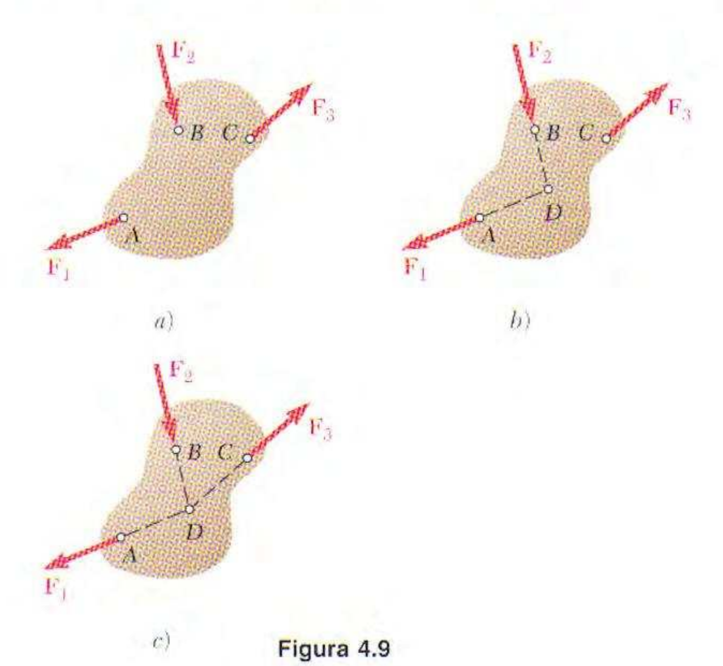
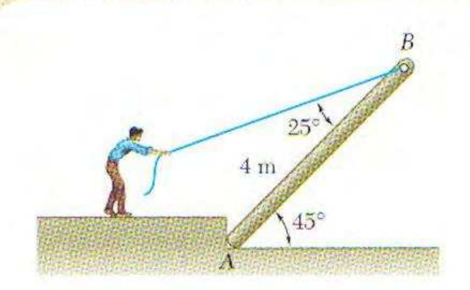


Figura 4.9



PROBLEMA RESUELTO 4.6

Un hombre levanta una vigueta de 10 kg y de 4 m de longitud tirando de una cuerda. Encuentre la tensión T en la cuerda y la reacción en A.

SOLUCIÓN

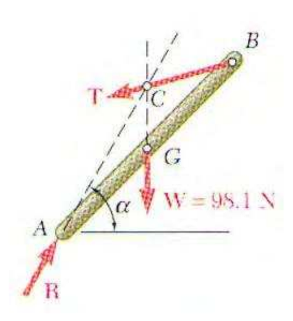
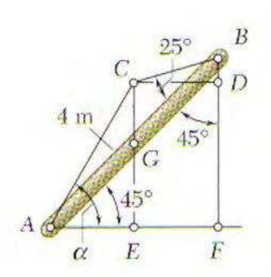


Diagrama de cuerpo libre. La vigueta es un cuerpo sujeto a tres fuerzas: su peso **W**, la fuerza **T** ejercida por la cuerda y la reacción **R** ejercida por el suelo en A. Se observa que

$$W = mg = (10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$$



Cuerpo sujeto a tres fuerzas. Como la vigueta es un cuerpo sujeto a tres fuerzas, éstas al actuar deben ser concurrentes. Por tanto, la reacción **R** pasará a través del punto de intersección C de las líneas de acción del peso **W** y de la fuerza de tensión **T**. Este hecho se utilizará para determinar el ángulo α que forma **R** con la horizontal.

Trazando la línea vertical BF a través de B y la línea horizontal CD a través de C, se observa que

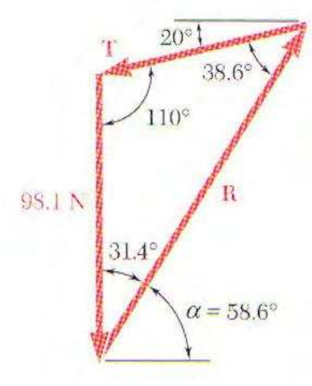
$$AF = BF = (AB) \cos 45° = (4 \text{ m}) \cos 45° = 2.828 \text{ m}$$
$$CD = EF = AE = \tfrac{1}{2}(AF) = 1.414 \text{ m}$$
$$BD = (CD) \cot (45° + 25°) = (1.414 \text{ m}) \tan 20° = 0.515 \text{ m}$$
$$CE = DF = BF - BD = 2.828 \text{ m} - 0.515 \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

Así, se escribe

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313 \text{ m}}{1.414 \text{ m}} = 1.636$$

$\alpha = 58.6°$ ◀

Ahora se conocen las direcciones de todas las fuerzas que actúan sobre la vigueta.



Triángulo de fuerzas. Se dibuja un triángulo de fuerzas, como se muestra en la figura y se calculan sus ángulos interiores a partir de las direcciones conocidas de las fuerzas. Con el uso de la ley de los senos se escribe

$$\frac{T}{\text{sen } 31.4°} = \frac{R}{\text{sen } 110°} = \frac{98.1 \text{ N}}{\text{sen } 38.6°}$$

$T = 81.9 \text{ N}$ ◀

$\mathbf{R} = 147.8 \text{ N} \measuredangle 58.6°$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores cubrieron dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido.

1. Un cuerpo sujeto a dos fuerzas es un cuerpo que está sometido a fuerzas que actúan sólo en dos puntos. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos*. Esta propiedad permitirá simplificar la solución de algunos problemas reemplazando las dos componentes desconocidas de una reacción, por una sola fuerza de magnitud desconocida pero cuya *dirección es conocida*.

2. Un cuerpo sujeto a tres fuerzas es un cuerpo que está sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos deben ser *concurrentes* o *paralelas*. Para resolver un problema que involucra a un cuerpo sujeto a tres fuerzas concurrentes, se dibuja el diagrama de cuerpo libre mostrando que estas tres fuerzas pasan a través del mismo punto. Entonces, el uso de la geometría elemental permitirá completar la solución utilizando un triángulo de fuerzas [problema resuelto 4.6].

A pesar de que es fácil entender el principio señalado en el párrafo anterior para la solución de problemas que involucran a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas, puede ser difícil dibujar las construcciones geométricas necesarias. Si se tienen dificultades, primero se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre de tamaño razonable y entonces, se debe buscar una relación entre longitudes conocidas o que se puedan calcular fácilmente y una dimensión que involucre a una incógnita. Esto se hizo en el problema resuelto 4.6, donde las dimensiones AE y CE, que eran fáciles de calcular, fueron empleadas para determinar el ángulo α.

Problemas

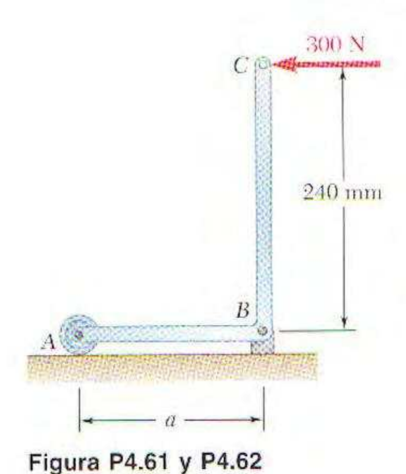


Figura P4.61 y P4.62

4.61 Determine las reacciones en A y B cuando $a = 180$ mm.

4.62 Para la ménsula y la carga mostradas, determine el rango de valores de la distancia a para los cuales la magnitud de la reacción en B no excede 600 N.

4.63 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.17.

4.64 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.18.

4.65 La llave mostrada se usa para girar un eje. Un pasador entra a un orificio en A, mientras que una superficie plana y sin fricción descansa contra el eje en B. Si se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ de 60 lb sobre la llave en D, determine las reacciones en A y B.

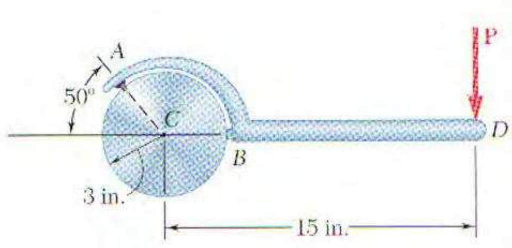


Figura *P4.65*

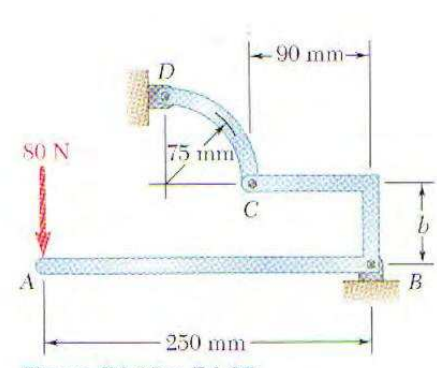


Figura P4.66 y P4.67

4.66 Determine las reacciones en B y D cuando $b = 60$ mm.

4.67 Determine las reacciones en B y D cuando $b = 120$ mm.

4.68 Determine las reacciones en B y C cuando $a = 1.5$ in.

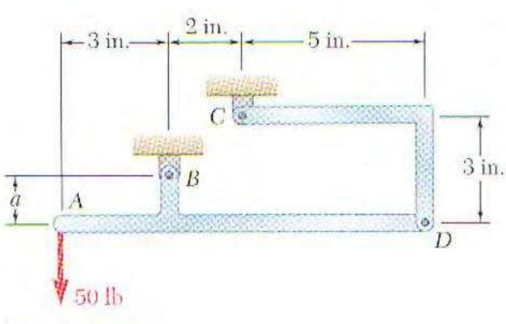


Figura *P4.68*

4.69 Una caja de 50 kg se sostiene mediante la grúa viajera mostrada en la figura. Si se sabe que $a = 1.5$ m, determine *a*) la tensión en el cable CD y *b*) la reacción en B.

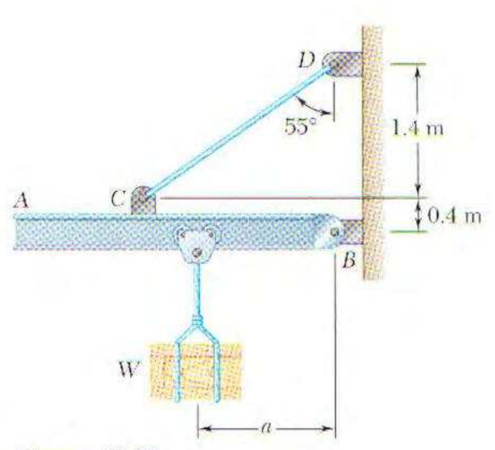


Figura P4.69

4.70 Retome el problema 4.69, y ahora suponga que $a = 3$ m.

4.71 Un extremo de la varilla AB descansa en la esquina A y el otro se encuentra unido a la cuerda BD. Si la varilla está sometida a una carga de 400 lb en su punto medio C, determine la reacción en A y la tensión en la cuerda.

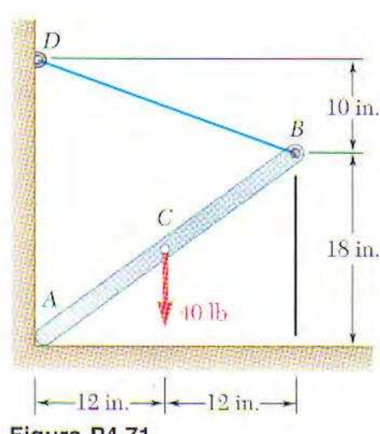


Figura P4.71

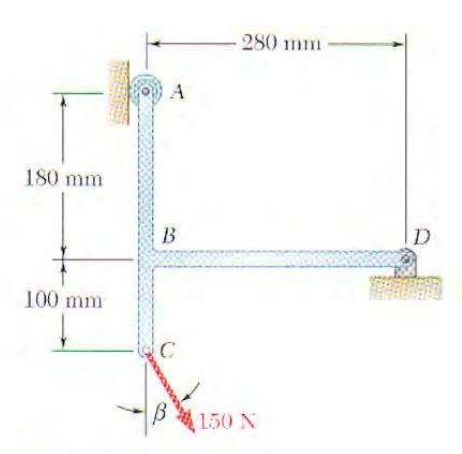


Figura *P4.72* y *P4.73*

4.72 Determine las reacciones en A y D cuando $\beta = 30°$.

4.73 Determine las reacciones en A y D cuando $\beta = 60°$.

4.74 Un rodillo de 40 lb, con 8 in. de diámetro, se usa sobre un suelo de teja y descansa en el desnivel que se muestra en la figura. Si se sabe que el espesor de cada teja es de 0.3 in., determine la fuerza **P** requerida para mover el rodillo sobre las tejas si éste *a*) se empuja hacia la izquierda, *b*) se jala hacia la derecha.

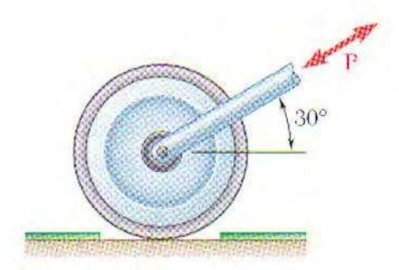


Figura P4.74

4.75 y *4.76* El elemento ABC se sostiene por medio de un apoyo de pasador en B y mediante una cuerda inextensible unida en A y C que pasa sobre una polea sin fricción en D. Se supone que la tensión en los tramos AD y CD de la cuerda es la misma. Para las cargas mostradas en las figuras y sin tomar en cuenta el tamaño de la polea, determine la tensión en la cuerda y la reacción en B.

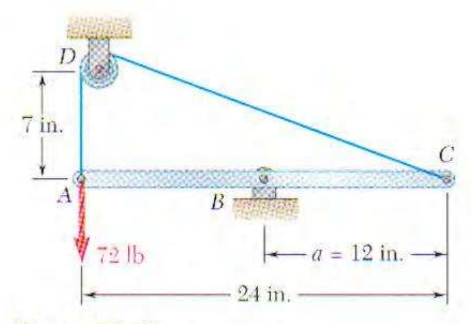


Figura P4.75

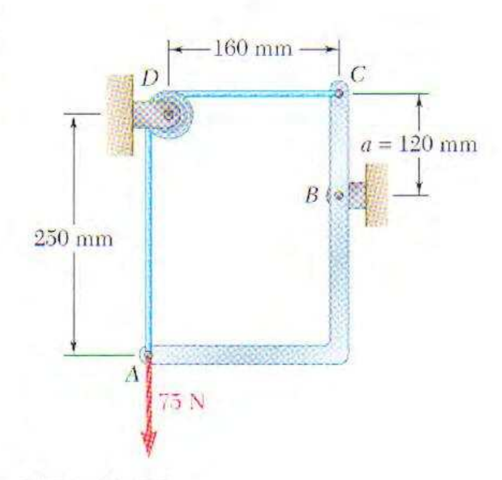


Figura *P4.76*

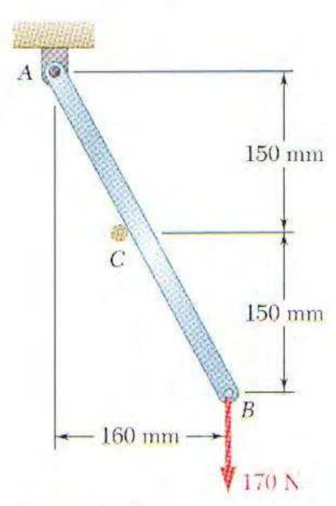


Figura P4.77

4.77 La varilla AB se sostiene mediante un apoyo de pasador en A y descansa sobre una clavija sin fricción en C. Determine las reacciones en A y C cuando se aplica una fuerza vertical de 170 N en B.

4.78 Retome el problema 4.77, y ahora suponga que la fuerza de 170 N aplicada en B es horizontal y se dirige hacia la izquierda.

4.79 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.21.

4.80 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.28.

4.81 Si se sabe que $\theta = 30°$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C.

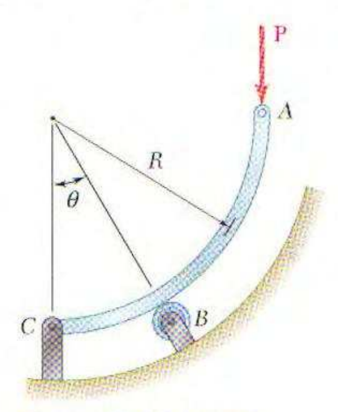


Figura P4.81 y P4.82

4.82 Si se sabe que $\theta = 60°$, determine la reacción *a*) en B y *b*) en C.

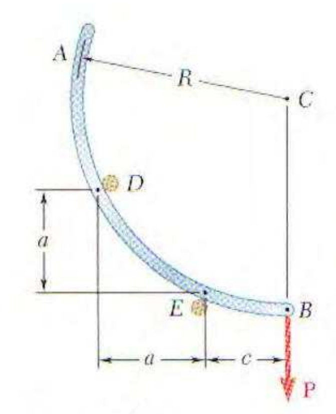


Figura P4.83

4.83 La varilla AB está doblada en forma de arco de círculo y se coloca entre las clavijas D y E. La barra soporta una carga **P** en el extremo B. Sin tomar en cuenta la fricción ni el peso de la barra, determine la distancia c correspondiente a la posición de equilibrio cuando $a = 20$ mm y $R = 100$ mm.

4.84 Una varilla delgada de longitud L está unida a dos collarines que se pueden deslizar libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si se sabe que la barra está en equilibrio, obtenga una expresión para calcular el ángulo θ en términos del ángulo β.

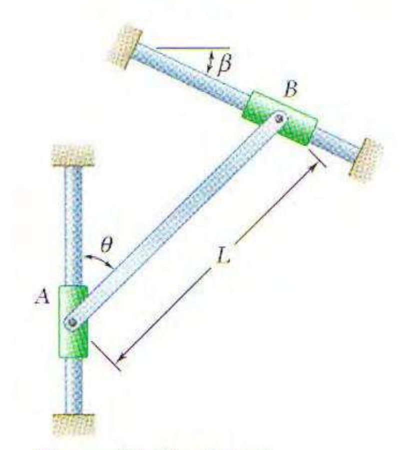


Figura P4.84 y P4.85

4.85 Una varilla delgada de 8 kg, con longitud L, está unida a dos collarines que se pueden deslizar libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si se sabe que la barra está en equilibrio y que $\beta = 30°$, determine *a*) el ángulo θ que forma la barra con la vertical y *b*) las reacciones en A y B.

4.86 Una varilla delgada uniforme de longitud L se mantiene en equilibrio como se muestra en la figura, con uno de sus extremos apoyado sobre una pared sin fricción y el otro unido a una cuerda de longitud S. Obtenga una expresión para calcular la distancia h en términos de L y S. Demuestre que si $S > 2L$ la posición de equilibrio no existe.

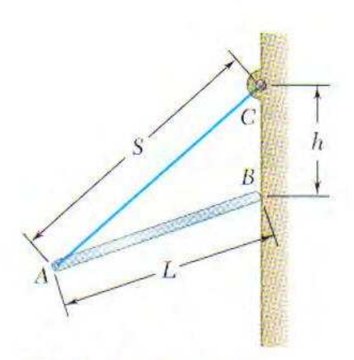


Figura *P4.86* y P4.87

4.87 Una varilla delgada de longitud $L = 20$ in. se mantiene en equilibrio como se muestra en la figura, con uno de sus extremos apoyado sobre una pared sin fricción y el otro unido a una cuerda de longitud $S = 30$ in. Si se sabe que el peso de la barra es de 10 lb, determine *a*) la distancia h, *b*) la tensión en la cuerda y *c*) la reacción en B.

4.88 Una varilla uniforme AB de longitud $2R$ se apoya en el interior de un recipiente semiesférico de radio R como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta la fricción, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

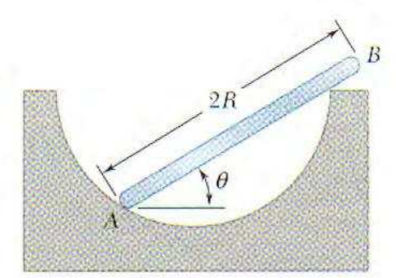


Figura P4.88

4.89 Una varilla delgada de longitud L y peso W está unida a un collarín en A y se conecta a una pequeña rueda en B, además se sabe que la rueda gira libremente a lo largo de una superficie cilíndrica de radio R. Sin tomar en cuenta la fricción, obtenga una ecuación en términos de θ, L y R que se cumpla cuando la varilla se encuentra en equilibrio.

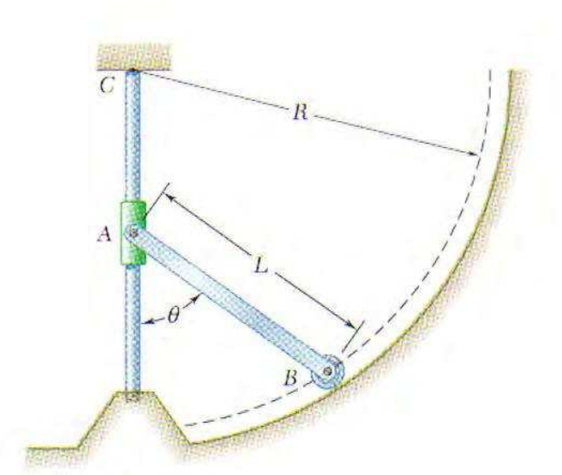


Figura *P4.89*

4.90 Para la varilla del problema 4.89, $L = 15$ in., $R = 20$ in. y $W = 10$ lb. Determine *a*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio y *b*) las reacciones en A y B.

EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

4.8. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

En la sección 4.1 se explicó que, para el caso general de tres dimensiones, se requieren seis ecuaciones escalares para expresar las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{4.2}$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{4.3}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para un máximo de *seis incógnitas* que, generalmente, representarán reacciones en los apoyos o las conexiones.

En la mayor parte de los problemas, las ecuaciones escalares (4.2) y (4.3) se obtendrán de modo más práctico si primero se expresan en forma vectorial las condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido considerado. Para ello se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \tag{4.1}$$

y se expresan las fuerzas $\mathbf{F}$ y los vectores de posición $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Después, se calculan todos los productos vectoriales, ya sea mediante cálculo directo o con determinantes (vea la sección 3.8). Se observa que a través de una selección cuidadosa del punto O se pueden eliminar de los cálculos hasta tres componentes desconocidas de las reacciones. Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en cada una de las dos relaciones (4.1), se obtienen las ecuaciones escalares deseadas.[†]

4.9. REACCIONES EN PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES PARA UNA ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL

En una estructura tridimensional, las reacciones abarcan desde una sola fuerza de dirección conocida, que ejerce una superficie sin fricción, hasta un sistema fuerza-par ejercido por un apoyo fijo. Por tanto, en los problemas que involucran el equilibrio de una estructura tridimensional pueden existir entre una y seis incógnitas asociadas con la reacción correspondiente a cada apoyo o conexión. En la figura 4.10 se muestran varios tipos de apoyos y conexiones con sus respectivas reacciones. Una forma sencilla de determinar tanto el tipo de reacción correspondiente a un apoyo o conexión dado, como el número de incógnitas involucradas, consiste en establecer cuáles de los seis movimientos fundamentales

[†]En algunos problemas, es conveniente eliminar de la solución las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación de equilibrio $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual implica determinar los momentos de las fuerzas respecto al eje AB que une los puntos A y B (vea el problema resuelto 4.10).

(traslación en las direcciones x, y y z y rotación con respecto a los ejes x, y y z) están permitidos y cuáles de estos movimientos están restringidos.

Por ejemplo, los apoyos de bola y cuenca o de rótula, las superficies sin fricción (lisas) y los cables sólo impiden la traslación en una dirección y, por tanto, ejercen una sola fuerza cuya línea de acción es conocida; así, cada uno de estos apoyos involucra una incógnita, la cual está dada por la magnitud de la reacción. Los rodillos sobre superficies rugosas y las ruedas sobre rieles impiden la traslación en dos direcciones; por consiguiente, las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza desconocidas. Las superficies rugosas en contacto directo y las rótulas (bola y cuenca) impiden la traslación en tres direcciones; por tanto estos apoyos involucran tres componentes de fuerza desconocidas.

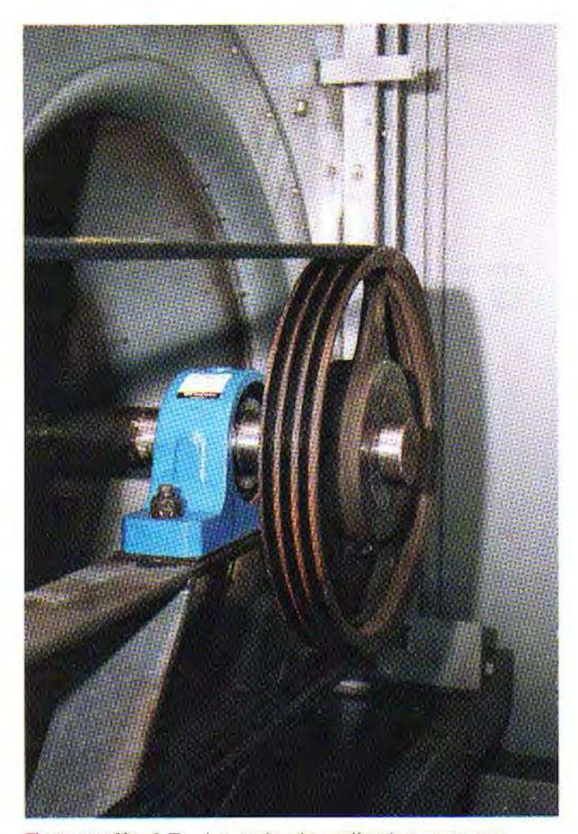


Fotografía 4.6 Las juntas universales que se encuentran comúnmente en las flechas motrices de los autos y camiones de tracción trasera, permiten la transmisión del movimiento rotacional entre dos ejes no colineales.

Algunos apoyos y conexiones pueden impedir la rotación y la traslación; en estos casos, las reacciones correspondientes incluyen tanto pares como fuerzas. Por ejemplo, la reacción en un apoyo fijo, la cual impide cualquier movimiento (tanto de rotación como de traslación), consiste en tres fuerzas y tres pares, todos desconocidos. Una junta universal diseñada para permitir la rotación alrededor de dos ejes ejercerá una reacción que consiste en tres componentes de fuerza y un par, todos desconocidos.

Otros apoyos y conexiones se usan primordialmente para impedir traslaciones; sin embargo, su diseño es tal que también impiden algunas rotaciones. Las reacciones correspondientes consisten en componentes de fuerza pero también *pueden* incluir pares. Un grupo de apoyos de este tipo incluye las bisagras y los cojinetes diseñados para soportar sólo cargas radiales (por ejemplo, las chumaceras y los cojinetes de rodillos). Las reacciones correspondientes consisten en dos componentes de fuerza pero pueden incluir también dos pares. Otro grupo incluye apoyos de pasador y ménsula, bisagras y cojinetes diseñados para soportar tanto un empuje axial como una carga radial (por ejemplo, los cojinetes de bola). Las reacciones correspondientes consisten en tres componentes de fuerza pero pueden incluir dos pares. Sin embargo, estos apoyos no ejercerán pares apreciables bajo condiciones normales de uso. Por tanto, en su análisis *sólo* se deben incluir las componentes de fuerza *a menos que* se encuentre que los pares son necesarios para mantener el equilibrio del cuerpo rígido o si se sabe que el apoyo ha sido diseñado específicamente para ejercer un par (véanse problemas del 4.119 al 4.122).

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, hay más incógnitas que ecuaciones y algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*. Si las reacciones involucran menos de seis incógnitas, existen más ecuaciones que incógnitas y pueden no cumplirse algunas de las ecuaciones de equilibrio bajo una condición general de carga, en tales circunstancias, el cuerpo rígido sólo *está parcialmente restringido*. Sin embargo, bajo condiciones específicas de carga correspondientes a un problema dado, las ecuaciones adicionales se reducen a identidades triviales, como $0 = 0$ y pueden descartarse; así, aunque el cuerpo rígido sólo está parcialmente restringido, éste permanece en equilibrio (véanse los problemas resueltos 4.7 y 4.8). A pesar de que se tengan seis o más incógnitas, es posible que no se cumplan algunas de las ecuaciones de equilibrio. Esto puede ocurrir cuando las reacciones asociadas con los apoyos son paralelas o intersecan a la misma línea; entonces, el cuerpo rígido tiene *restricción impropia*.



Fotografía 4.7 La caja de cojinetes que se muestra en la fotografía sostiene al eje de un ventilador usado en una instalación industrial.

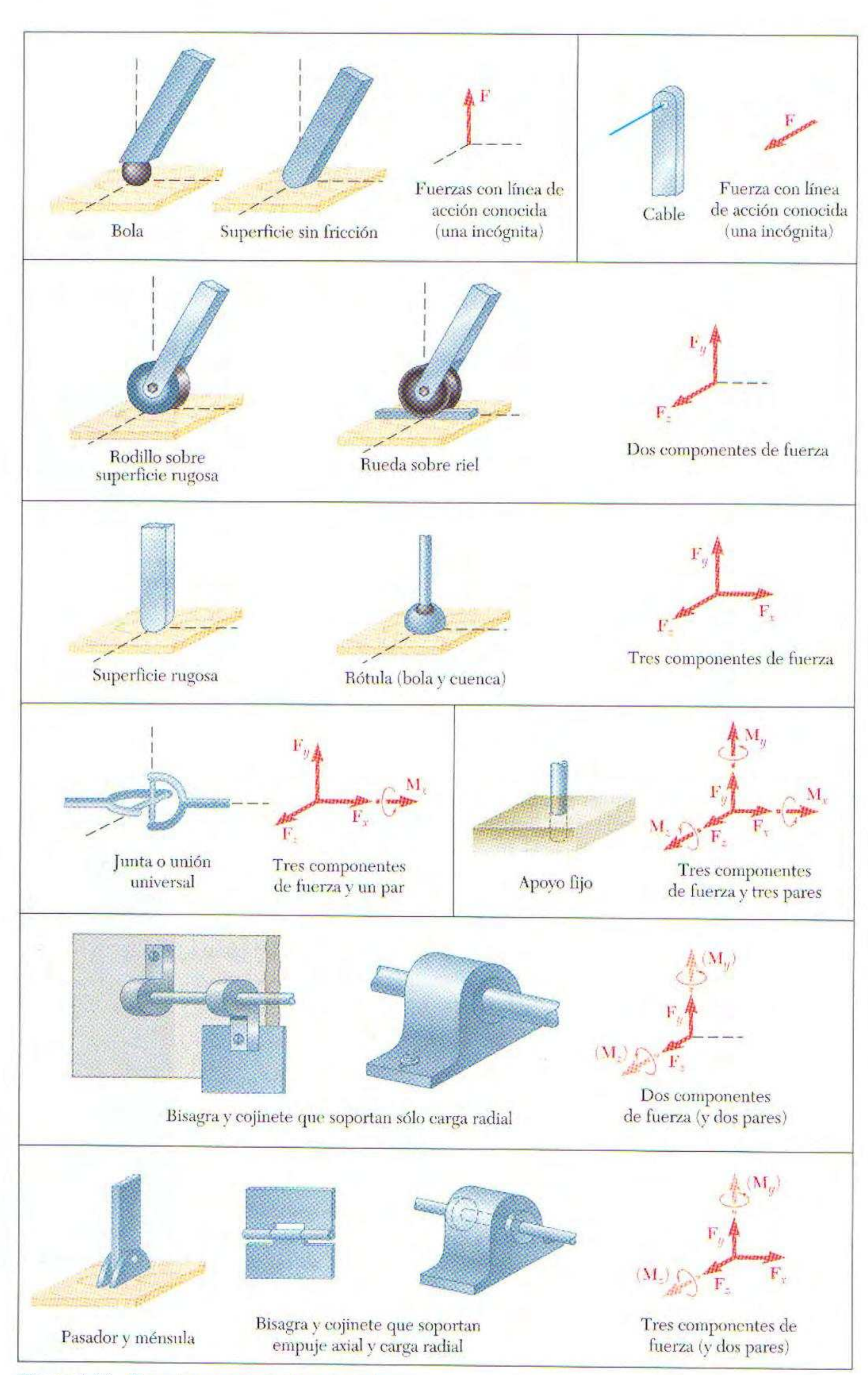
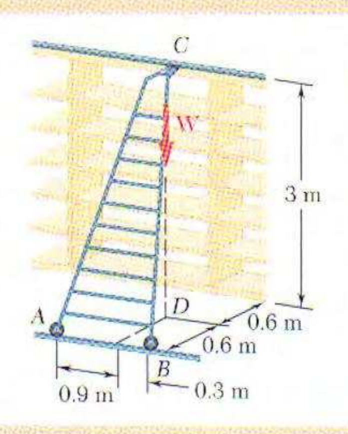
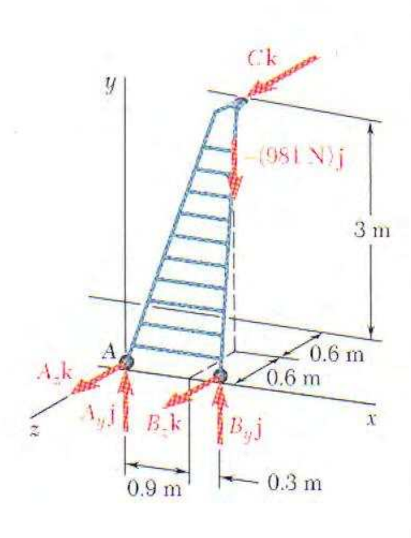


Figura 4.10 Reacciones en apoyos y conexiones.



PROBLEMA RESUELTO 4.7

Una escalera de 20 kg que se usa para alcanzar los estantes superiores en un almacén está apoyada en dos ruedas con pestañas A y B montadas sobre un riel y en una rueda sin pestañas C que descansa sobre un riel fijo a la pared. Un hombre de 80 kg se para sobre la escalera y se inclina hacia la derecha. La línea de acción del peso combinado **W** del hombre y la escalera interseca al piso en el punto D. Determínense las reacciones en A, B y C.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la escalera. Las fuerzas involucradas son el peso combinado del hombre y la escalera.

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981 \text{ N})\mathbf{j}$$

y cinco componentes de reacción desconocidos, dos en cada rueda con pestañas y uno en la rueda sin pestañas. Por tanto, la escalera sólo tiene restricción parcial; ésta se puede desplazar libremente a lo largo de los rieles. Sin embargo, la escalera está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma F_x = 0$.

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre la escalera forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k} - (981 \text{ N})\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 0$$

$$(A_y + B_y - 981 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z + B_z + C)\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \quad 1.2\mathbf{i} \times (B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) + (0.9\mathbf{i} - 0.6\mathbf{k}) \times (-981\mathbf{j}) + (0.6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1.2\mathbf{k}) \times C\mathbf{k} = 0$$

Calculando los productos vectoriales se tiene[†]

$$1.2B_y\mathbf{k} - 1.2B_z\mathbf{j} - 882.9\mathbf{k} - 588.6\mathbf{i} - 0.6C\mathbf{j} + 3C\mathbf{i} = 0$$

$$(3C - 588.6)\mathbf{i} - (1.2B_z + 0.6C)\mathbf{j} + (1.2B_y - 882.9)\mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** en la ecuación (2), se obtienen las tres ecuaciones escalares siguientes, las cuales expresan que la suma de los momentos con respecto a cada uno de los ejes coordenados debe ser igual a cero.

$$3C - 588.6 = 0 \qquad C = +196.2 \text{ N}$$
$$1.2B_z + 0.6C = 0 \qquad B_z = -98.1 \text{ N}$$
$$1.2B_y - 882.9 = 0 \qquad B_y = +736 \text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en B y C son

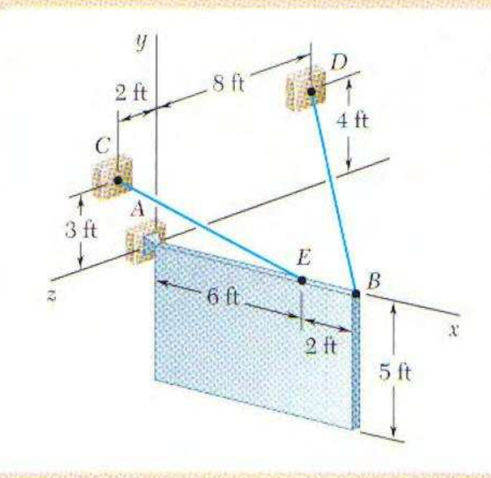
$$\mathbf{B} = +(736 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \qquad \mathbf{C} = +(196.2 \text{ N})\mathbf{k} \quad ◀$$

Al igualar a cero los coeficientes de **j** y **k** en la ecuación (1), se obtienen dos ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes en las direcciones de y y z son iguales a cero. Si se sustituyen por B_y, B_z y C los valores obtenidos anteriormente, se escribe

$$A_y + B_y - 981 = 0 \qquad A_y + 736 - 981 = 0 \qquad A_y = +245 \text{ N}$$
$$A_z + B_z + C = 0 \qquad A_z - 98.1 + 196.2 = 0 \qquad A_z = -98.1 \text{ N}$$

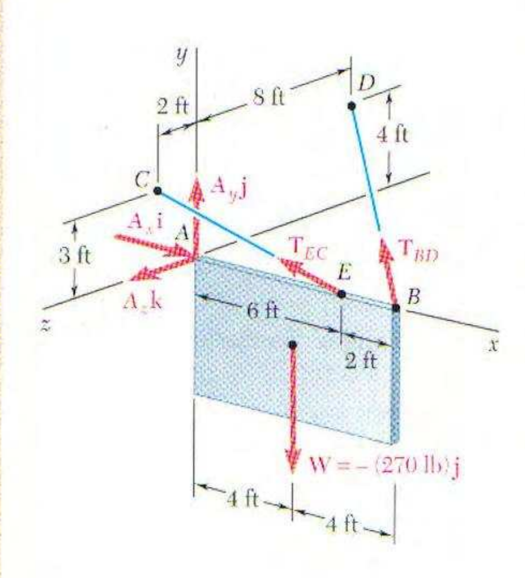
Se concluye que la reacción en A es $\qquad \mathbf{A} = +(245 \text{ N})\mathbf{j} - (98.1 \text{ N})\mathbf{k} \quad ◀$

[†]En este problema resuelto y en los problemas resueltos 4.8 y 4.9, los momentos también pueden expresarse en forma de determinantes (véase el problema resuelto 3.10).



PROBLEMA RESUELTO 4.8

Un anuncio de densidad uniforme de 5 × 8 ft pesa 270 lb y está apoyado por una rótula en A y por dos cables. Determine la tensión en cada cable y la reacción en A.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso $\mathbf{W} = -(270 \text{ lb})\mathbf{j}$ y las reacciones en A, B y E. La reacción en A es una fuerza cuya dirección es desconocida y se representa con tres componentes desconocidas. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de dichas fuerzas sólo involucra una incógnita: las magnitudes T_{BD} y T_{EC}. Como sólo hay cinco incógnitas, el anuncio tiene restricción parcial. Éste puede rotar libremente alrededor del eje x; sin embargo, el anuncio está en equilibrio bajo la condición de carga dada puesto que se satisface la ecuación $\Sigma M_x = 0$.

Las componentes de las fuerzas $\mathbf{T}_{BD}$ y $\mathbf{T}_{EC}$ pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas T_{BD} y T_{EC} al escribir

$$\overrightarrow{BD} = -(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (4 \text{ ft})\mathbf{j} - (8 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad BD = 12 \text{ ft}$$
$$\overrightarrow{EC} = -(6 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} + (2 \text{ ft})\mathbf{k} \qquad EC = 7 \text{ ft}$$
$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}\left(\frac{\overrightarrow{BD}}{BD}\right) = T_{BD}(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k})$$
$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC}\left(\frac{\overrightarrow{EC}}{EC}\right) = T_{EC}(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k})$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$
$$(A_x - \tfrac{2}{3}T_{BD} - \tfrac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \tfrac{1}{3}T_{BD} + \tfrac{3}{7}T_{EC} - 270 \text{ lb})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{3}T_{BD} + \tfrac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

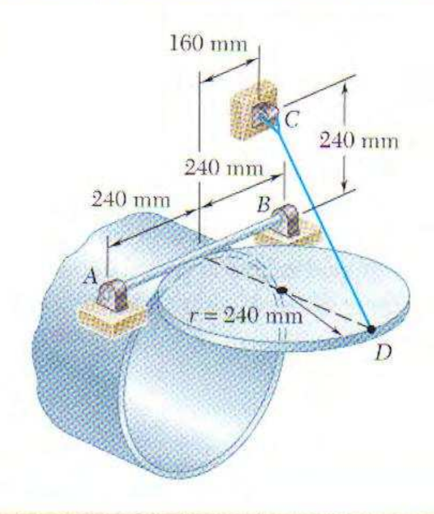
$$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$
$$(8 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{BD}(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) + (6 \text{ ft})\mathbf{i} \times T_{EC}(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k}) + (4 \text{ ft})\mathbf{i} \times (-270 \text{ lb})\mathbf{j} = 0$$
$$(2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1\,080 \text{ lb})\mathbf{k} + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})\mathbf{j} = 0 \qquad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (2), se obtienen dos ecuaciones escalares que deben resolverse para T_{BD} y T_{EC}:

$$T_{BD} = 101.3 \text{ lb} \qquad T_{EC} = 315 \text{ lb} \quad ◀$$

Al igualar a cero los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (1), se obtienen otras tres ecuaciones que proporcionan las componentes de $\mathbf{A}$. Así, se tiene que

$$\mathbf{A} = +(338 \text{ lb})\mathbf{i} + (101.2 \text{ lb})\mathbf{j} - (22.5 \text{ lb})\mathbf{k} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 4.9

Una tapa uniforme de un tubo que tiene un radio $r = 240$ mm y una masa de 30 kg se mantiene en una posición horizontal por medio del cable CD. Suponga que el cojinete en B no ejerce ninguna fuerza axial, determine la tensión en el cable y las reacciones en A y B.

SOLUCIÓN

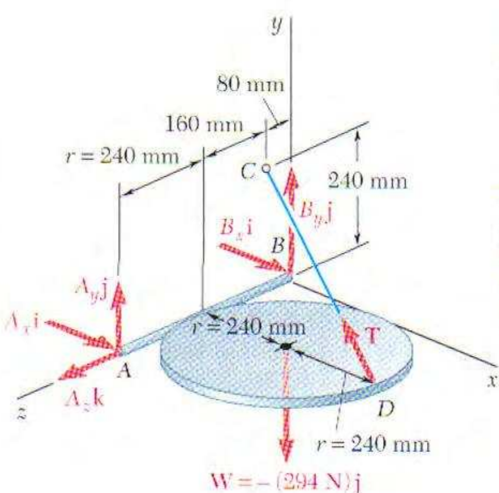


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre con los ejes coordenados, como se muestra en la figura. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la tapa

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(30\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294\text{ N})\mathbf{j}$$

y las reacciones involucran seis incógnitas: la magnitud de la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable, tres componentes de fuerza en la articulación A y dos en la articulación B. Las componentes de $\mathbf{T}$ se expresan en términos de la magnitud desconocida T descomponiendo al vector $\overrightarrow{DC}$ en sus componentes rectangulares y escribiendo

$$\overrightarrow{DC} = -(480\text{ mm})\mathbf{i} + (240\text{ mm})\mathbf{j} - (160\text{ mm})\mathbf{k} \qquad DC = 560\text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T\frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre la tapa constituyen un sistema equivalente a cero:

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294\text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x + B_x - \tfrac{6}{7}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \tfrac{3}{7}T - 294\text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \tfrac{2}{7}T)\mathbf{k} = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma\mathbf{M}_B = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$2r\mathbf{k} \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-\tfrac{6}{7}T\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}T\mathbf{j} - \tfrac{2}{7}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294\text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(-2A_y - \tfrac{3}{7}T + 294\text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \tfrac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\tfrac{6}{7}T - 294\text{ N})r\mathbf{k} = 0 \qquad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (2), se escriben tres ecuaciones escalares que proporcionan el siguiente resultado

$$A_x = +49.0\text{ N} \qquad A_y = +73.5\text{ N} \qquad T = 343\text{ N} \quad ◀$$

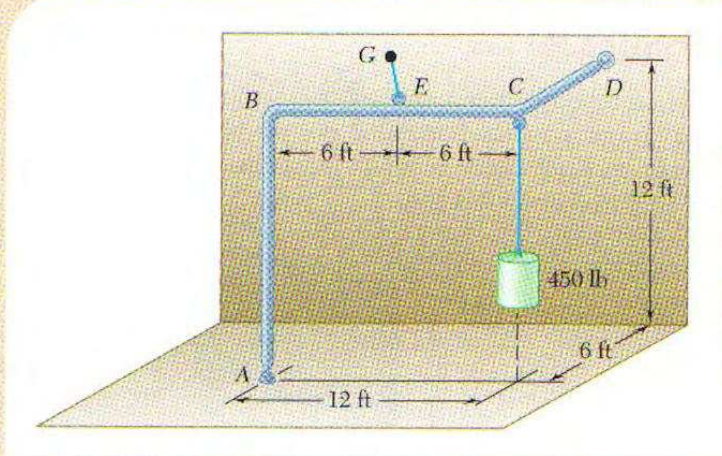
Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (1), se obtienen tres ecuaciones escalares adicionales. Después de sustituir los valores de T, A_x y A_y en estas ecuaciones, se obtiene

$$A_z = +98.0\text{ N} \qquad B_x = +245\text{ N} \qquad B_y = +73.5\text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en A y B son

$$\mathbf{A} = +(49.0\text{ N})\mathbf{i} + (73.5\text{ N})\mathbf{j} + (98.0\text{ N})\mathbf{k} \quad ◀$$

$$\mathbf{B} = +(245\text{ N})\mathbf{i} + (73.5\text{ N})\mathbf{j} \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 4.10

Una carga de 450 lb está colgada en la esquina C de un tramo rígido de tubería $ABCD$ que ha sido doblado, como se muestra en la figura. El tubo está apoyado por medio de rótulas en A y D, las cuales están unidas, respectivamente, al piso y a la pared vertical y por un cable que está unido al punto medio E de la porción BC del tubo y al punto G en la pared. Determine: *a*) dónde debe estar ubicado el punto G si la tensión en el cable debe ser mínima y *b*) el valor mínimo correspondiente de la tensión.

SOLUCIÓN

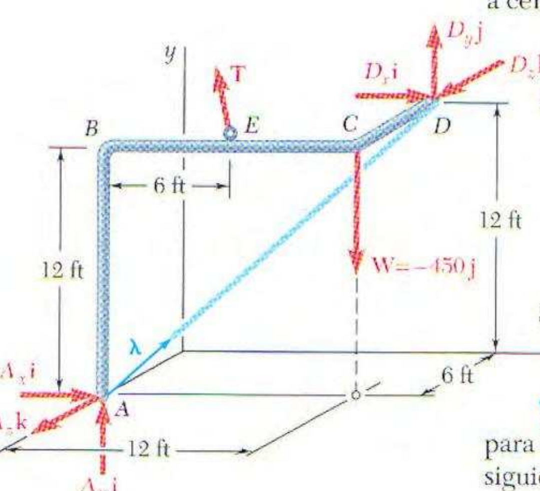


Diagrama de cuerpo libre. El diagrama de cuerpo libre del tubo incluye la carga $\mathbf{W} = (-450 \text{ lb})\mathbf{j}$, las reacciones en A y en D y la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable. Para eliminar de los cálculos a las reacciones en A y en D, se expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a AD es igual a cero. Si se representa con el vector unitario a lo largo de AD, se escribe

$$\Sigma M_{AD} = 0: \qquad \cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) + \cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = 0 \qquad (1)$$

El segundo término en la ecuación (1) se puede calcular como sigue:

$$\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W} = (12\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \times (-450\mathbf{j}) = -5\,400\mathbf{k}$$

$$= \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{18} = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

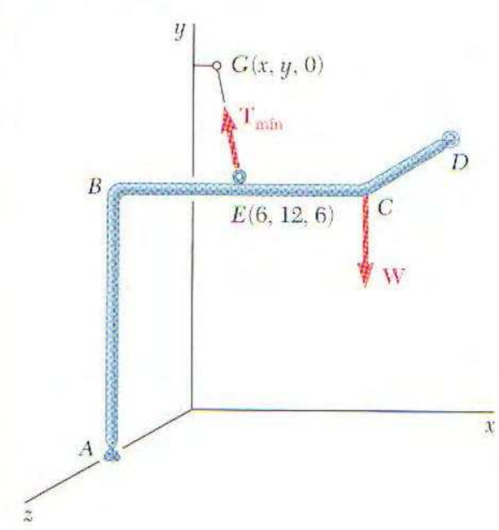
$$\cdot (\overrightarrow{AC} \times \mathbf{W}) = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \cdot (-5\,400\mathbf{k}) = +1\,800$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación (1), se escribe

$$\cdot (\overrightarrow{AE} \times \mathbf{T}) = -1\,800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad (2)$$

Valor mínimo de la tensión. Recordando la propiedad conmutativa para los productos triples escalares, se vuelve a escribir la ecuación (2) de la siguiente forma

$$\mathbf{T} \cdot (\times \overrightarrow{AE}) = -1\,800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \qquad (3)$$



la cual demuestra que la proyección de $\mathbf{T}$ sobre el vector $\times \overrightarrow{AE}$ es una constante. Se concluye que $\mathbf{T}$ es mínima cuando es paralela al vector

$$\times \overrightarrow{AE} = (\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{1}{3}\mathbf{k}) \times (6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Como el vector unitario correspondiente es $\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$, se escribe

$$\mathbf{T}_{\text{mín}} = T(\tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} + \tfrac{2}{3}\mathbf{k}) \qquad (4)$$

Al sustituir a $\mathbf{T}$ y a $\times \overrightarrow{AE}$ en la ecuación (3) y calcular los productos punto, se obtiene $6T = -1\,800$ y, por tanto, $T = -300$. Al llevar este valor a la ecuación (4), se obtiene

$$T_{\text{mín}} = -200\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 200\mathbf{k} \qquad T_{\text{mín}} = 300 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

Ubicación de G. Como el vector $\overrightarrow{EG}$ y la fuerza $\mathbf{T}_{\text{mín}}$ tienen la misma dirección, sus componentes deben ser proporcionales. Representando las coordenadas de G con x, y, 0, se escribe

$$\frac{x - 6}{-200} = \frac{y - 12}{+100} = \frac{0 - 6}{-200} \qquad x = 0 \qquad y = 15 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En las secciones que se acaban de explicar se consideró el equilibrio de un *cuerpo tridimensional*. Es muy importante que se dibuje un *diagrama de cuerpo libre* completo como primer paso en la solución de un problema.

1. A medida que se dibuja el diagrama de cuerpo libre, se debe poner atención especial en las reacciones en los apoyos. El número de incógnitas en un apoyo puede ir desde uno hasta seis (figura 4.10). Para decidir cuándo existe una reacción desconocida o una componente de reacción en un apoyo, es necesario cuestionarse si el apoyo impide el movimiento del cuerpo en una cierta dirección o alrededor de un cierto eje.

a) Si se impide el movimiento en una cierta dirección, se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre una *reacción* o *componente de reacción* desconocida que actúa en esa *misma dirección*.

b) Si un apoyo impide la rotación alrededor de un cierto eje, se debe incluir en el diagrama de cuerpo libre un *par* de magnitud desconocida que actúa alrededor de ese *mismo eje*.

2. Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo tridimensional constituyen un sistema equivalente a cero. Si se escribe $\Sigma \mathbf{F} = 0$ y $\Sigma \mathbf{M}_A = 0$ con respecto a un punto apropiado A y se igualan a cero los coeficientes de **i**, **j** y **k** en ambas ecuaciones, se obtienen seis ecuaciones escalares. En general, estas ecuaciones se pueden resolver para conocer las seis incógnitas que contendrán.

3. Después de completar el diagrama de cuerpo libre, se puede tratar de buscar ecuaciones que involucren el menor número de incógnitas posible. Las siguientes estrategias pueden ser de utilidad.

a) Sumar momentos con respecto a un apoyo de rótula o a una bisagra, se obtienen ecuaciones en las cuales se han eliminado tres componentes de reacción desconocidos [problemas resueltos 4.8 y 4.9].

b) Dibujar, si es posible, un eje a través de los puntos de aplicación de todas las reacciones desconocidas, excepto una, y sumar momentos con respecto a dicho eje para obtener la ecuación con una incógnita [problema resuelto 4.10].

4. Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, se puede determinar la existencia de una de las siguientes situaciones.

a) Las reacciones involucran menos de seis incógnitas; se dice que el cuerpo está *parcialmente restringido* y el cuerpo puede moverse. Sin embargo, es posible determinar las reacciones para una condición de carga dada [problema resuelto 4.7].

b) Las reacciones involucran más de seis incógnitas; se dice que las reacciones son *estáticamente indeterminadas*. Aunque se pueden calcular una o dos reacciones, no es posible determinarlas todas [problema resuelto 4.10].

c) Las reacciones son paralelas o intersecan a la misma línea; se dice que el cuerpo está *impropiamente restringido* y se puede presentar movimiento bajo una condición general de carga.

Problemas

4.91 Una hoja de madera de 4×8 ft que tiene un peso de 34 lb ha sido colocada temporalmente entre tres apoyos tubulares. El costado inferior de la hoja se apoya sobre pequeños collarínes en A y B y el costado superior se apoya en el tubo C. Sin tomar en cuenta la fricción entre todas las superficies en contacto, determine las reacciones en A, B y C.

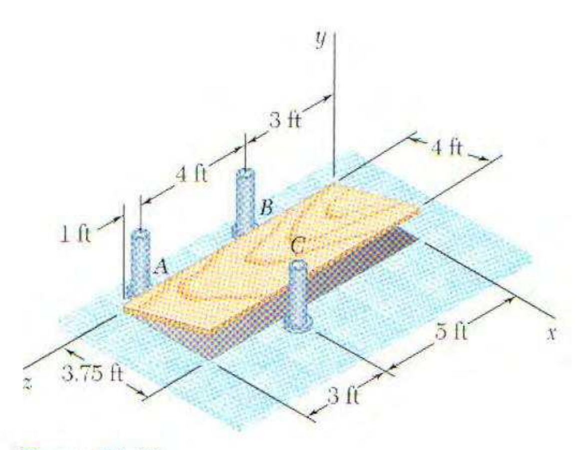


Figura P4.91

4.92 Dos bandas de transmisión pasan sobre carretes soldados a un eje que se sostiene mediante cojinetes en A y D. El carrete en B tiene un radio de 30 mm, y el carrete en C tiene un radio de 40 mm. Si se sabe que T_B = 80 N y que el sistema gira con una velocidad angular constante, determine las reacciones en A y D. Suponga que el cojinete en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial y no tome en cuenta los pesos de los carretes y el eje.

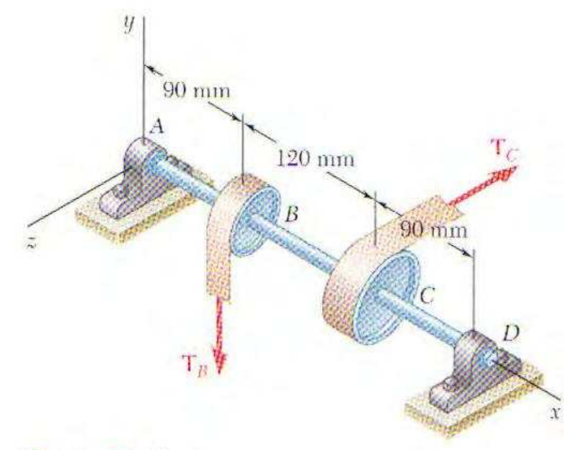


Figura P4.92

4.93 Retome el problema 4.92, ahora suponga que el carrete en C se sustituye por un carrete con 50 mm de radio.

4.94 Dos bandas de transmisión pasan sobre poleas soldadas a un eje que se sostiene mediante cojinetes en B y D. Si la polea en A tiene un radio de 2.5 in., y la polea en C tiene un radio de 2 in. y se sabe que el sistema gira con una velocidad angular constante, determine *a*) la tensión T, *b*) las reacciones en B y D. Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial y no tome en cuenta los pesos de las poleas y el eje.

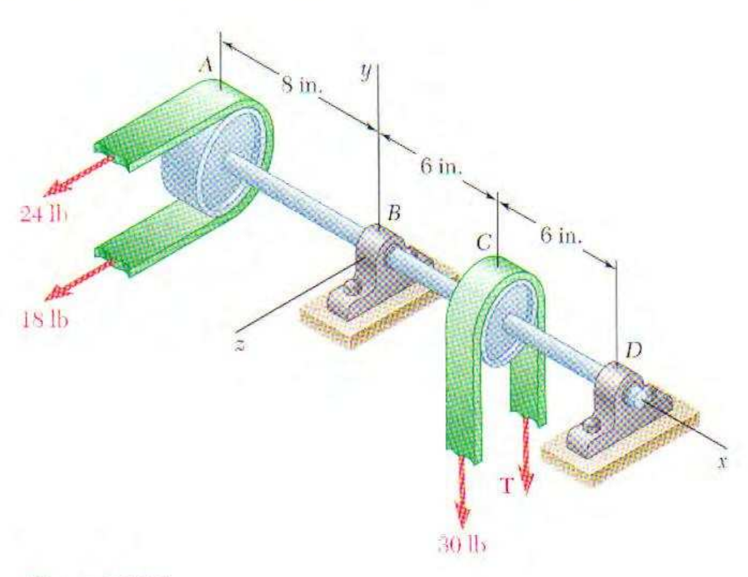


Figura P4.94

4.95 Una palanca de 200 mm y una polea de 240 mm se sueldan al eje BE que a su vez se sostiene mediante cojinetes en C y D. Si se aplica una carga vertical de 720 N en A cuando la palanca está en posición horizontal, determine *a*) la tensión en la cuerda y *b*) las reacciones en C y D. Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

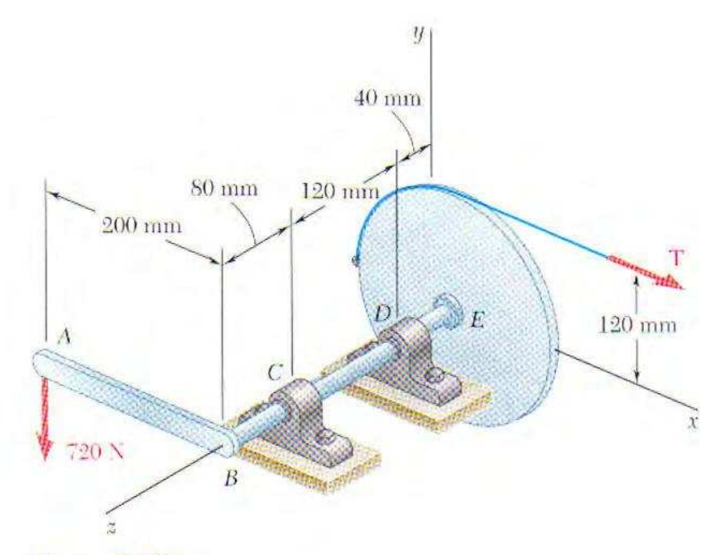


Figura *P4.95*

4.96 Retome el problema 4.95 y ahora suponga que el eje se ha rotado 30° en sus cojinetes en el sentido de las manecillas del reloj y que la carga de 720 N permanece vertical.

4.97 Una abertura en el piso está cubierta por una hoja de madera de 1×1.2 m con 18 kg de masa. La hoja tiene bisagras en A y B y se mantiene en la posición mostrada, un poco arriba del piso, mediante un pequeño bloque en C. Determine la componente vertical de la reacción *a*) en A, *b*) en B, *c*) en C.

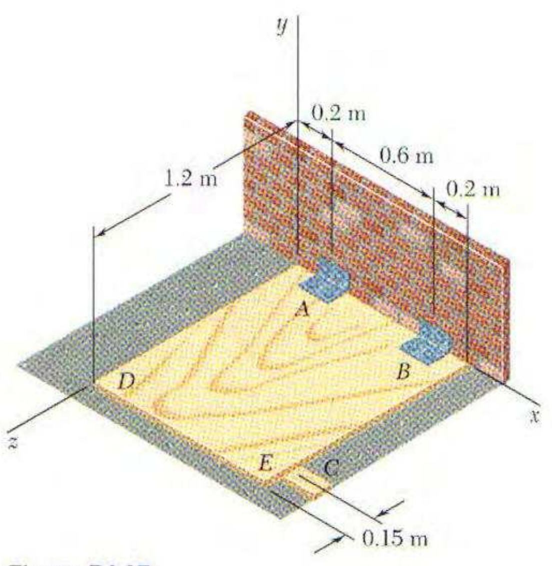


Figura P4.97

4.98 Retome el problema 4.97 y ahora suponga que el pequeño bloque en C se mueve y se coloca bajo el borde DE, en un punto que se encuentra a 0.15 m de la esquina E.

4.99 La placa rectangular que se muestra en la figura pesa 80 lb y se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine la tensión en cada alambre.

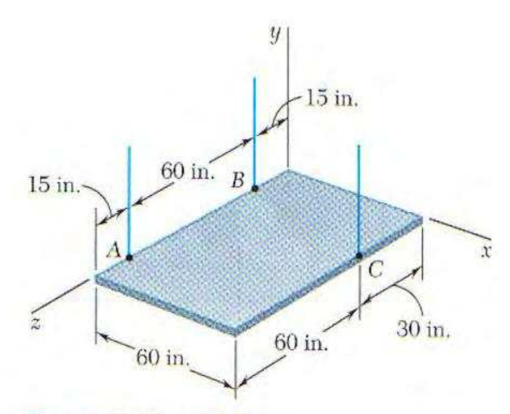


Figura P4.99 y P4.100

4.100 La placa rectangular que se muestra en la figura pesa 80 lb y se sostiene mediante tres cables verticales. Determine el peso y la ubicación del bloque más ligero que debe colocarse sobre la placa si las tensiones en los tres cables deben ser iguales.

4.101 Dos tubos de acero AB y BC, cada uno con una masa por unidad de longitud igual a 8 kg/m, se sueldan juntos en B y se sostienen mediante tres alambres. Si se sabe que $a = 0.4$ m, determine la tensión en cada alambre.

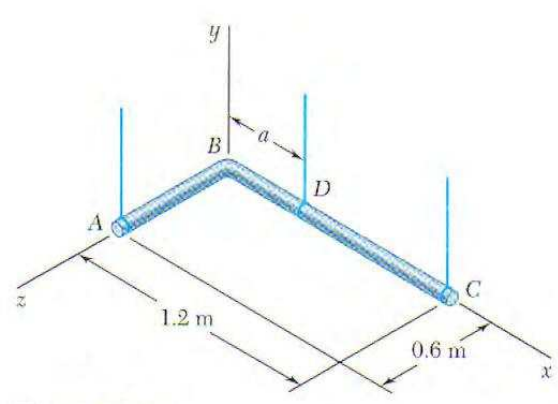


Figura P4.101

4.102 Para el ensamble de tubos del problema 4.101, determine *a*) el valor máximo permisible de a si el ensamble no debe ladearse y *b*) la tensión correspondiente en cada alambre.

4.103 La placa cuadrada de 24 lb que se muestra en la figura se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine *a*) la tensión en cada alambre cuando $a = 10$ in., *b*) el valor de a para el cual la tensión en cada alambre es de 8 lb.

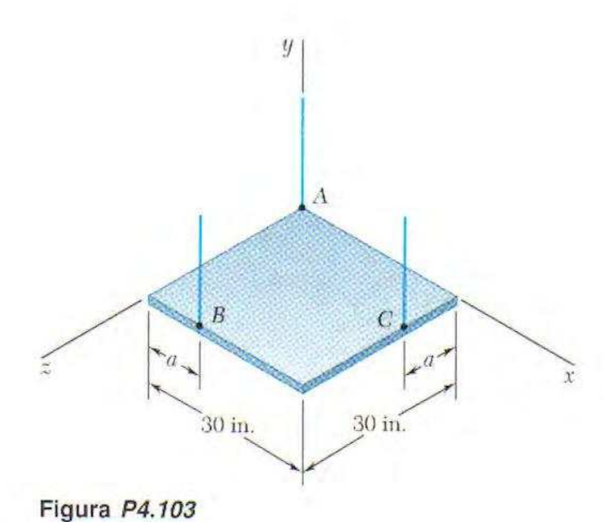


Figura *P4.103*

4.104 La mesa que se muestra en la figura pesa 30 lb, tiene un diámetro de 4 ft y se sostiene mediante tres patas igualmente espaciadas alrededor del borde. En la parte superior de la mesa en D se aplica una carga vertical **P** con magnitud de 100 lb. Determine el máximo valor de a tal que la mesa no se voltee. Muestre en un dibujo el área sobre la cual puede actuar **P** sin voltear la mesa.

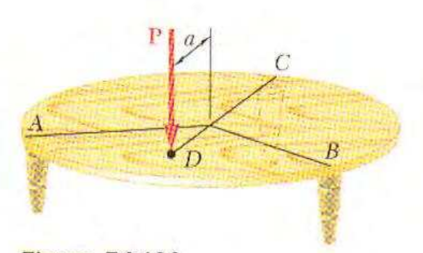


Figura *P4.104*

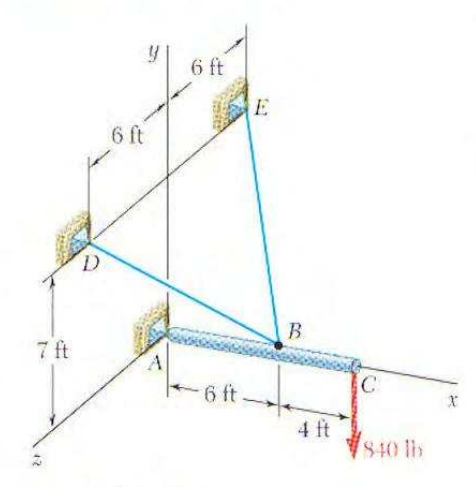


Figura P4.105

4.105 Un brazo de 10 ft está sometido a una fuerza de 840 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable y la reacción en el apoyo de rótula en A.

4.106 Un brazo de 2.4 m de longitud se sostiene mediante un apoyo de rótula en C y por medio de dos cables AD y AE. Determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

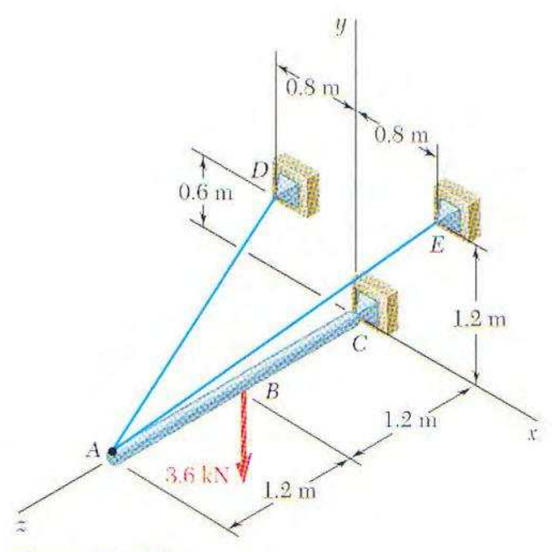


Figura P4.106

4.107 Retome el problema 4.106, y ahora suponga que la carga de 3.6 kN se aplica en el punto A.

4.108 Una caja de 600 lb cuelga de un cable que pasa sobre una polea en B y está unido al soporte en H. El aguilón AB de 200 lb se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables DE y DF. El centro de gravedad del aguilón se localiza en G. Determine *a*) las tensiones en los cables DE y DF, *b*) la reacción en A.

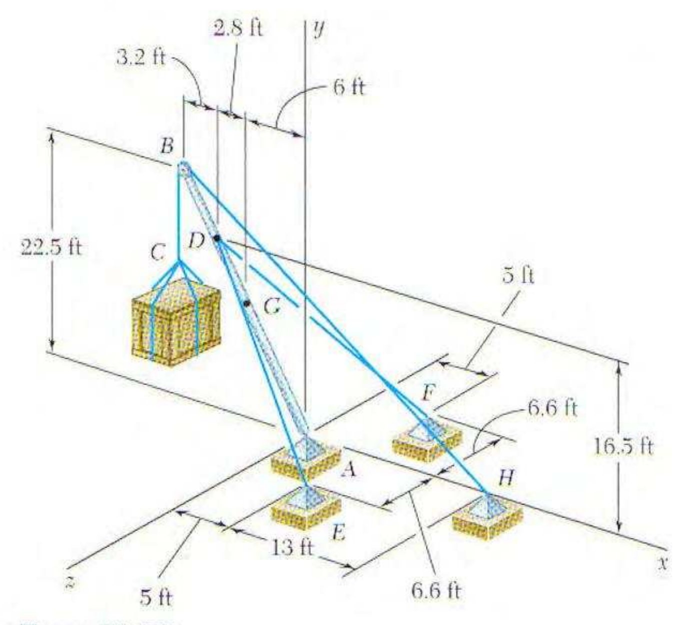


Figura P4.108

4.109 Un poste de 3 m se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables CD y CE. Si se sabe que la fuerza de 5 kN actúa verticalmente hacia abajo ($\phi = 0$), determine *a*) la tensión en los cables CD y CE y *b*) la reacción en A.

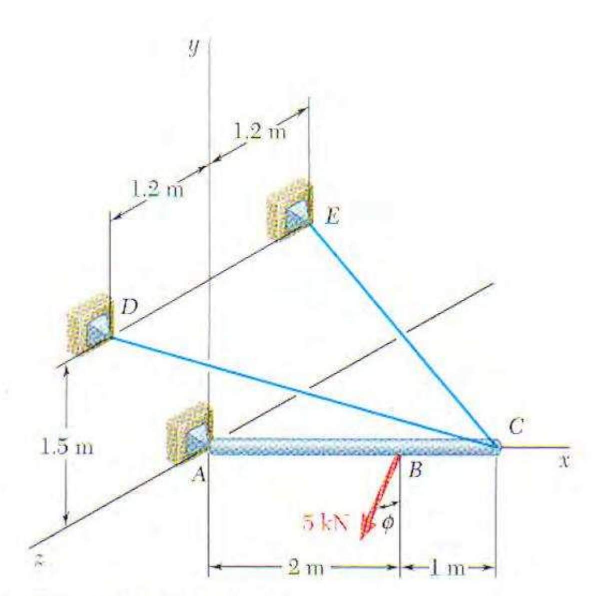


Figura P4.109 y P4.110

4.110 Un poste de 3 m se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables CD y CE. Si se sabe que la línea de acción de la fuerza de 5 kN forma un ángulo $\phi = 30°$ con el plano vertical xy, determine *a*) la tensión en los cables CD y CE y *b*) la reacción en A.

4.111 Un brazo de 48 in. se sostiene mediante una junta de rótula en C y dos cables BF y DAE; el cable DAE pasa alrededor de una polea sin fricción en A. Para la carga mostrada determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

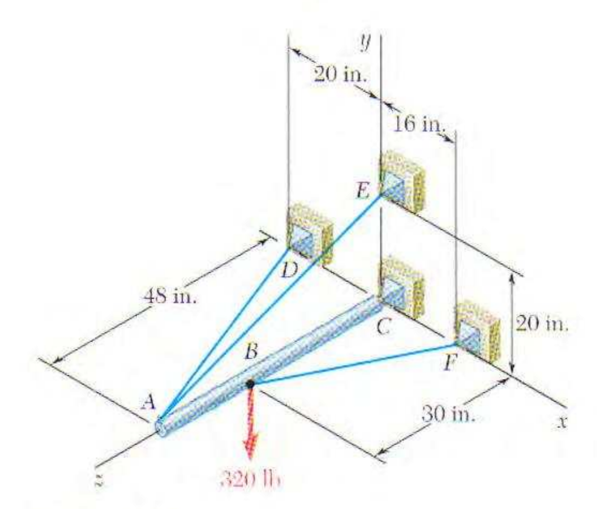


Figura *P4.111*

4.112 Retome el problema 4.111, y ahora suponga que la carga de 320 lb se aplica en *A*.

4.113 Una tapa de 20 kg en la abertura de un techo tiene bisagras en las esquinas *A* y *B*. El tejado forma un ángulo de 30° con la horizontal y la tapa se mantiene en posición horizontal mediante la barra *CE*. Determine *a*) la magnitud de la fuerza ejercida por la barra y *b*) las reacciones en las bisagras. Suponga que la bisagra en *A* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

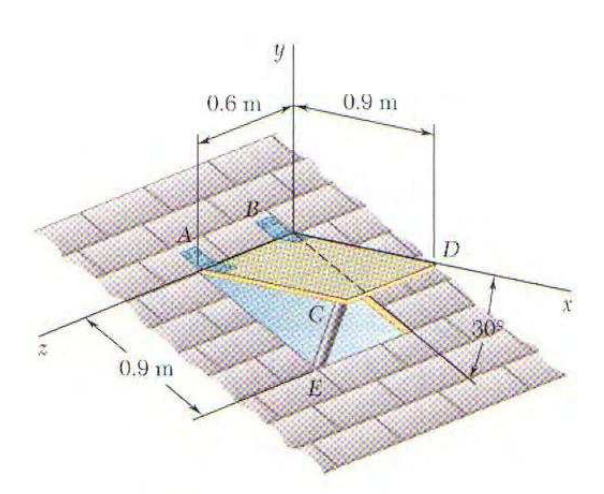


Figura P4.113

4.114 La varilla doblada *ABEF* se sostiene mediante cojinetes en *C* y *D* y por medio del alambre *AH*. Si se sabe que la porción *AB* de la varilla tiene 250 mm de longitud, determine *a*) la tensión en el alambre *AH*, *b*) las reacciones en *C* y *D*. Suponga que el cojinete en *D* no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

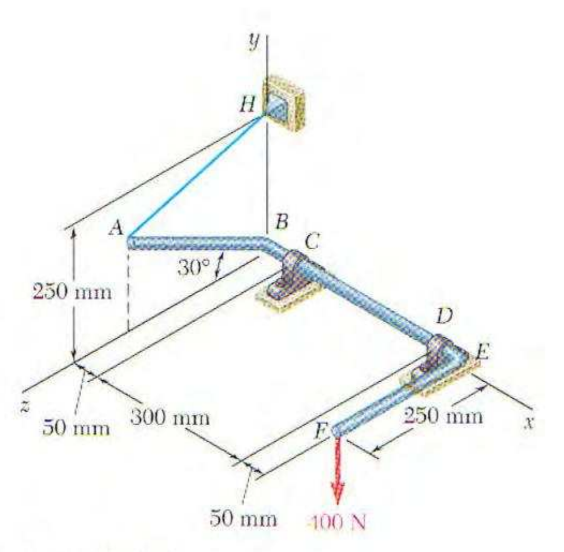


Figura P4.114

4.115 Una placa rectangular uniforme de 100 kg se sostiene en la posición mostrada por medio de bisagras en A y B y mediante el cable DCE que pasa por un gancho sin fricción en C. Si se supone que la tensión en ambas porciones del cable es la misma, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) las reacciones en A y B. Suponga que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

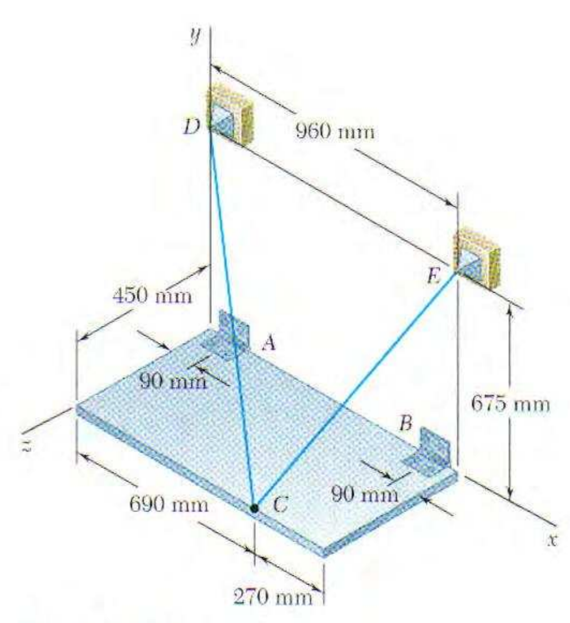


Figura *P4.115*

4.116 Retome el problema 4.115, y ahora suponga que el cable DCE se remplaza por un cable unido al punto E y al gancho C.

4.117 La placa rectangular de la figura pesa 75 lb y se mantiene en la posición mostrada mediante bisagras en A y B y por medio del cable EF. Si se supone que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) las reacciones en A y B.

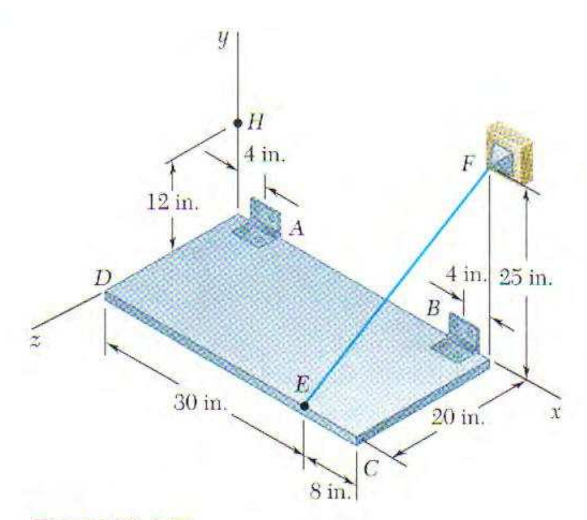


Figura P4.117

4.118 Retome el problema 4.117, y ahora suponga que el cable EF se reemplaza por un cable unido a los puntos E y H.

4.119 Retome el problema 4.114, y ahora suponga que el cojinete en D se retira y que el cojinete en C puede ejercer pares alrededor de ejes paralelos a los ejes y y z.

4.120 Retome el problema 4.117, y ahora suponga que la bisagra en B se retira y que la bisagra en A puede ejercer pares alrededor de ejes paralelos a los ejes y y z.

4.121 El ensamble mostrado en la figura se usa para controlar la tensión T en una cinta que pasa alrededor de un carrete en E. El collarín C se suelda a las varillas ABC y CDE. El collarín puede rotar alrededor del eje FG pero su movimiento a lo largo del eje se evita mediante una rondana S. Para la carga mostrada determine *a*) la tensión T en la cinta y *b*) la reacción en C.

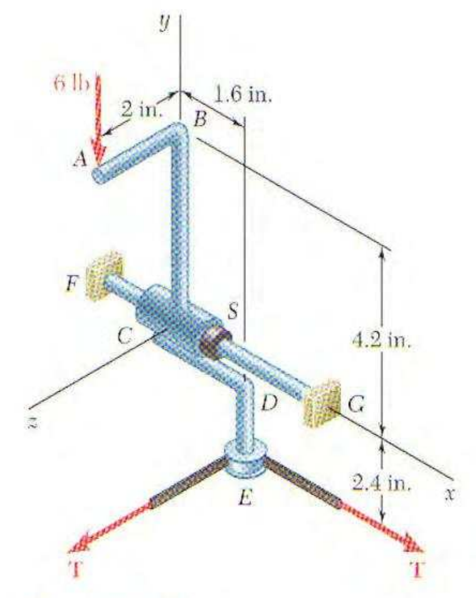


Figura P4.121

4.122 El ensamble mostrado en la figura se suelda al collarín A, el cual está colocado sobre el pasador vertical. El pasador puede ejercer pares alrededor de los ejes x y z, pero no restringe el movimiento alrededor o a lo largo del eje y. Para la carga mostrada determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

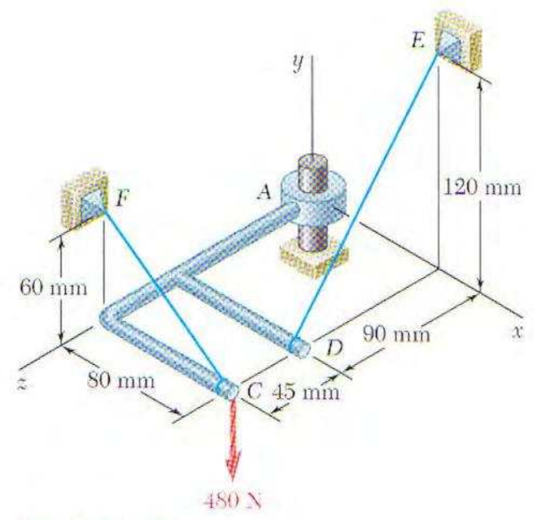


Figura P4.122

4.123 El elemento rígido ABC en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Si se aplica una carga de 450 lb en F, determine la tensión en cada cable.

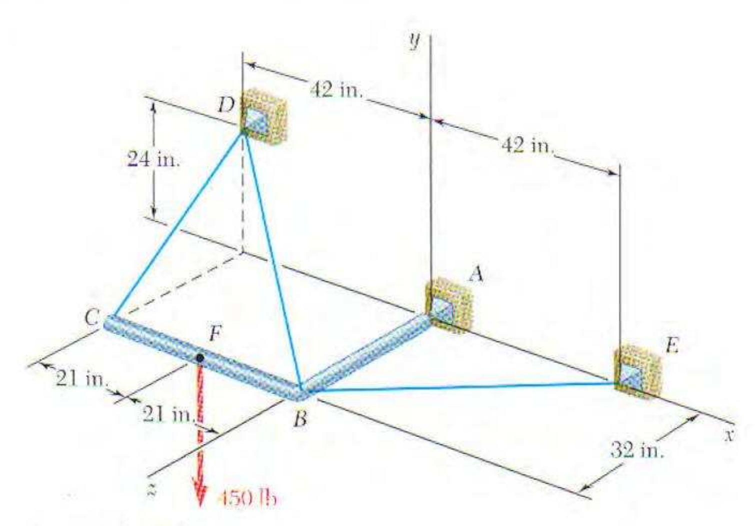


Figura P4.123

4.124 Retome el problema 4.123, y ahora suponga que la carga de 450 lb se aplica en C.

4.125 El bastidor $ABCD$ se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Para $a = 150$ mm, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

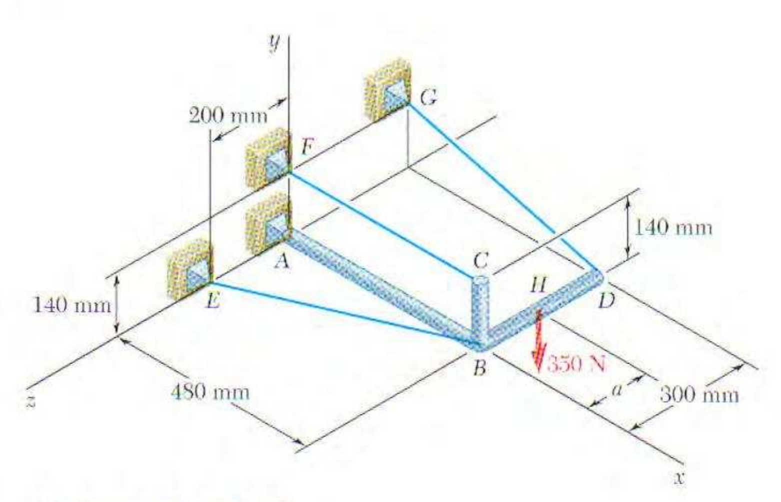


Figura P4.125 y P4.126

4.126 El bastidor $ABCD$ se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Si se sabe que la carga de 350 N se aplica en D ($a = 300$ mm), determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

4.127 Tres varillas se sueldan entre sí para formar una "esquina" que se sostiene mediante tres armellas. Sin tomar en cuenta la fricción, determine las reacciones en A, B y C cuando $P = 240$ lb, $a = 12$ in., $b = 8$ in. y $c = 10$ in.

4.128 Retome el problema 4.127, y ahora suponga que la fuerza $\mathbf{P}$ se retira y se sustituye por un par $\mathbf{M} = +(600 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j}$ que actúa en B.

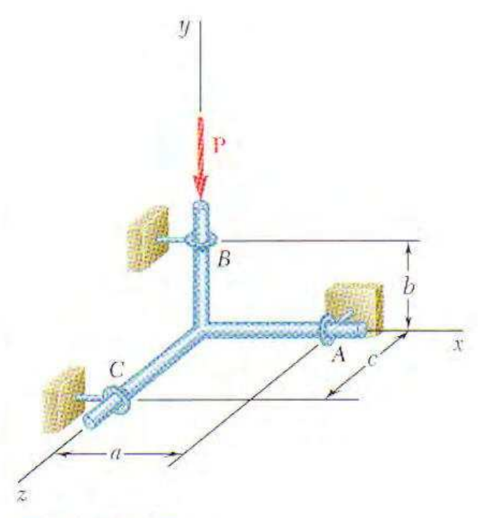


Figura P4.127

4.129 Para limpiar la tubería de desagüe obstruida AE, un plomero desconecta ambos extremos del tubo e inserta una guía a través de la abertura en A. La cabeza cortadora de la guía se conecta mediante un cable pesado a un motor eléctrico el cual rota a una velocidad constante mientras que el plomero introduce el cable en la tubería. Las fuerzas ejercidas por el plomero y el motor sobre el extremo del cable se pueden representar mediante una llave de torsión $\mathbf{F} = -(48 \text{ N})\mathbf{k}$, $\mathbf{M} = -(90 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Determine las reacciones adicionales en B, C y D causadas por la operación de limpieza. Suponga que la reacción en cada soporte consta de dos componentes de la fuerza que son perpendiculares a la tubería.

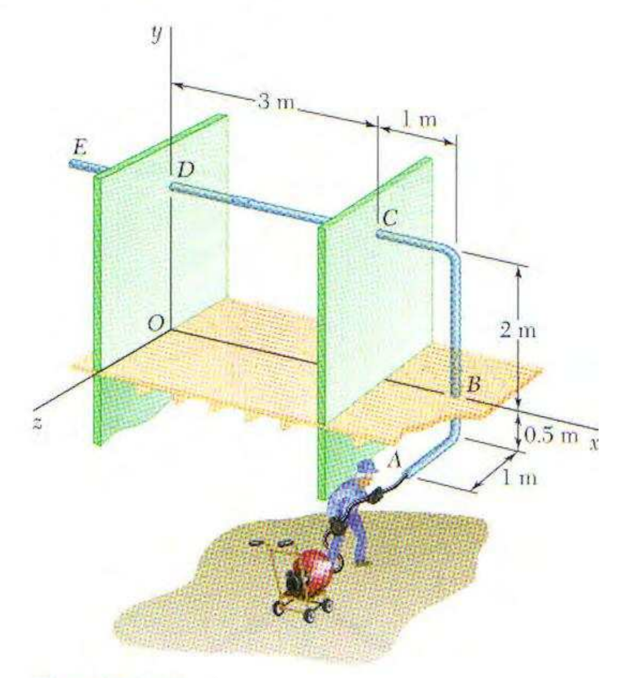


Figura P4.129

4.130 Retome el problema 4.129, y ahora suponga que el plomero ejerce una fuerza $\mathbf{F} = -(48 \text{ N})\mathbf{k}$ y que el motor se desconecta ($\mathbf{M} = 0$).

4.131 El ensamble que se muestra en la figura consiste en una varilla AF de 80 mm, la cual está soldada a una cruz formada por 4 brazos de 200 mm. El ensamble se sostiene mediante una junta de rótula en F y por medio de tres lazos cortos, cada uno forma un ángulo de 45° con la vertical. Para la carga mostrada, determine *a*) la tensión en cada lazo y *b*) la reacción en F.

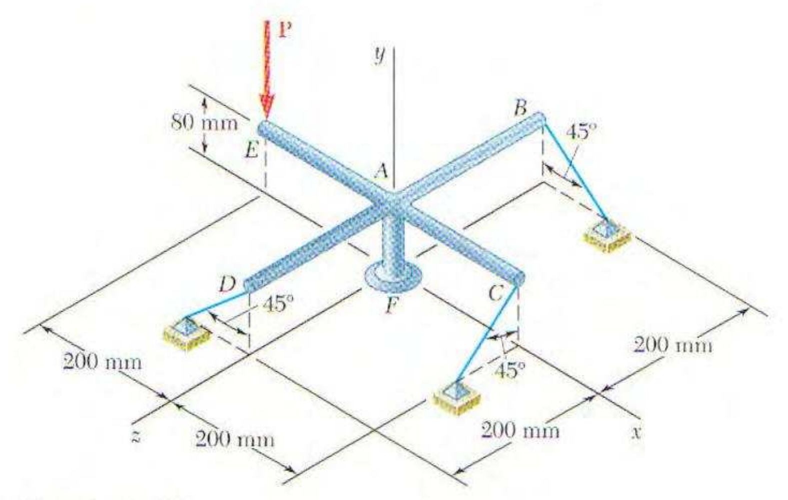


Figura *P4.131*

4.132 La barra uniforme AB de 10 kg se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de la cuerda CG, que se encuentra unida al punto medio G de la barra. Si se sabe que la barra está recargada contra una pared vertical sin fricción en B, determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) las reacciones en A y en B.

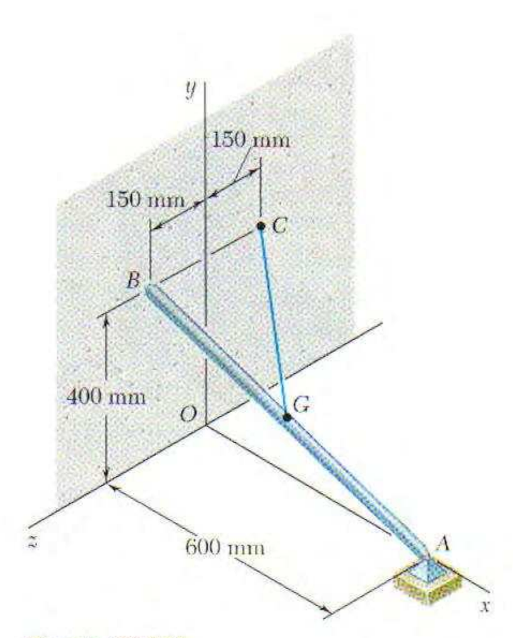


Figura *P4.132*

4.133 La barra doblada $ABDE$ se sostiene por medio de rótulas en A y E y mediante el cable DF. Si se aplica una carga de 60 lb en C como se muestra en la figura, determine la tensión en el cable.

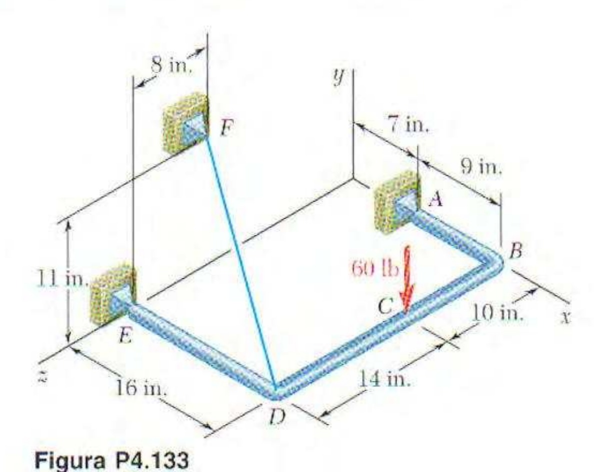


Figura P4.133

4.134 Retome el problema 4.133, y ahora suponga que el cable DF se reemplaza por un cable que conecta a B y F.

4.135 La placa $ABCD$ de 50 kg se sostiene por medio de bisagras a lo largo del borde AB y mediante el alambre CE. Si se sabe que la placa es uniforme, determine la tensión en el alambre.

4.136 Retome el problema 4.135, y ahora suponga que el alambre CE se reemplaza por un alambre que conecta a E y D.

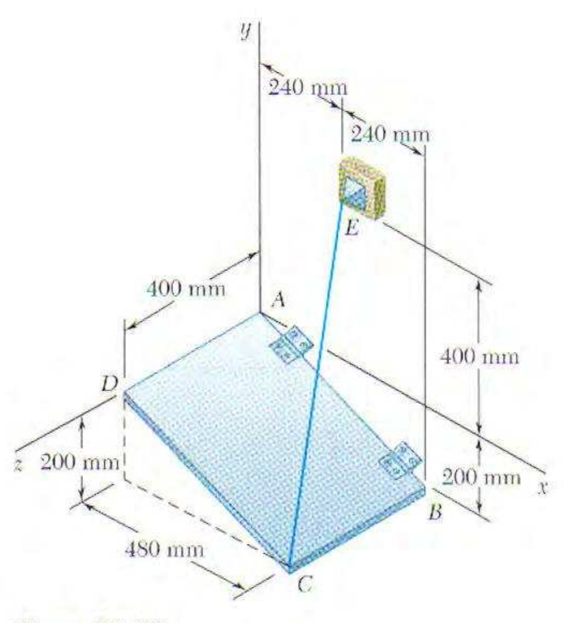


Figura P4.135

4.137 Dos placas rectangulares se sueldan para formar el ensamble mostrado en la figura. El ensamble se sostiene mediante rótulas en B y D y por medio de una bola sobre una superficie horizontal en C. Para la carga mostrada determine la reacción en C.

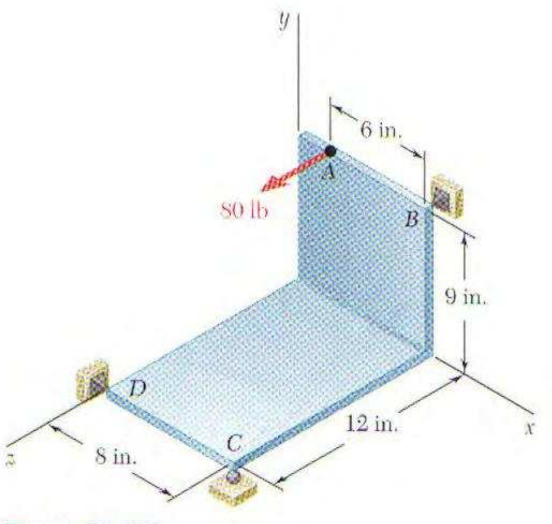


Figura P4.137

4.138 Dos paneles de madera de 2 × 4 ft, cada uno con un peso de 12 lb, están clavados entre sí como se muestra en la figura. Los paneles se sostienen mediante rótulas en A y F y por medio del alambre BH. Determine *a*) la ubicación de H en el plano xy si la tensión en el alambre debe ser mínima y *b*) la tensión mínima correspondiente.

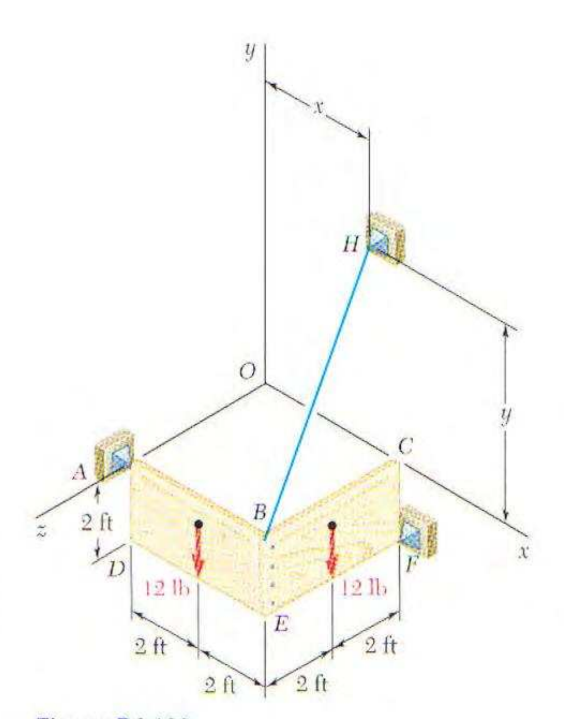


Figura P4.138

4.139 Retome el problema 4.138 si se impone la condición de que H debe descansar sobre el eje y.

4.140 El tubo $ACDE$ se sostiene por medio de rótulas en A y E y mediante el alambre DF. Determine la tensión en el alambre si se aplica una carga de 640 N en B, como se muestra en la figura.

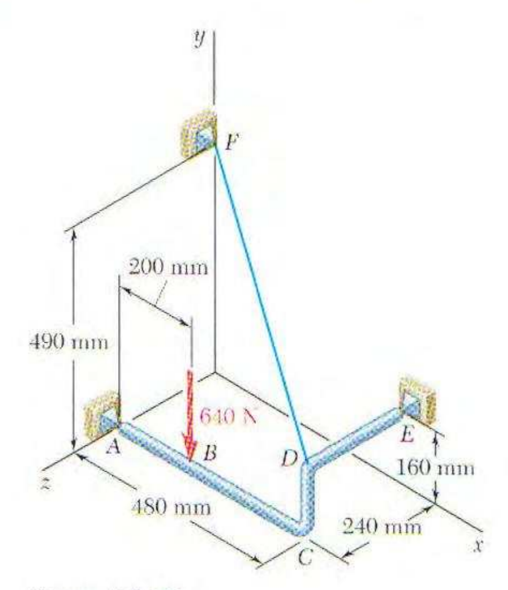


Figura *P4.140*

4.141 Retome el problema 4.140, ahora suponga que el cable DF se reemplaza por un cable que conecta a C y F.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 4

Ecuaciones de equilibrio

Este capítulo estuvo dedicado al estudio del *equilibrio de cuerpos rígidos*, esto es, a la situación en la cual las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido *forman un sistema equivalente a cero* [sección 4.1]. Entonces, se tiene que

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (4.1)$$

Si se descomponen cada una de las fuerzas y cada uno de los momentos en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido a través de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad (4.2)$$
$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = 0 \qquad (4.3)$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar fuerzas desconocidas aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas por sus apoyos.

Diagrama de cuerpo libre

Cuando se resuelve un problema que involucra el equilibrio de un cuerpo rígido, es esencial considerar *todas* las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Por tanto, el primer paso en la solución del problema debe ser dibujar un *diagrama de cuerpo libre* que muestre al cuerpo en estudio y todas las fuerzas, conocidas o no, que actúan sobre el mismo [sección 4.2].

Equilibrio de una estructura bidimensional

En la primera parte del capítulo se estudió el *equilibrio de una estructura bidimensional*; es decir, se supuso que la estructura considerada y la fuerza aplicada sobre ésta estaban contenidas en el mismo plano. Se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre la estructura por sus apoyos podían involucrar una, dos o tres incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.3].

En el caso de una estructura bidimensional, las ecuaciones (4.1) o las ecuaciones (4.2) y (4.3) se reducen a *tres ecuaciones de equilibrio*, las cuales son

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad (4.5)$$

donde A es un punto arbitrario en el plano de la estructura [sección 4.4]. Estas ecuaciones pueden utilizarse para determinar tres incógnitas. A pesar de las tres ecuaciones de equilibrio (4.5) no se le pueden *añadir* ecuaciones adicionales, cualquiera de ellas puede ser *reemplazada* por otra. Por tanto, se pueden escribir conjuntos alternativos de ecuaciones de equilibrio como



$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad (4.6)$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y, o

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0 \qquad (4.7)$$

donde los puntos A, B y C no deben ser colineales.

Como cualquier conjunto de ecuaciones de equilibrio se puede resolver para un máximo de tres incógnitas, no se pueden determinar por completo las reacciones en los apoyos de una estructura rígida bidimensional si éstas involucran *más de tres incógnitas*; entonces se dice que dichas reacciones son *estáticamente indeterminadas* [sección 4.5]. Por otra parte, si las reacciones involucran *menos de tres incógnitas*, no se mantendrá el equilibrio bajo condiciones generales de carga, entonces se dice que la estructura tiene *restricción parcial*. El hecho de que las reacciones involucren exactamente tres incógnitas no garantiza que las ecuaciones de equilibrio pueden resolverse para todas las incógnitas. Si los apoyos están ubicados de manera que las reacciones son *concurrentes o paralelas*, las reacciones son estáticamente indeterminadas y se dice que la estructura tiene *restricciones impropias*.

Indeterminación estática

Restricciones parciales

Restricciones impropias

Se prestó atención a dos casos particulares de equilibrio de un cuerpo rígido. En la sección 4.6 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a dos fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan únicamente en dos puntos y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de estas fuerzas deben tener *la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos* (figura 4.11), esta propiedad simplificará la solución de ciertos problemas en los capítulos posteriores. En la sección 4.7 se definió a un *cuerpo rígido sujeto a tres fuerzas* como un cuerpo rígido sometido a fuerzas que actúan sólo en tres puntos y se demostró que las resultantes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$ de estas fuerzas deben ser *concurrentes* (figura 4.12) o *paralelas*. Esta propiedad proporciona un enfoque alternativo para la solución de problemas que involucran a cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas [problema resuelto 4.6].

Cuerpo sujeto a dos fuerzas

Cuerpo sujeto a tres fuerzas

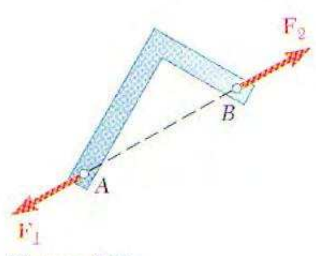


Figura 4.11

Figura 4.12

Equilibrio de un cuerpo tridimensional

En la segunda parte del capítulo se explicó el *equilibrio de un cuerpo tridimensional* y se vio que cada una de las reacciones ejercidas sobre el cuepo por sus apoyos podía involucrar entre una y seis incógnitas, dependiendo del tipo de apoyo [sección 4.8].

En el caso general del equilibrio de un cuerpo tridimensional, las seis ecuaciones escalares de equilibrio (4.2) y (4.3) listadas al principio de este repaso deben utilizarse y resolverse para *seis incógnitas* [sección 4.9]. Sin embargo, en la mayoría de los problemas estas ecuaciones se obtendrán de manera más conveniente si primero se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \qquad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \qquad (4.1)$$

y se expresan las fuerzas $\mathbf{F}$ y los vectores de posición $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares y vectores unitarios. Entonces, se pueden

calcular los productos vectoriales, ya sea en forma directa o empleando determinantes, con el fin de obtener las ecuaciones escalares deseadas igualando a cero los coeficientes de los vectores unitarios [problemas resueltos 4.7 a 4.9].

Se ha señalado que es posible eliminar hasta tres componentes de reacción desconocidos del cálculo de $\Sigma \mathbf{M}_O$ en la segunda de las relaciones (4.1) por medio de una selección cuidadosa del punto O. Además, de la solución de algunos problemas se pueden eliminar las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación $\Sigma M_{AB} = 0$, la cual involucra el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a un eje AB que une a los puntos A y B [problema resuelto 4.10].

Si las reacciones involucran más de seis incógnitas, algunas de las reacciones son *estáticamente indeterminadas*; cuando involucran menos de seis incógnitas, el cuerpo rígido está *parcialmente restringido*. Aunque existan seis o más incógnitas, el cuerpo rígido estará *impropiamente restringido* si las reacciones asociadas con los apoyos dados son paralelas o si intersecan la misma línea.

Problemas de repaso

4.142 Para mover dos barriles, cada uno con una masa de 40 kg, se utiliza un carrito. Sin tomar en cuenta la masa del carrito, determine *a*) la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en el manubrio del carrito para mantener el equilibrio cuando $\alpha = 35°$ y *b*) la reacción correspondiente en cada una de las dos ruedas.

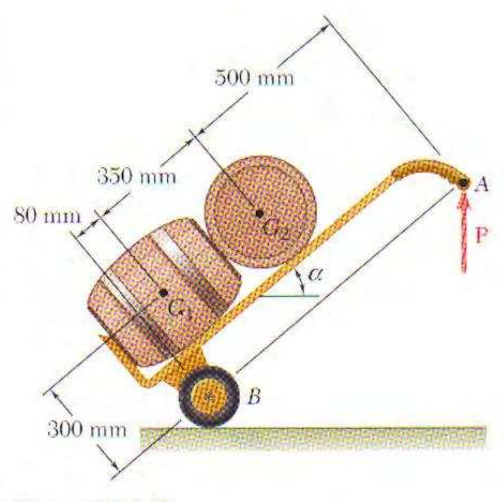


Figura P4.142

4.143 Determine las reacciones en A y C cuando *a*) $\alpha = 0$ y *b*) $\alpha = 30°$.

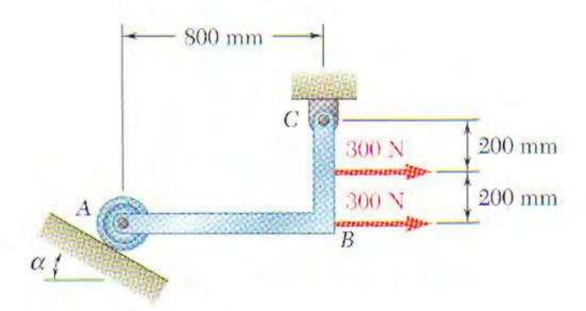


Figura P4.143

4.144 Una palanca AB está articulada en C y se encuentra unida a un cable de control en A. Si la palanca se somete a una fuerza vertical en B de 75 lb, determine *a*) la tensión en el cable y *b*) la reacción en C.

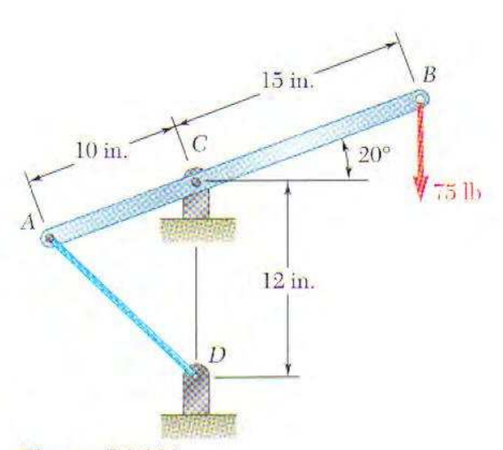


Figura *P4.144*

4.145 Sin tomar en cuenta la fricción ni el radio de la polea, determine *a*) La tensión en el cable ADB y *b*) la reacción en C.

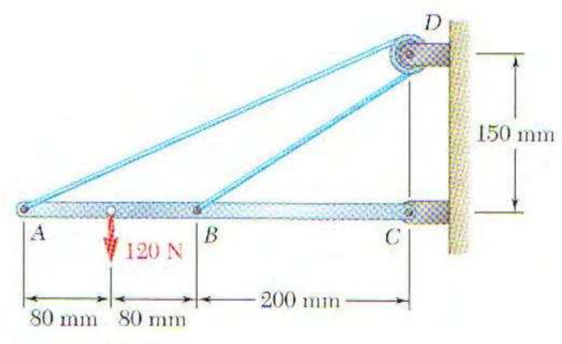


Figura P4.145

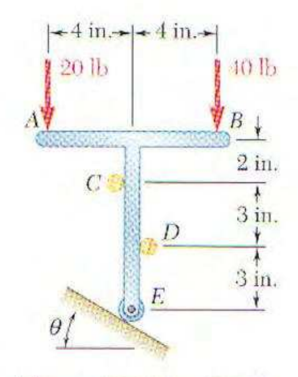


Figura P4.146 y *P.147*

4.146 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en E y clavijas en C y D. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las reacciones en C, D y E cuando $\theta = 30°$.

4.147 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en E y clavijas en C y D. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) el mínimo valor de θ para el cual se mantiene el equilibrio de la ménsula y *b*) las reacciones correspondientes en C, D y E.

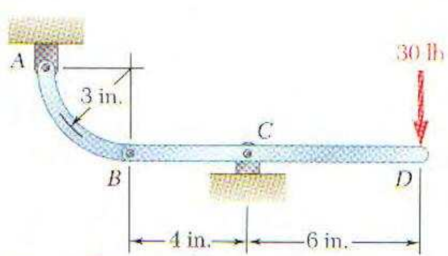


Figura P4.148

4.148 Para el bastidor y la carga que se muestran en la figura, determine las reacciones en A y C.

4.149 Determine las reacciones en A y B cuando $\beta = 50°$.

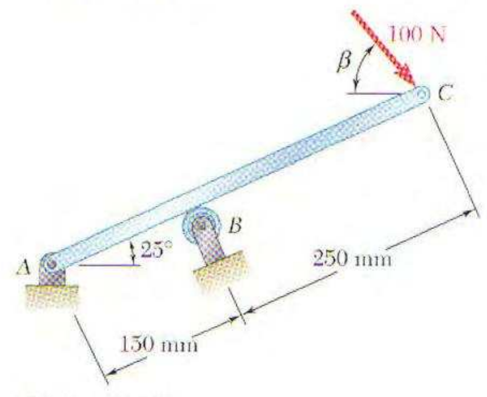


Figura *P4.149*

4.150 El poste de 6 m ABC está sometido a una fuerza de 455 N como se muestra en la figura. El poste se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de dos cables BD y BE. Si $a = 3$ m, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

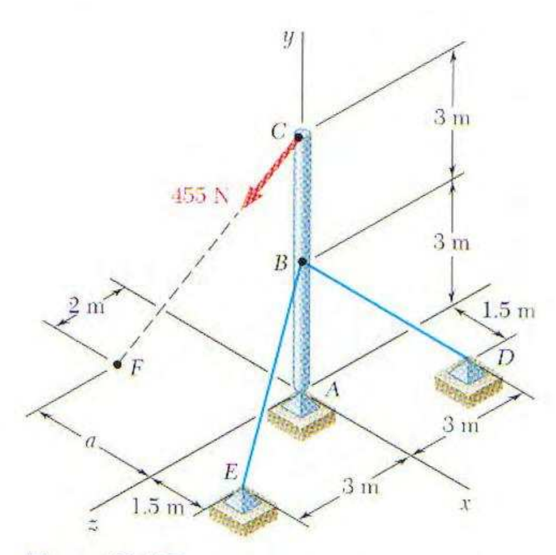


Figura P4.150

4.151 Retome el problema 4.150 si $a = 1.5$ m.

4.152 El elemento rígido ABF en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A. Para las cargas que se muestran en la figura, determine la tensión en cada cable y la reacción en A.

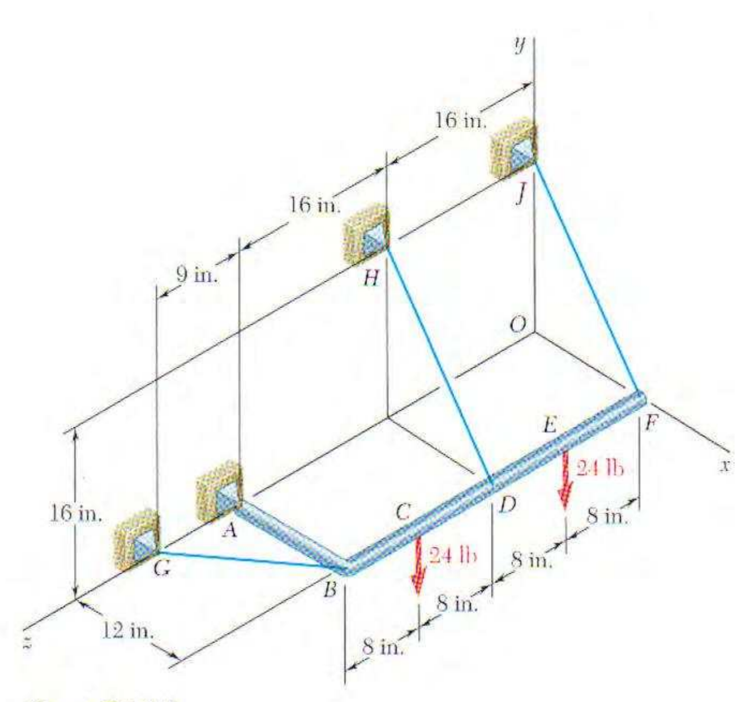


Figura P4.152

4.153 Se aplica una fuerza **P** sobre una barra doblada ABC, la cual se puede sostener de cuatro maneras diferentes, como se muestra en la figura. De ser posible, determine en cada caso las reacciones en los apoyos.

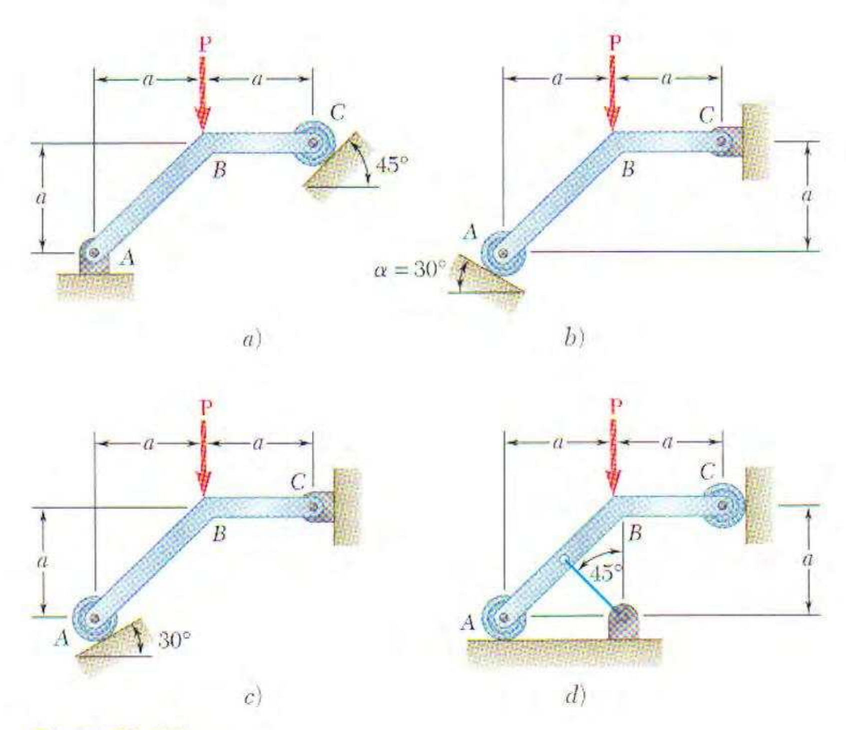


Figura P4.153

Problemas de computadora

4.C1 La posición de la barra en forma de L mostrada en la figura se controla mediante un cable conectado en el punto B. Si se sabe que la barra soporta una carga de magnitud $P = 50$ lb, utilice software de computadora para calcular y graficar la tensión T en el cable como una función de θ para valores desde 0 hasta 120° con incrementos de 10°. Utilice incrementos menores apropiados para determinar la tensión máxima T y el valor correspondiente de θ.

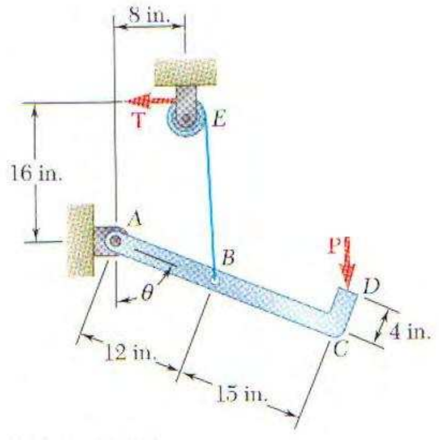


Figura P4.C1

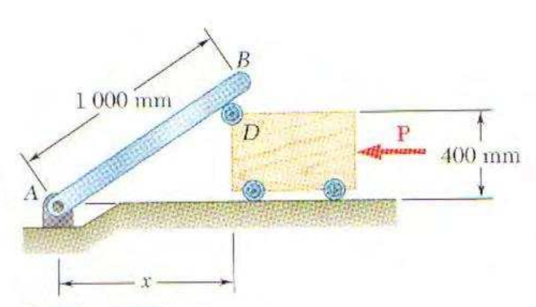


Figura P4.C2

4.C2 La posición de una barra AB de 10 kg se controla por medio del bloque mostrado en la figura, éste se mueve lentamente hacia la izquierda por la acción de la fuerza **P**. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, use software para calcular y graficar la magnitud P de la fuerza como una función de los valores decrecientes de x entre 750 mm y 0 con incrementos de 50 mm. Utilice incrementos menores apropiados para determinar el valor máximo de P y el valor correspondiente de x.

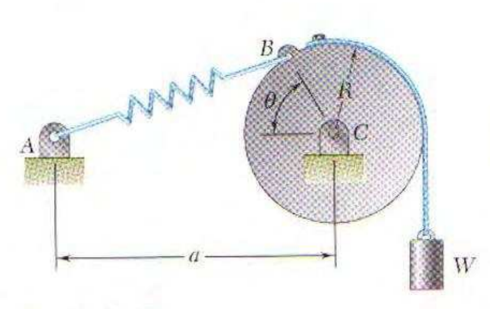


Figura P4.C3

4.C3 y 4.C4 El resorte AB de constante k está sin deformar cuando $\theta = 0$. Si se sabe que $R = 10$ in., $a = 20$ in. y $k = 5$ lb/in., use software para calcular y graficar el peso W correspondiente a la posición de equilibrio para valores de θ desde 0 hasta 90° con incrementos de 10°. Use incrementos menores apropiados para determinar el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 5$ lb.

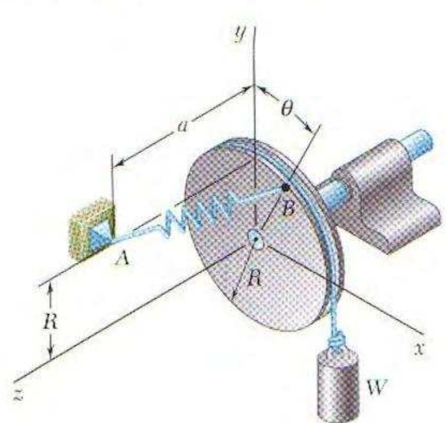


Figura P4.C4

4.C5 Un panel de 200 × 250 mm y 20 kg de masa se sostiene mediante bisagras a lo largo del costado *AB*. El cable *CDE* que se une al panel en *C* y que pasa sobre una polea pequeña en *D*, sostiene a un cilindro de masa *m*. Sin considerar el efecto de la fricción, use software para calcular y graficar la masa del cilindro correspondiente a la posición de equilibrio para valores de θ desde 0 hasta 90° con incrementos de 10°. Utilice incrementos menores apropiados para determinar el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $m = 10$ kg.

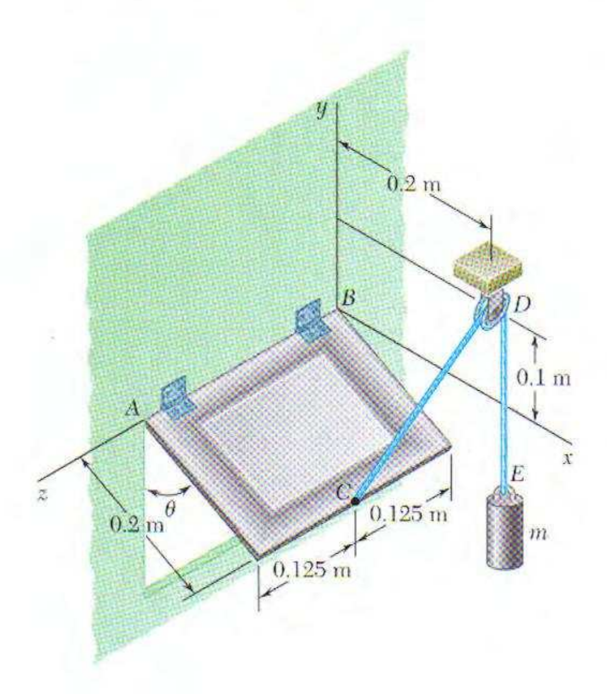


Figura P4.C5

4.C6 La grúa mostrada en la figura sostiene una caja de 2 000 kg y se mantiene en posición mediante una rótula en *A* y por medio de dos cables unidos en *D* y *E*. Si se sabe que la grúa se encuentra en un plano vertical que forma un ángulo ϕ con el plano *xy*, use software para calcular y graficar la tensión en cada cable para valores de ϕ entre 0 y 60° con incrementos de 5°. Use incrementos menores apropiados para determinar el valor de ϕ para el cual la tensión en el cable *BE* es máxima.

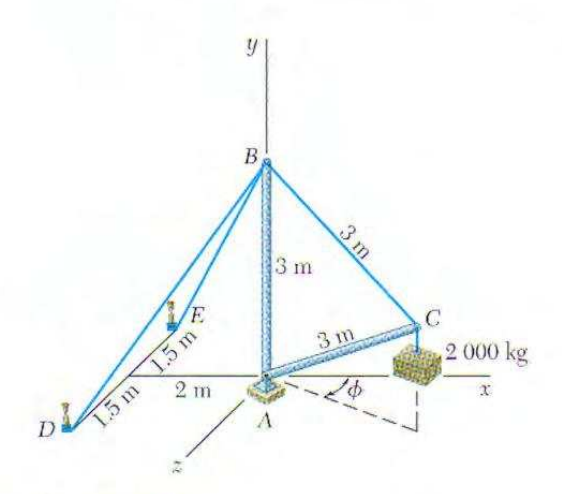
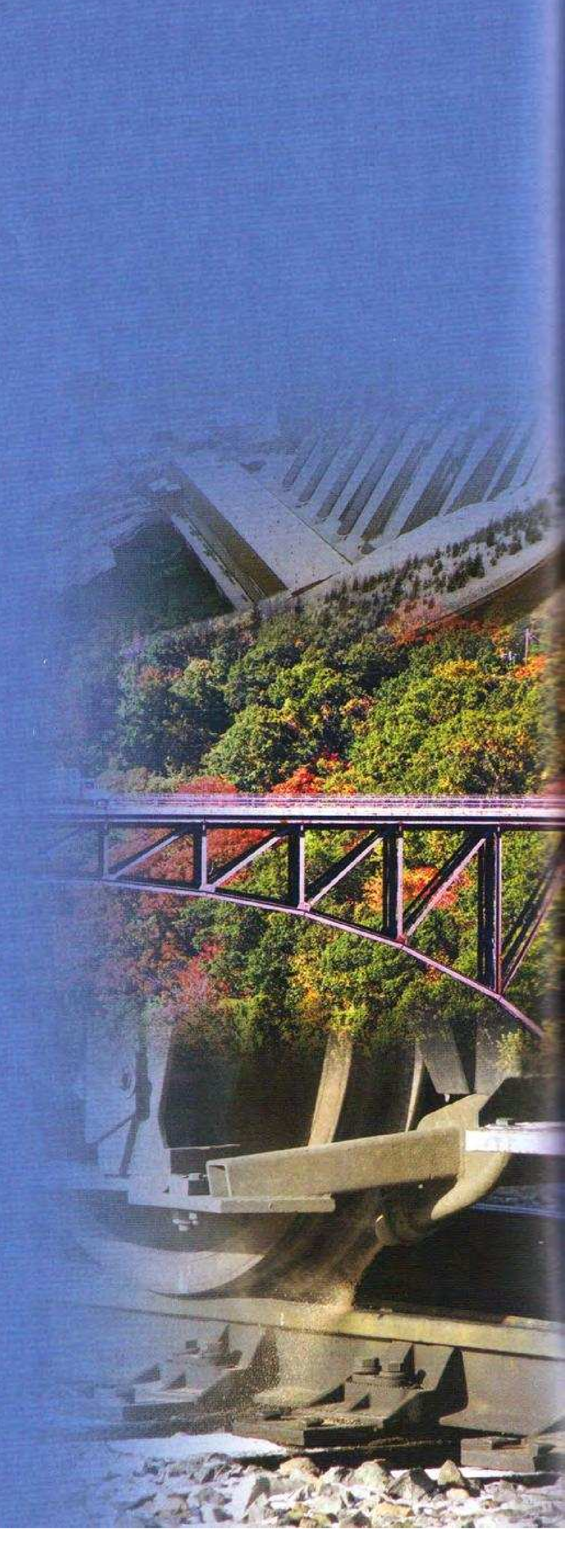
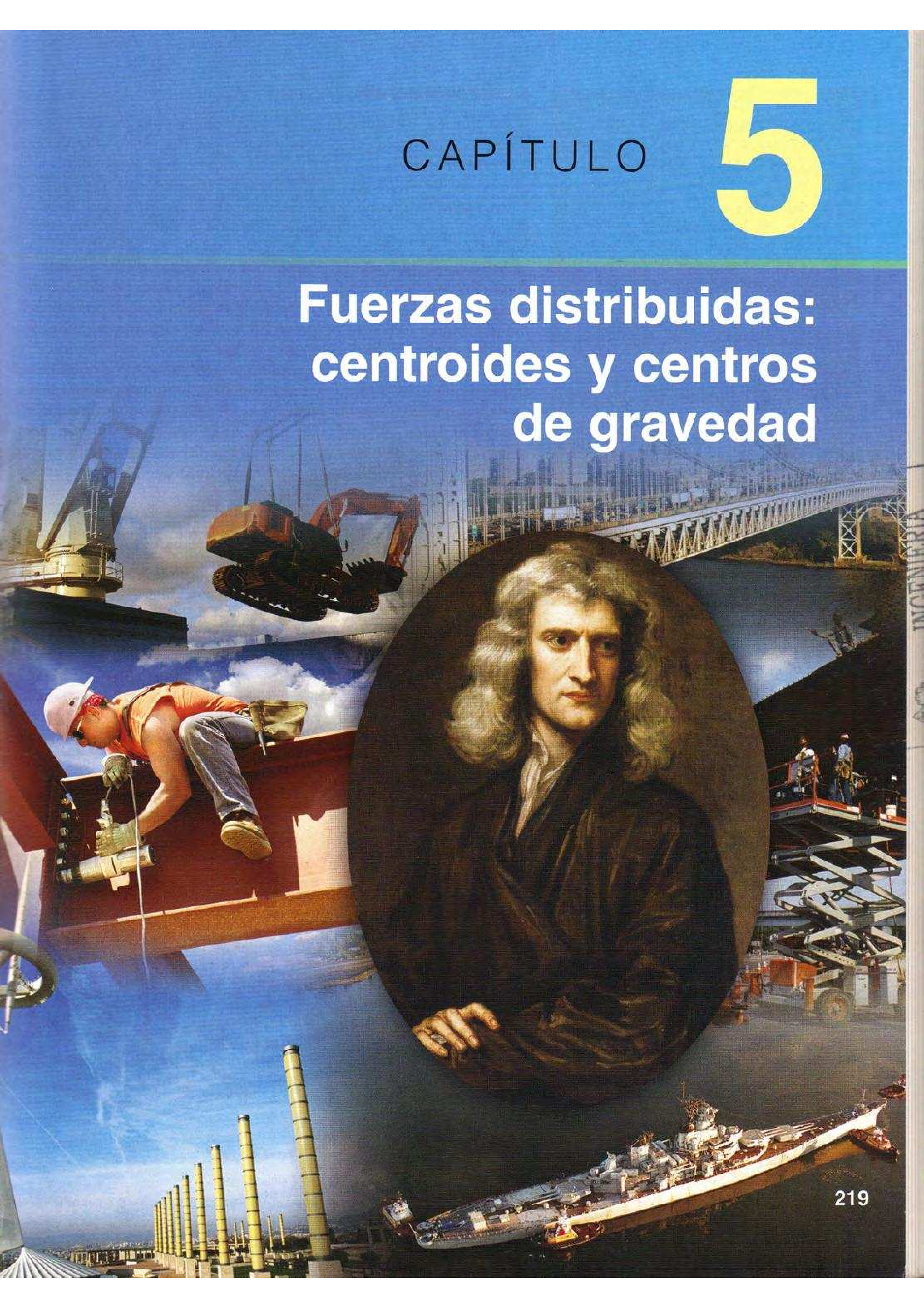


Figura P4.C6

La presa Revelstoke, ubicada en el río Columbia de la Columbia Británica, está sometida a tres diferentes tipos de cargas distribuidas: los pesos de los elementos que la constituyen, las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre su cara sumergida y las fuerzas de presión ejercidas por el suelo sobre su base.

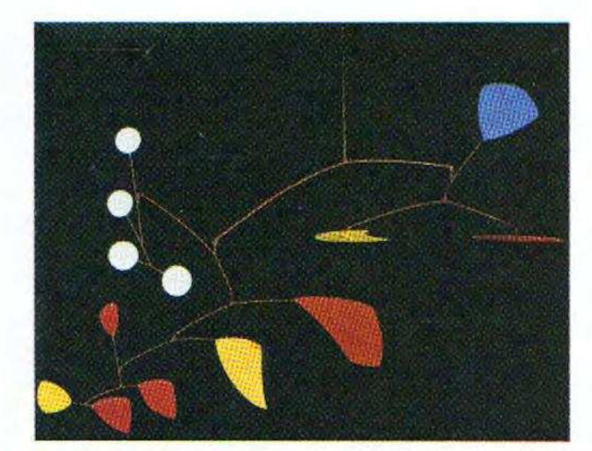




CAPÍTULO 5

Fuerzas distribuidas: centroides y centros de gravedad

CAPÍTULO 5 FUERZAS DISTRIBUIDAS: CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD



Fotografía 5.1 El balance preciso de los componentes de un móvil requiere de una comprensión de los centros de gravedad y centroides, que son los tópicos principales de este capítulo.

5.1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se ha supuesto que la atracción ejercida por la Tierra sobre un cuerpo rígido podía representarse por una sola fuerza **W**. Esta fuerza, denominada fuerza de gravedad o peso del cuerpo, debía aplicarse en el *centro de gravedad* del cuerpo (sección 3.2). De hecho, la Tierra ejerce una fuerza sobre cada una de las partículas que constituyen al cuerpo. En este sentido, la acción de la Tierra sobre un cuerpo rígido debe representarse por un gran número de pequeñas fuerzas distribuidas sobre todo el cuerpo. Sin embargo, en este capítulo se aprenderá que la totalidad de dichas fuerzas pequeñas puede ser reemplazada por una sola fuerza equivalente **W**. También se aprenderá cómo determinar el centro de gravedad, esto es, el punto de aplicación de la resultante **W**, para cuerpos de varias formas.

En la primera parte del capítulo se describen cuerpos bidimensionales como placas planas y alambres que están contenidos en un plano dado. Se introducen dos conceptos que están muy relacionados con la determinación del centro de gravedad de una placa o de un alambre: el concepto de *centroide* de un área o de una línea y el concepto del *primer momento* de un área o de una línea con respecto a un eje dado.

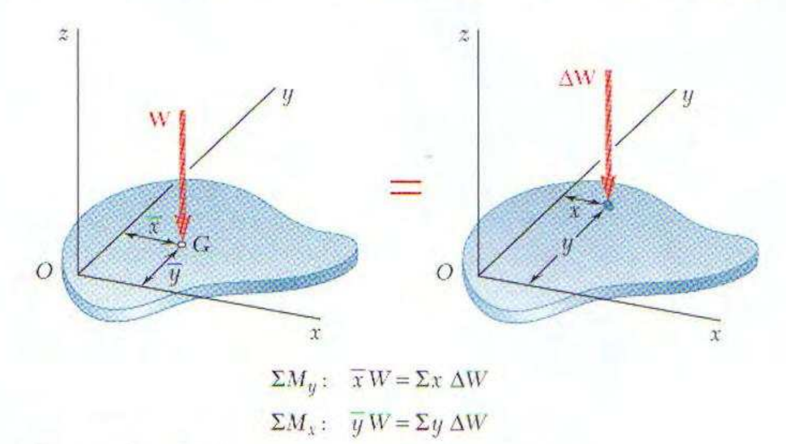
También se aprenderá que el cálculo del área de una superficie de revolución o del volumen de un cuerpo de revolución está directamente relacionado con la determinación del centroide de la línea o del área utilizados para generar dicha superficie o cuerpo de revolución (teoremas de Pappus-Guldinus). Además, como se muestra en las secciones 5.8 y 5.9, la determinación del centroide de un área simplifica el análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas y el cálculo de las fuerzas ejercidas sobre superficies rectangulares sumergidas, como compuertas hidráulicas y porciones de presas.

Al final del capítulo se aprenderá cómo determinar tanto el centro de gravedad de cuerpos tridimensionales como el centroide de un volumen y los primeros momentos de dicho volumen con respecto a los planos coordenados.

ÁREAS Y LÍNEAS

5.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIONAL

Para iniciar, considere una placa plana horizontal (figura 5.1). La placa puede dividirse en n elementos pequeños. Las coordenadas del pri-



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = \Sigma x\, \Delta W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = \Sigma y\, \Delta W$$

Figura 5.1 Centro de gravedad de una placa.

mer elemento se representan con x_1 y y_1, las del segundo elemento se representan con x_2 y y_2, etc. Las fuerzas ejercidas por la Tierra sobre los elementos de la placa serán representadas, respectivamente, con $\Delta\mathbf{W}_1$, $\Delta\mathbf{W}_2$, . . . , $\Delta\mathbf{W}_n$. Estas fuerzas o pesos están dirigidos hacia el centro de la Tierra; sin embargo, para todos los propósitos prácticos, se puede suponer que dichas fuerzas son paralelas. Por tanto, su resultante es una sola fuerza en la misma dirección. La magnitud W de esta fuerza se obtiene a partir de la suma de las magnitudes de los pesos de los elementos:

$$\Sigma F_z: \qquad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots + \Delta W_n$$

para obtener las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del punto G, donde debe aplicarse la resultante $\mathbf{W}$, se escribe que los momentos de $\mathbf{W}$ con respecto a los ejes y y x son iguales a la suma de los momentos correspondientes de los pesos elementales, esto es

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: &\qquad \bar{x}W = x_1\,\Delta W_1 + x_2\,\Delta W_2 + \cdots + x_n\,\Delta W_n \\ \Sigma M_x: &\qquad \bar{y}W = y_1\,\Delta W_1 + y_2\,\Delta W_2 + \cdots + y_n\,\Delta W_n \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si ahora se incrementa el número de elementos en los cuales se ha dividido la placa y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento se obtienen, en el límite, las siguientes expresiones:

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \tag{5.2}$$

Estas ecuaciones definen el peso $\mathbf{W}$ y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad G de una placa plana. Se pueden derivar las mismas ecuaciones para un alambre que se encuentra en el plano xy (figura 5.2). Se observa que usualmente el centro de gravedad G de un alambre no está localizado sobre este último.

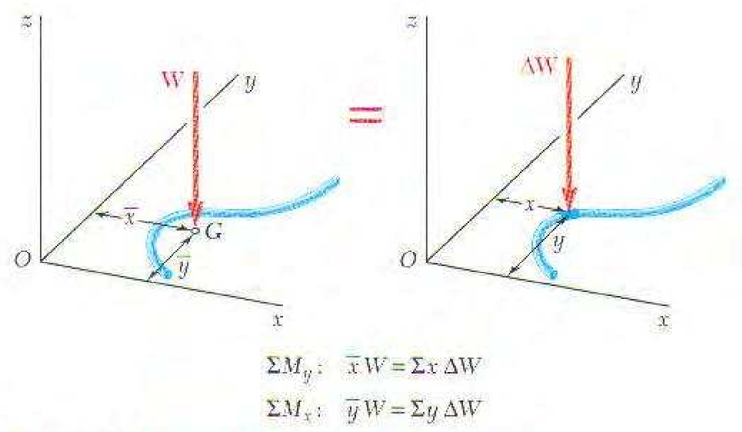


Figura 5.2 Centro de gravedad de un alambre.

5.3. CENTROIDES DE ÁREAS Y LÍNEAS

En el caso de una placa plana homogénea de espesor uniforme, la magnitud ΔW del peso de un elemento de la placa puede expresarse como

$$\Delta W = \gamma t \, \Delta A$$

donde γ = peso específico (peso por unidad de volumen) del material
t = espesor de la placa
ΔA = área del elemento

En forma similar, se puede expresar la magnitud W del peso de toda la placa como

$$W = \gamma t A$$

donde A es el área total de la placa.

Si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, se debe expresar el peso específico γ en lb/ft^3, el espesor t en pies y las áreas ΔA y A en pies cuadrados. Entonces, se observa que ΔW y W estarán expresados en libras. Si se usan las unidades del SI, se debe expresar a γ en N/m^3, a t en metros y a las áreas ΔA y A en metros cuadrados; entonces, los pesos ΔW y W estarán expresados en newtons.†

Si se sustituye a ΔW y a W en las ecuaciones de momento (5.1) y se divide a todos los términos entre γt, se obtiene

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = x_1 \, \Delta A_1 + x_2 \, \Delta A_2 + \cdots + x_n \, \Delta A_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = y_1 \, \Delta A_1 + y_2 \, \Delta A_2 + \cdots + y_n \, \Delta A_n$$

Si se incrementa el número de elementos en los cuales se divide el área A y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento, se obtiene en el límite

$$\bar{x}A = \int x \, dA \qquad \bar{y}A = \int y \, dA \tag{5.3}$$

Estas ecuaciones definen las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad de una placa homogénea. El punto cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$ también se conoce como el *centroide C del área A* de la placa (figura 5.3). Si la placa no es homogénea, estas ecuaciones no se pueden utilizar para determinar el centro de gravedad de la placa; sin embargo, éstas aún definen al centroide del área.

En el caso de un alambre homogéneo de sección transversal uniforme, la magnitud ΔW del peso de un elemento de alambre puede expresarse como

$$\Delta W = \gamma a \, \Delta L$$

donde γ = peso específico del material
a = área de la sección transversal del alambre
ΔL = longitud del elemento

†Se debe señalar que en el Sistema Internacional de unidades generalmente se caracteriza a un material dado por su densidad ρ (masa por unidad de volumen) en lugar de caracterizarlo por su peso específico γ. Entonces, el peso específico del material se puede obtener a partir de la relación

$$\gamma = \rho g$$

donde $g = 9.81 \, m/s^2$. Como ρ se expresa en kg/m^3, se observa que γ estará expresado en $(kg/m^3)(m/s^2)$, esto es, en N/m^3.

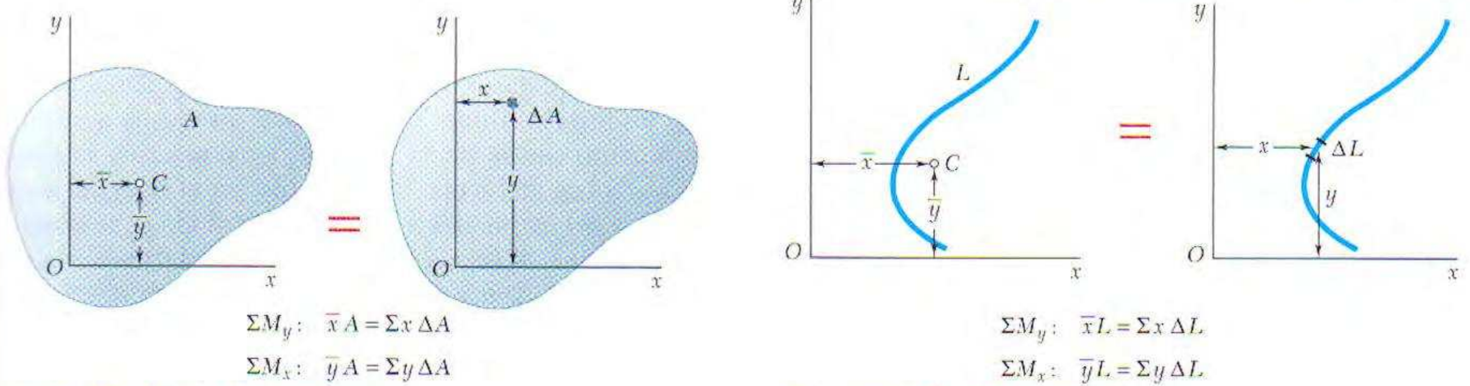


Figura 5.3 Centroide de un área.

Figura 5.4 Centroide de una línea.

El centro de gravedad de un alambre coincide con el *centroide C de la línea L* que define la forma del alambre (figura 5.4). Las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide de la línea L se obtienen a partir de las ecuaciones

$$\bar{x}L = \int x\, dL \qquad \bar{y}L = \int y\, dL \tag{5.4}$$

5.4. PRIMEROS MOMENTOS DE ÁREAS Y LÍNEAS

La integral $\int x\, dA$ en las ecuaciones (5.3) de la sección anterior se conoce como el *primer momento del área A con respecto al eje y* y se representa con Q_y. En forma similar, la integral $\int y\, dA$ define el *primer momento de A con respecto al eje x* y se representa con Q_x. Así se escribe

$$Q_y = \int x\, dA \qquad Q_x = \int y\, dA \tag{5.5}$$

Si comparamos las ecuaciones (5.3) con las ecuaciones (5.5), se observa que los primeros momentos del área A pueden ser expresados como los productos del área con las coordenadas de su centroide:

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \tag{5.6}$$

A partir de las ecuaciones (5.6) se concluye que las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de dicha área entre el área misma. Los primeros momentos de un área también son útiles en la mecánica de materiales para determinar los esfuerzos de corte en vigas sujetas a cargas transversales. Por último, a partir de las ecuaciones (5.6) se observa que si el centroide de un área está localizado sobre un eje coordenado, entonces el primer momento del área con respecto a ese eje es igual a cero. De manera inversa, si el primer momento de un área con respecto a un eje coordenado es igual a cero, entonces el centroide del área está localizado sobre ese eje.

Se pueden utilizar relaciones similares a partir de las ecuaciones (5.5) y (5.6) para definir los primeros momentos de una línea con respecto a los ejes coordenados y para expresar dichos momentos como los productos de la longitud L de la línea y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de su centroide.

Se dice que un área A es *simétrica con respecto a un eje* BB' si para todo punto P del área existe un punto P' de esa misma área tal que la línea PP' sea perpendicular a BB' y dicha línea está dividida en dos partes iguales por el eje en cuestión (figura 5.5*a*). Se dice que una línea L es simétrica con respecto a un eje BB' si satisface condiciones similares. Cuando un área A o una línea L posee un eje de simetría BB', su primer momento con respecto a BB' es igual a cero y su centroide está localizado sobre dicho eje. Por ejemplo, en el caso del área A de la figura 5.5*b*, la cual es simétrica con respecto al eje y, se observa que para cada elemento de área dA de abscisa x existe un elemento de área dA' que tiene la misma superficie y cuya abscisa es $-x$. Se concluye que la integral en la primera de las ecuaciones (5.5) es igual a cero y, por tanto, se tiene que $Q_y = 0$. También se concluye a partir de la primera de las relaciones (5.3) que $\bar{x} = 0$. Por consiguiente, si un área A o una línea L poseen un eje de simetría, su centroide C está localizado sobre dicho eje.

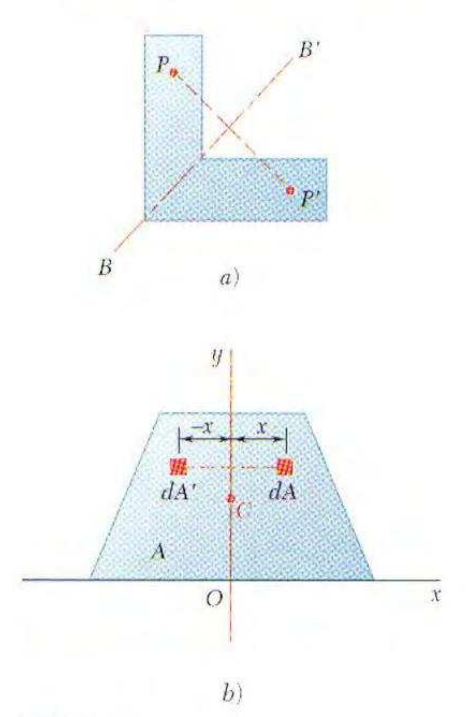


Figura 5.5

Además, se debe señalar que si un área o una línea posee dos ejes de simetría, su centroide C debe estar localizado en la intersección de esos dos ejes (figura 5.6). Esta propiedad permite determinar de inmediato el centroide de áreas como círculos, elipses, cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros u otras figuras simétricas, así como el centroide de líneas que tienen la forma de la circunferencia de un círculo, el perímetro de un cuadrado, entre otros.

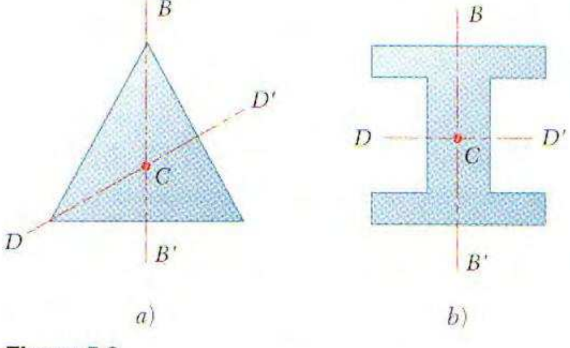


Figura 5.6

Se dice que un área A es *simétrica con respecto a un centro* O si para cada elemento de área dA de coordenadas x y y existe un elemento de área dA' de igual superficie con coordenadas $-x$ y $-y$ (figura 5.7). Entonces, se concluye que ambas integrales en las ecuaciones (5.5) son iguales a cero y que $Q_x = Q_y = 0$. También, a partir de las ecuaciones (5.3), se concluye que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, esto es, que el centroide del área coincide con su centro de simetría O. En forma análoga, si una línea posee un centro de simetría O, el centroide de la línea coincidirá con el centro O.

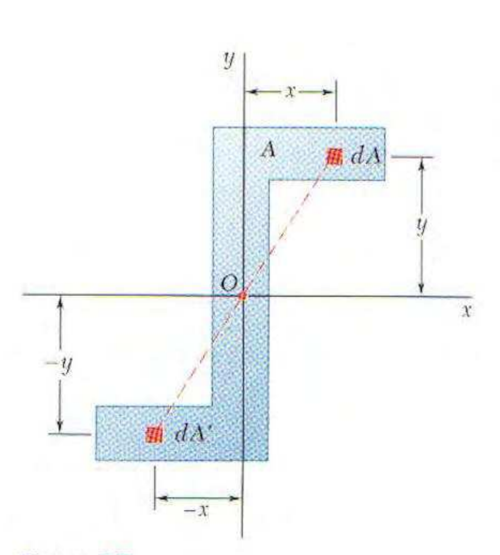


Figura 5.7

Se debe señalar que una figura con un centro de simetría no necesariamente posee un eje de simetría (figura 5.7) y que una figura con dos ejes de simetría no necesariamente tiene un centro de simetría (figura 5.6*a*). Sin embargo, si una figura posee dos ejes de simetría que son perpendiculares entre sí, el punto de intersección de dichos ejes es un centro de simetría (figura 5.6*b*).

La determinación de los centroides de áreas asimétricas y de líneas y áreas que poseen un solo eje de simetría se estudiará en las secciones 5.6 y 5.7. En las figuras 5.8A y 5.8B se muestran los centroides de formas comunes de áreas y de líneas.

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Enjuta parabólica	$y = kx^2$	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general	$y = kx^n$	$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Figura 5.8A Centroides de áreas comunes.

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

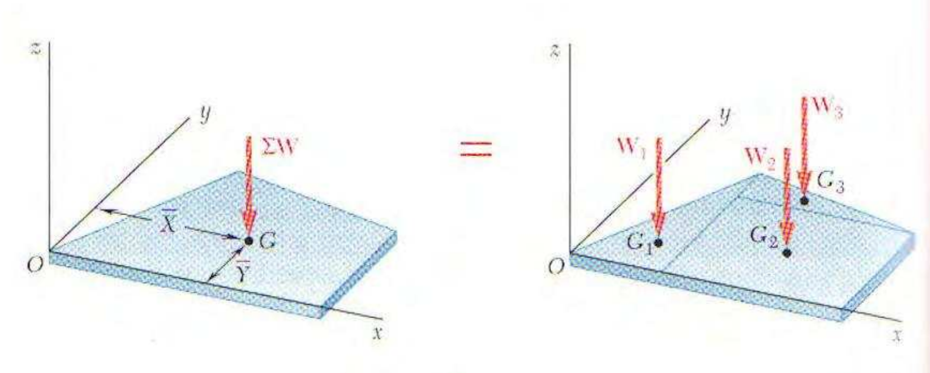
Figura 5.8B Centroides de formas comunes de líneas.

5.5. PLACAS Y ALAMBRES COMPUESTOS

En muchos casos, una placa plana puede dividirse en rectángulos, triángulos u otras de las formas comunes mostradas en la figura 5.8A. La abscisa $\bar{X}$ de su centro de gravedad G puede determinarse a partir de las abscisas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ de los centros de gravedad de las diferentes partes que constituyen la placa, expresando que el momento del peso de toda la placa con respecto al eje y es igual a la suma de los momentos de los pesos de las diferentes partes con respecto a ese mismo eje (figura 5.9). La ordenada $\bar{Y}$ del centro de gravedad de la placa se encuentra de una forma similar, igualando momentos con respecto al eje x. Así, se escribe

$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \cdots + \bar{x}_n W_n$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \cdots + \bar{y}_n W_n$$



$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}\,\Sigma W = \Sigma \bar{x} W$$

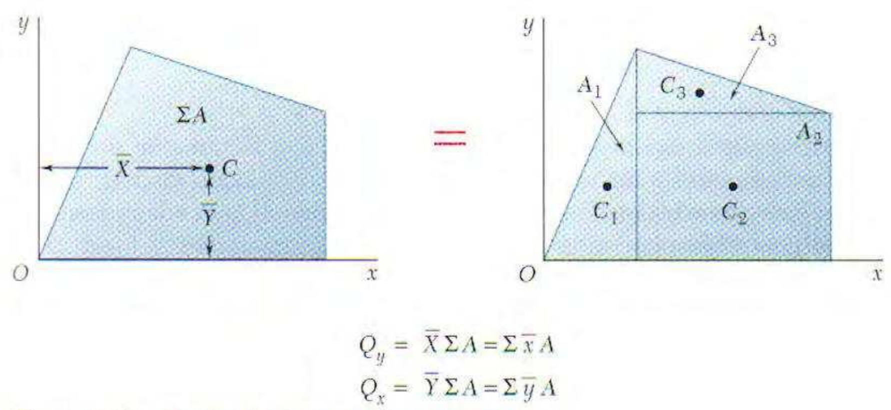
$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}\,\Sigma W = \Sigma \bar{y} W$$

Figura 5.9 Centro de gravedad de una placa compuesta.

o en forma condensada,

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma\bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma\bar{y}W \tag{5.7}$$

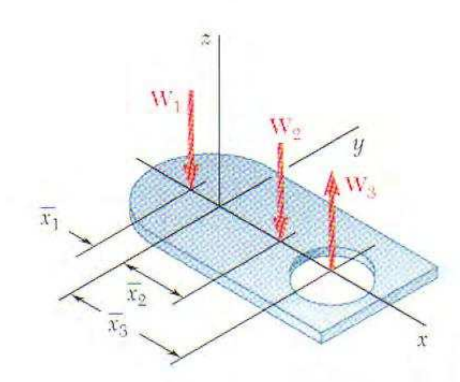
Estas ecuaciones se pueden resolver para las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ del centro de gravedad de la placa.



$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A$
$Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A$

Figura 5.10 Centroide de un área compuesta.

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, el centro de gravedad coincide con el centroide C de su área. La abscisa $\bar{X}$ del centroide del área puede determinarse observando que el primer momento Q_y del área compuesta con respecto al eje y puede expresarse como el producto de $\bar{X}$ con el área total y como la suma de los primeros momentos de las áreas elementales con respecto al eje y (figura 5.10). La ordenada $\bar{Y}$ del centroide se encuentra de forma similar, considerando el primer momento Q_x del área compuesta. Así, se tiene



$$Q_y = \bar{X}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{x}_1A_1 + \bar{x}_2A_2 + \cdots + \bar{x}_nA_n$$
$$Q_x = \bar{Y}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \bar{y}_1A_1 + \bar{y}_2A_2 + \cdots + \bar{y}_nA_n$$

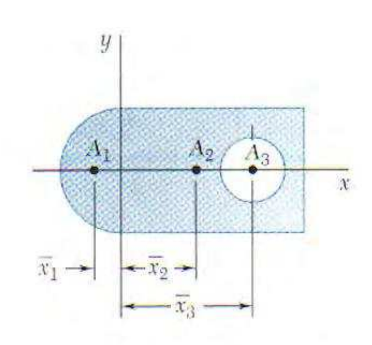
o en forma condensada,

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A \tag{5.8}$$

Estas ecuaciones proporcionan los primeros momentos del área compuesta o pueden utilizarse para obtener las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centroide.

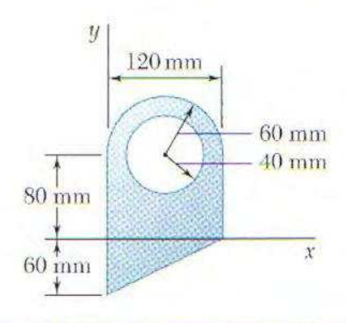
Se debe tener cuidado de asignarle el signo apropiado al momento de cada área. Los primeros momentos de áreas, al igual que los momentos de las fuerzas, pueden ser positivos o negativos. Por ejemplo, un área cuyo centroide está localizado a la izquierda del eje y tendrá un primer momento negativo con respecto a dicho eje. Además al área de un agujero se le debe asignar un signo negativo (figura 5.11).

De manera similar, en muchos casos es posible determinar el centro de gravedad de un alambre compuesto o el centroide de una línea compuesta dividiendo al alambre o a la línea en elementos más simples (véase problema resuelto 5.2).



	$\bar{x}$	A	$\bar{x}A$
A_1 Semicírculo	−	+	−
A_2 Rectángulo completo	+	+	+
A_3 Agujero circular	+	−	−

Figura 5.11

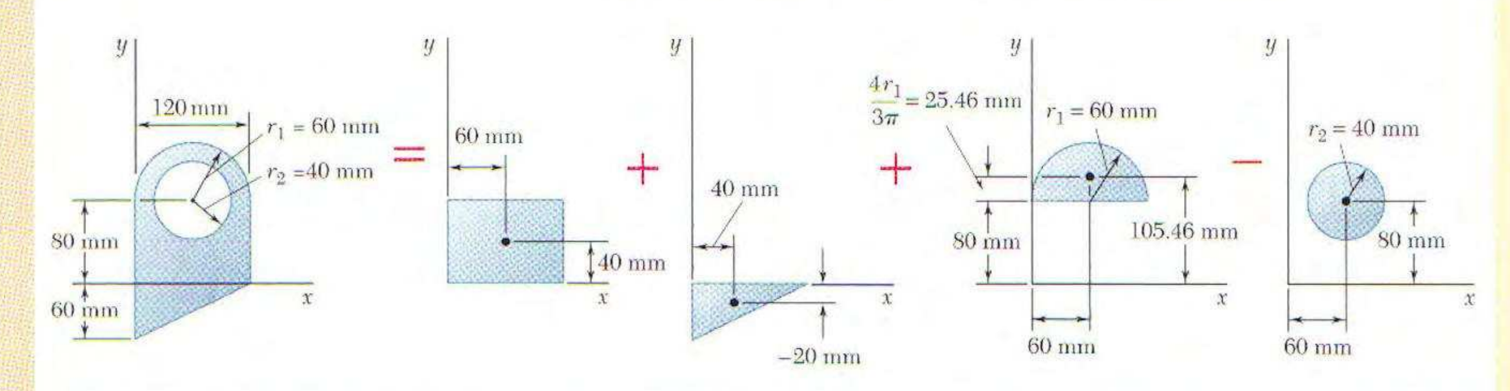


PROBLEMA RESUELTO 5.1

Para el área plana mostrada en la figura, determine: *a*) los primeros momentos con respecto a los ejes x y y, y *b*) la ubicación de su centroide.

SOLUCIÓN

Componentes del área. El área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y después se resta un círculo. Utilizando los ejes coordenados mostrados, se determinan el área y las coordenadas del centroide para cada una de las áreas componentes y luego se introducen en la tabla que aparece en la parte inferior. El área del círculo se indica como negativa puesto que debe restarse de las demás áreas. Nótese que la coordenada $\bar{y}$ del centroide del triángulo es negativa para los ejes mostrados. Los primeros momentos de las áreas componentes con respecto a los ejes coordenados se calculan y se introducen en la tabla.

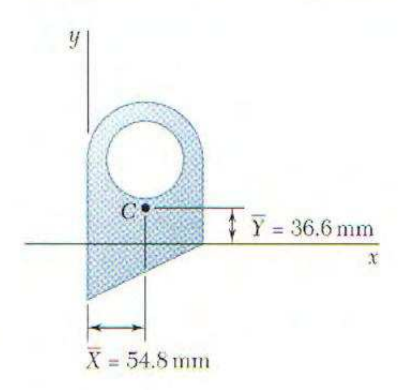


Componente	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

a) Primeros momentos del área. Con las ecuaciones (5.8), se escribe

$$Q_x = \Sigma\bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$
$$Q_y = \Sigma\bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 \qquad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \blacktriangleleft$$

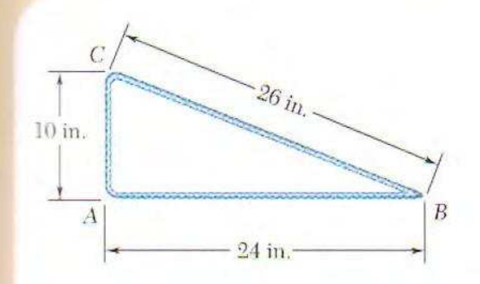
b) Ubicación del centroide. Si se sustituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene



$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A: \qquad \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

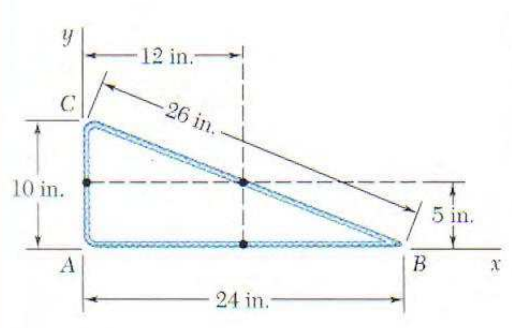
$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A: \qquad \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$
$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 5.2



La figura mostrada está hecha a partir de un pedazo de alambre delgado y homogéneo. Determine la ubicación de su centro de gravedad.

SOLUCIÓN



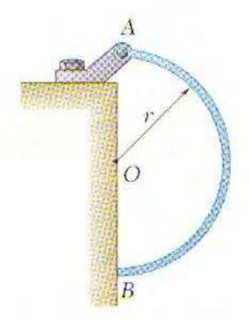
Como la figura está hecha de un alambre homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de la línea correspondiente. Por tanto, se determinará dicho centroide. Si se seleccionan los ejes mostrados, con origen en A, se determinan las coordenadas del centroide de cada segmento de línea y se calculan los primeros momentos con respecto a los ejes coordenados.

Segmento	L, in.	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}L$, in^2	$\bar{y}L$, in^2
AB	24	12	0	288	0
BC	26	12	5	312	130
CA	10	0	5	0	50
	$\Sigma L = 60$			$\Sigma\bar{x}L = 600$	$\Sigma\bar{y}L = 180$

Con la sustitución de los valores obtenidos en la tabla, en las ecuaciones que definen el centroide de una línea compuesta, se obtiene

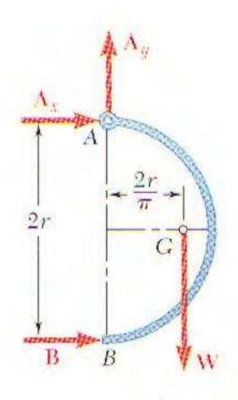
$\bar{X}\Sigma L = \Sigma\bar{x}L$: $\quad \bar{X}(60 \text{ in.}) = 600 \text{ in}^2 \qquad \bar{X} = 10 \text{ in.}$ ◀

$\bar{Y}\Sigma L = \Sigma\bar{y}L$: $\quad \bar{Y}(60 \text{ in.}) = 180 \text{ in}^2 \qquad \bar{Y} = 3 \text{ in.}$ ◀



PROBLEMA RESUELTO 5.3

Una barra semicircular uniforme de peso W y radio r está unida a un perno en A y descansa contra una superficie sin fricción en B. Determine las reacciones en A y B.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la barra. Las fuerzas que actúan sobre la barra son su peso **W**, el cual está aplicado en el centro de gravedad G (cuya posición se obtiene a partir de la figura 5.8B); una reacción en A, representada por sus componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ y una reacción horizontal en B.

Ecuaciones de equilibrio

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \qquad B(2r) - W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0$$

$$B = +\frac{W}{\pi} \qquad\qquad \mathbf{B} = \frac{W}{\pi} \rightarrow \quad ◀$$



$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \qquad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{\pi} \qquad \mathbf{A}_x = \frac{W}{\pi} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad A_y - W = 0 \qquad\qquad \mathbf{A}_y = W\uparrow$$

Sumando las dos componentes de la reacción en A:

$$A = \left[W^2 + \left(\frac{W}{\pi}\right)^2\right]^{1/2} \qquad\qquad A = W\left(1 + \frac{1}{\pi^2}\right)^{1/2} \quad ◀$$

$$\tan \alpha = \frac{W}{W/\pi} = \pi \qquad\qquad \alpha = \tan^{-1} \pi \quad ◀$$

Las respuestas también pueden expresarse como sigue:

$$\mathbf{A} = 1.049W \measuredangle 72.3° \qquad \mathbf{B} = 0.318W \rightarrow \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se desarrollaron las ecuaciones generales para localizar los centros de gravedad de cuerpos bidimensionales y alambres [ecuaciones (5.2)] y los centroides de áreas planas [ecuaciones (5.3)] y de líneas [ecuaciones (5.4)]. En los problemas que se presentan a continuación, se deberán localizar los centroides de áreas compuestas y líneas o tendrán que determinarse los primeros momentos del área de placas compuestas [ecuaciones (5.8)].

1. *Localización de centroides de áreas compuestas y líneas.* Los problemas resueltos 5.1 y 5.2 ilustran el procedimiento que debe seguirse al resolver problemas de este tipo. Sin embargo, hay ciertos puntos que se deben enfatizar.

a) El primer paso en la solución debe ser decidir cómo construir el área o la línea dada, a partir de las formas comunes de la figura 5.8. Se debe reconocer que, en el caso de áreas planas, una forma en particular se puede construir de varias maneras. Además, mostrar las diferentes componentes (como se hace en el problema resuelto 5.1) ayudará a establecer correctamente sus centroides y sus áreas o longitudes. No debe olvidarse que, para obtener la forma deseada, es posible restar o sumar áreas.

b) Se recomienda que para cada problema se construya una tabla que contenga las áreas o las longitudes y las coordenadas respectivas de sus centroides. Es esencial recordar que las áreas que son "removidas" (por ejemplo los agujeros) se toman como negativas. Además se debe incluir el signo de las coordenadas negativas. Por tanto, siempre debe observarse la ubicación del origen de los ejes coordenados.

c) Cuando sea posible, se deben utilizar consideraciones de simetría [sección 5.4] para determinar con mayor facilidad la ubicación de un centroide.

d) En las fórmulas de la figura 5.8 para el sector circular y para el arco del círculo, el ángulo siempre debe ser expresado en radianes.

2. *Cálculo de los primeros momentos de un área.* Los procedimientos para ubicar el centroide de un área y para determinar los primeros momentos de un área son similares; sin embargo, para calcular estos últimos no es necesario determinar el área total. Además, como se señaló en la sección 5.4, se debe reconocer que el primer momento de un área con respecto a un eje centroidal es igual a cero.

3. *Resolución de problemas que involucran al centro de gravedad.* En los problemas que se presentan a continuación se considera que los cuerpos son homogéneos; por tanto, sus centros de gravedad coinciden con sus centroides. Además, cuando un cuerpo que está suspendido de un solo perno está en equilibrio, el perno y el centro de gravedad del cuerpo deben estar localizados sobre la misma línea vertical.

Pudiera parecer que muchos de los problemas en esta lección tienen poco que ver con el estudio de la mecánica. Sin embargo, ser capaz de localizar el centroide de formas compuestas será esencial en varios tópicos que se estudiarán más adelante.

Problemas

5.1 a 5.9 Localice el centroide del área plana que se muestra en cada figura.

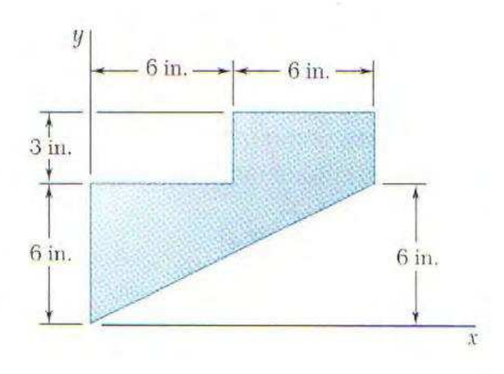


Figura P5.1

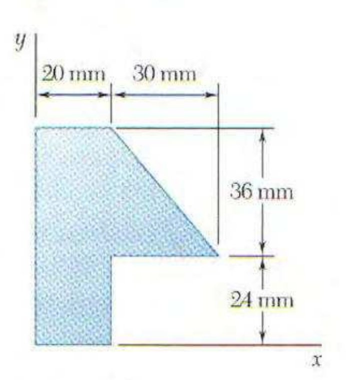


Figura P5.2

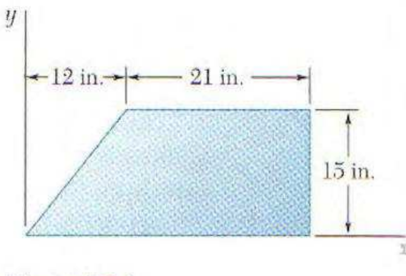


Figura P5.3

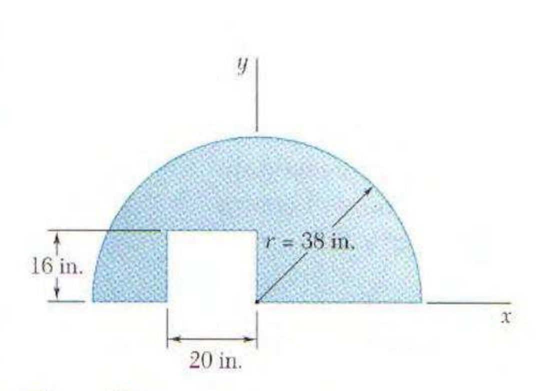


Figura P5.4

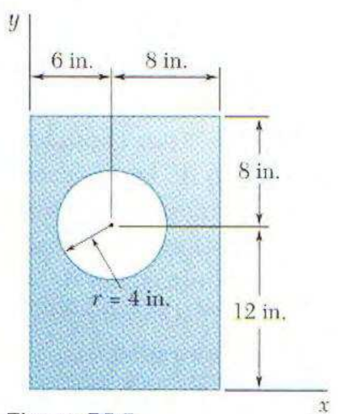


Figura P5.5

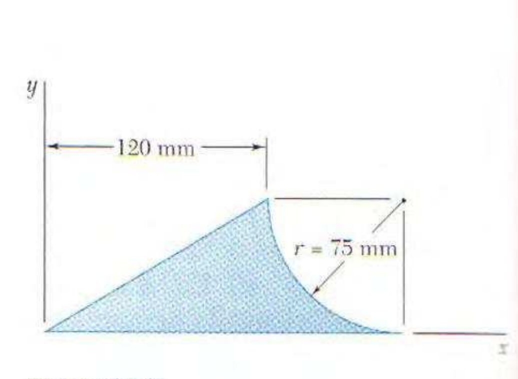


Figura P5.6

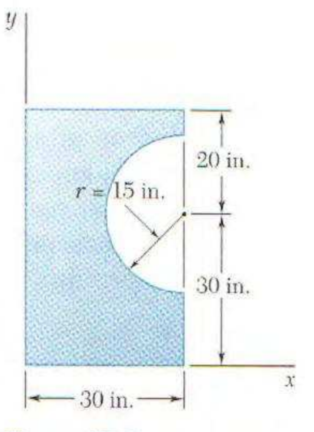


Figura *P5.7*

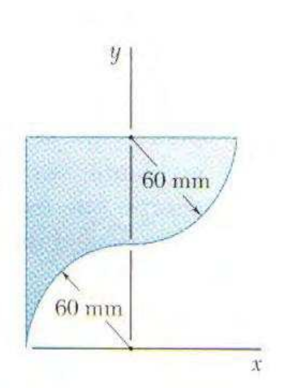


Figura *P5.8*

Figura P5.9

5.10 a 5.15 Localice el centroide del área plana que se muestra en cada figura.

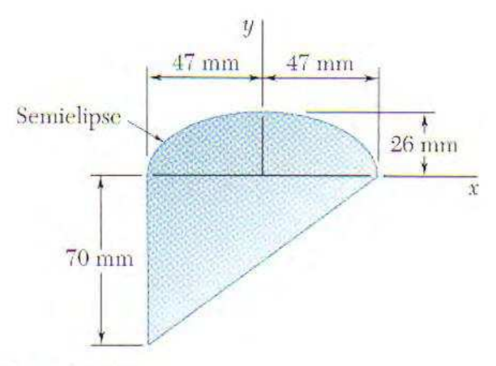


Figura P5.10

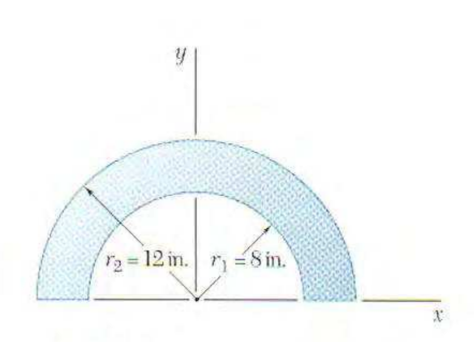


Figura P5.11

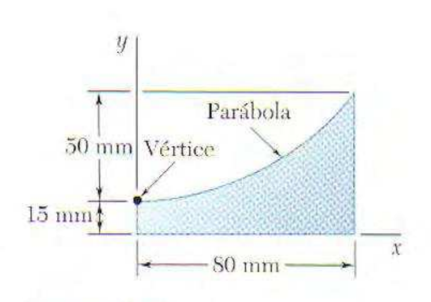


Figura P5.12

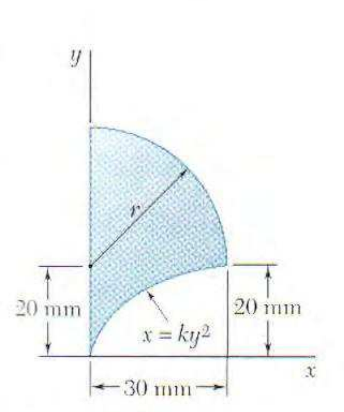


Figura *P5.13*

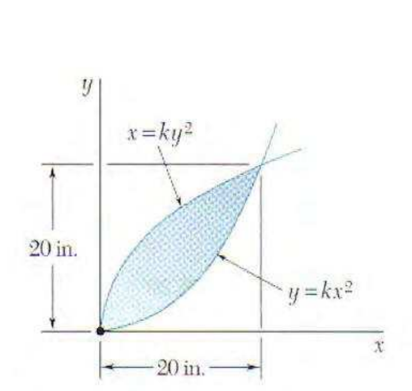


Figura P5.14

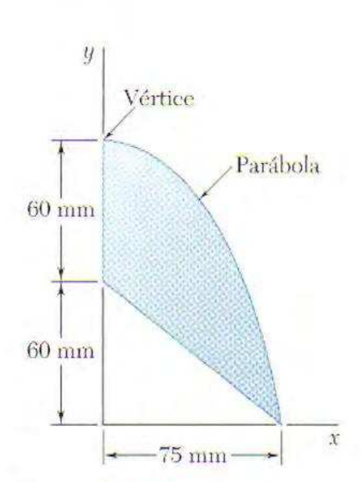


Figura *P5.15*

5.16 Determine la coordenada y del centroide del área sombreada en términos de r_1, r_2 y α.

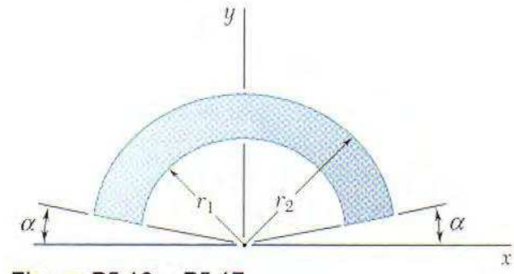


Figura P5.16 y P5.17

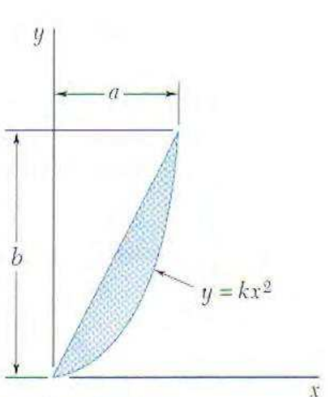


Figura P5.18

5.17 Demuestre que si r_1 tiende a r_2, la localización de su centroide tiende a ser igual al centroide de un arco circular de radio $(r_1 + r_2)/2$.

5.18 Para el área mostrada, determine la relación a/b tal que $\bar{x} = \bar{y}$.

5.19 Para el área semianular del problema 5.11, determine la relación r_2/r_1 tal que $\bar{y} = 3r_1/4$.

5.20 Una viga compuesta se construye empernando cuatro placas a cuatro ángulos de $60 \times 60 \times 12$ mm, como se muestra en la figura. Los pernos están igualmente espaciados a lo largo de la viga, la cual sostiene una carga vertical. Como se demuestra en la mecánica de materiales, las fuerzas cortantes ejercidas sobre los pernos en *A* y *B* son proporcionales a los primeros momentos respecto del eje centroidal *x* de las áreas sombreadas de rojo que se muestran, respectivamente, en las partes *a* y *b* de la figura. Si se sabe que la fuerza ejercida sobre el perno en *A* es de 280 N, determine la fuerza ejercida sobre el perno en *B*.

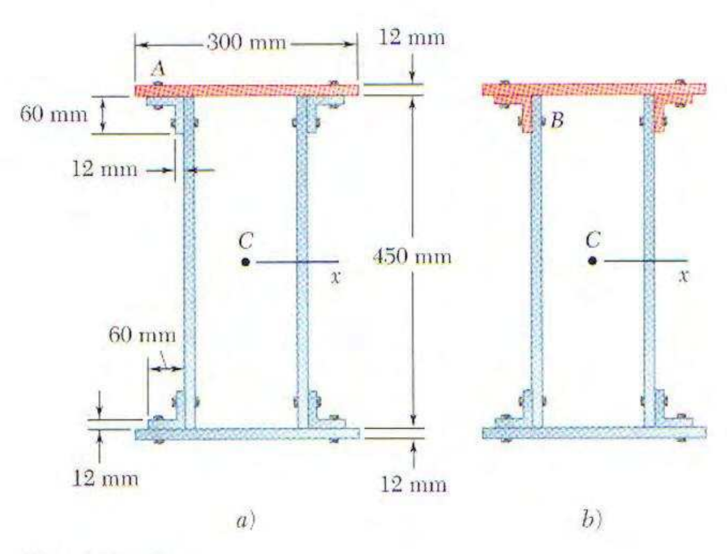


Figura P5.20

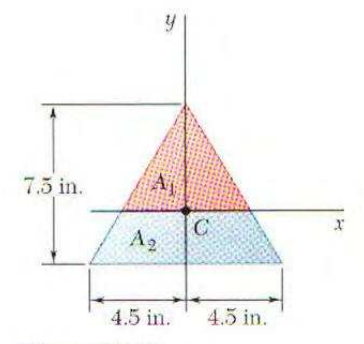


Figura P5.21

5.21 y 5.22 El eje horizontal *x* se traza a través del centroide *C* y divide al área mostrada en dos áreas componentes A_1 y A_2. Determine el primer momento de cada área componente respecto del eje *x*, y explique los resultados obtenidos.

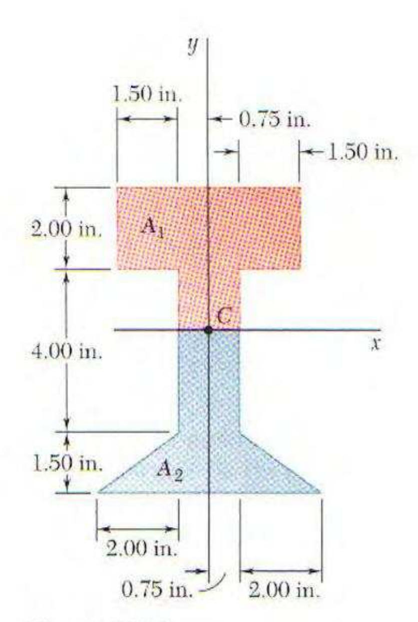


Figura P5.22

5.23 El primer momento respecto del eje x del área sombreada que se muestra en la figura se representa con Q_x. *a*) Exprese Q_x en términos de b, c y la distancia y desde la base del área sombreada hasta el eje x. *b*) Determine el valor de y para el cual Q_x es máximo y encuentre dicho valor máximo.

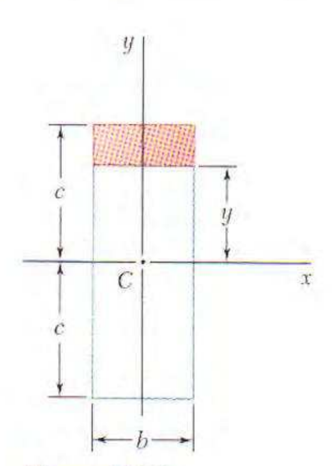


Figura P5.23

5.24 a 5.27 Un alambre delgado y homogéneo se dobla para formar el perímetro de las figuras que se indican a continuación. Localice el centro de gravedad de la figura formada con el alambre.

5.24 Figura P5.1.

5.25 Figura P5.2.

5.26 Figura P5.3.

5.27 Figura P5.7.

5.28 Una barra circular uniforme con 8 lb de peso y 10 in. de radio se une a un pasador en C y al cable AB. Determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la reacción en C.

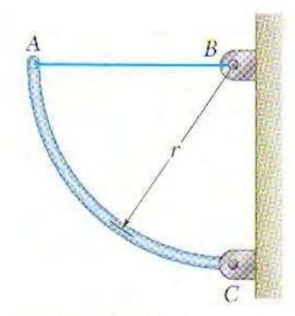


Figura P5.28

5.29 El elemento $ABCDE$ forma parte de un móvil y se hizo a partir de una sola pieza de tubería de aluminio. Si se sabe que el elemento está apoyado en C y que $l = 2$ m, determine la distancia d de manera que la porción BCD del elemento permanezca horizontal.

5.30 El elemento $ABCDE$ forma parte de un móvil y se hizo a partir de una sola pieza de tubería de aluminio. Si se sabe que el elemento está apoyado en C y que d es igual a 0.50 m, determine la longitud l del brazo DE tal que esta porción del elemento permanezca horizontal.

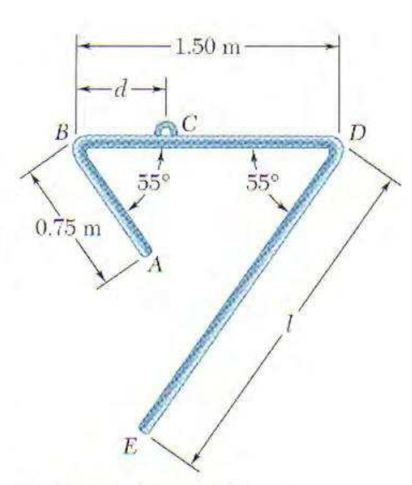


Figura P5.29 y P5.30

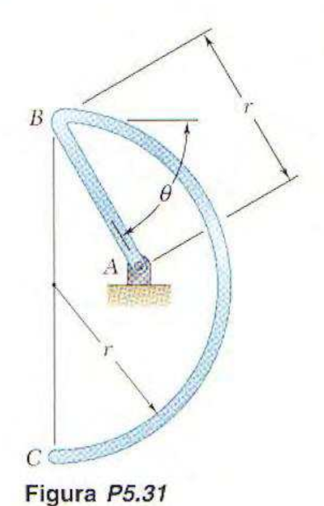


Figura *P5.31*

5.31 El alambre homogéneo *ABC* está doblado en un arco semicircular y una sección recta como se muestra en la figura, además se encuentra unido a una articulación en *A*. Determine el valor de θ tal que el alambre se encuentre en equilibrio en la posición indicada.

5.32 Determine la distancia h tal que el centroide del área sombreada esté tan lejos como sea posible de la línea BB', cuando *a*) $k = 0.10$ y *b*) $k = 0.80$.

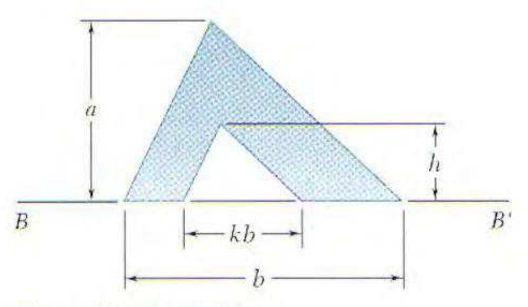


Figura P5.32 y P5.33

5.33 Si se sabe que la distancia h se seleccionó para maximizar la distancia $\bar{y}$ desde la línea BB' hasta el centroide del área sombreada, demuestre que $\bar{y} = 2h/3$

5.6. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES POR INTEGRACIÓN

El centroide de un área limitada por curvas analíticas (esto es, curvas definidas por ecuaciones algebraicas) por lo general se determina evaluando las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.3) de la sección 5.3:

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \tag{5.3}$$

Si el elemento de área dA es un pequeño rectángulo de lados dx y dy, la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración doble* con respecto a x y y. También es necesaria una integración doble si se usan coordenadas polares para las cuales dA es un elemento de lados dr y $r\,d\theta$.

Sin embargo, en la mayoría de los casos es posible determinar las coordenadas del centroide de un área con una sola integración. Esto se logra seleccionando a dA como un rectángulo o tira delgada o como un sector circular delgado (figura 5.12); el centroide de un rectángulo delgado está localizado en su centro y el centroide de un sector delgado está localizado a una distancia de $\frac{2}{3}r$ a partir de su vértice (como en el caso de un triángulo). Entonces, las coordenadas del centroide del área en consideración se obtienen expresando que el primer momento del área total con respecto a cada uno de los ejes coordenados es igual a la suma (o integral) de los momentos correspondientes de los elementos del área. Representando con $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dA, se escribe

$$\begin{aligned} Q_y &= \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA \\ Q_x &= \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA \end{aligned} \tag{5.9}$$

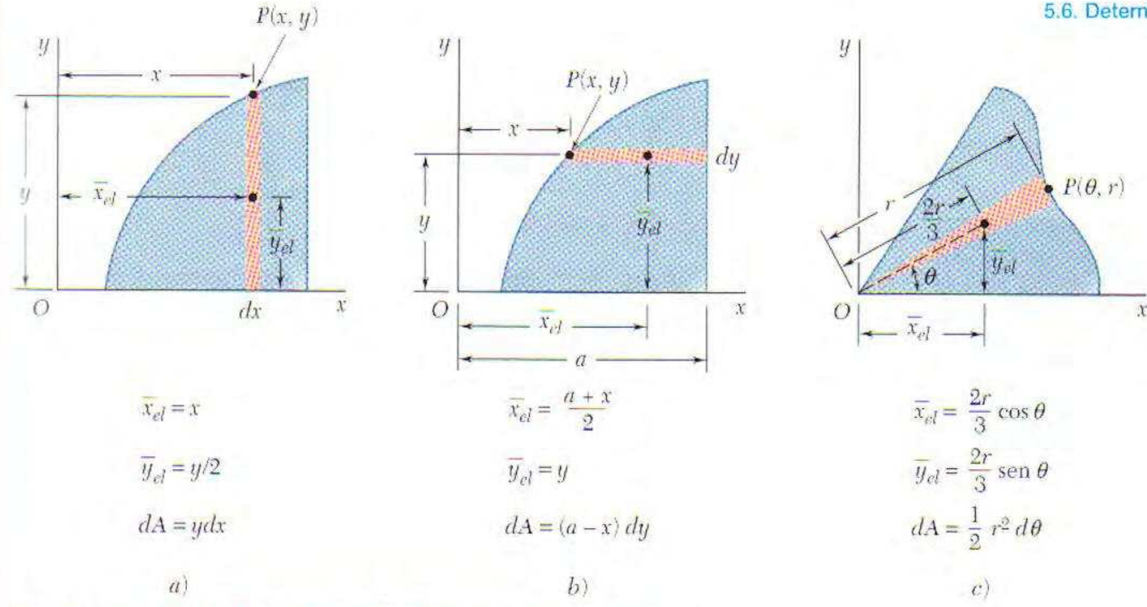


Figura 5.12 Centroides y áreas de elementos diferenciales.

Si el área A no se conoce aún, ésta también puede calcularse a partir de estos elementos.

Las coordenadas $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ del centroide del elemento del área dA deben expresarse en términos de las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Además, el área del elemento dA debe expresarse en términos de las coordenadas de dicho punto y de los diferenciales apropiados. Esto se ha hecho en la figura 5.12 para tres tipos comunes de elementos; la porción de círculo de la parte c debe utilizarse cuando la ecuación de la curva que limita al área esté dada en coordenadas polares. Deben sustituirse las expresiones apropiadas en las fórmulas (5.9) y debe utilizarse la ecuación de la curva que limita al área para expresar a una de las coordenadas en términos de la otra. De esta forma, se reduce a una sola integración. Una vez que se ha determinado el área y han sido evaluadas las integrales en las ecuaciones (5.9), estas ecuaciones pueden resolverse para las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide del área.

Cuando una línea está definida por una ecuación algebraica, puede determinarse su centroide al evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones (5.4) de la sección 5.3:

$$\bar{x}L = \int x\, dL \qquad \bar{y}L = \int y\, dL \qquad (5.4)$$

El diferencial de longitud dL debe reemplazarse por una de las siguiente expresiones, dependiendo de cuál coordenada x, y o θ se seleccione como la variable independiente en la ecuación utilizada para definir la línea (estas expresiones pueden derivarse con el uso del teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy \qquad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Después de que se ha utilizado la ecuación de la línea para expresar una de las coordenadas en términos de la otra, se puede llevar a cabo la integración y se pueden resolver las ecuaciones (5.4) para las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centroide de la línea.



Fotografía 5.2 Todos los tanques de almacenamiento que se muestran en la fotografía son cuerpos de revolución. Por tanto, las áreas de sus superficies y sus volúmenes pueden determinarse con los teoremas de Pappus-Guldinus.

5.7. TEOREMAS DE PAPPUS-GULDINUS

Estos teoremas fueron formulados primero por el geómetra griego Pappus durante el siglo III después de Cristo y fueron replanteados posteriormente por el matemático suizo Guldinus o Guldin (1577-1643), se refieren a superficies y cuerpos de revolución.

Una *superficie de revolución* se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo. Por ejemplo (figura 5.13), se

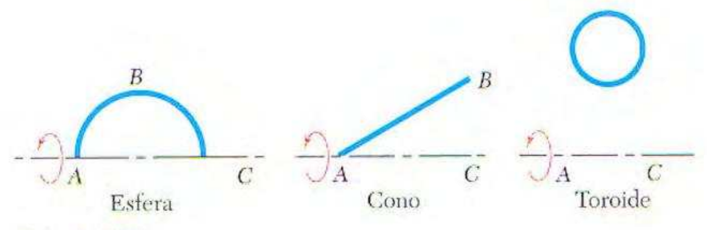


Figura 5.13

puede obtener la superficie de una esfera rotando un arco semicircular ABC con respecto al diámetro AC; se puede producir la superficie de un cono rotando una línea recta AB con respecto a un eje AC y se puede generar la superficie de un toroide o anillo rotando la circunferencia de un círculo con respecto a un eje que no interseca a dicha circunferencia. Un *cuerpo de revolución* se genera mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje fijo. Como se muestra en la figura 5.14, se puede generar una esfera, un cono y un toroide rotando la forma apropiada con respecto al eje que se indica.

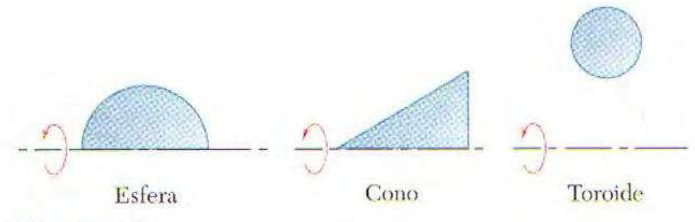


Figura 5.14

TEOREMA I. *El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de dicha curva al momento de generar la superficie.*

Demostración. Considérese un elemento dL de la línea L (figura 5.15) que rota alrededor del eje x. El área dA generada por el elemento dL es igual a $2\pi y\, dL$. Por tanto, el área total generada por L es $A = \int 2\pi y\, dL$. En la sección 5.3 se encontró que la integral $\int y\, dL$ es igual a $\bar{y}L$, por tanto, se tiene

$$A = 2\pi \bar{y} L \tag{5.10}$$

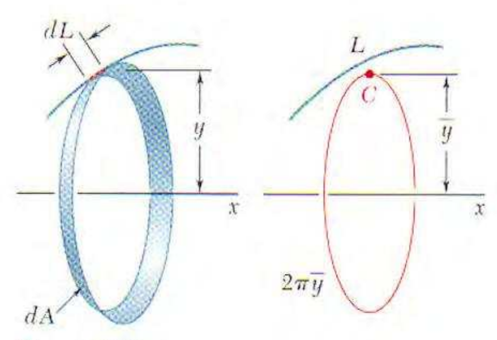


Figura 5.15

donde $2\pi\overline{y}$ es la distancia recorrida por el centroide de L (figura 5.15). Se debe señalar que la curva generatriz no debe cruzar el eje sobre el cual rota; si lo hiciera, las dos secciones, una a cada lado del eje, generarían áreas que tendrían signos opuestos y el teorema no podría aplicarse.

TEOREMA II. *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.*

Demostración. Considérese un elemento dA del área A, el cual se rota con respecto al eje x (figura 5.16). El volumen dV generado por

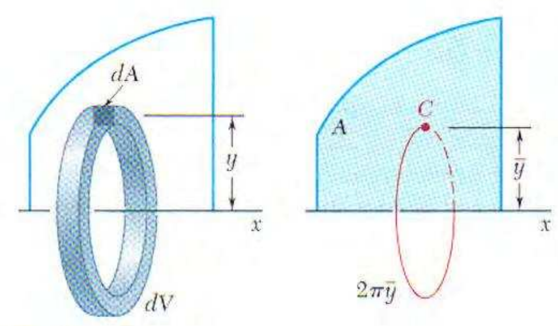


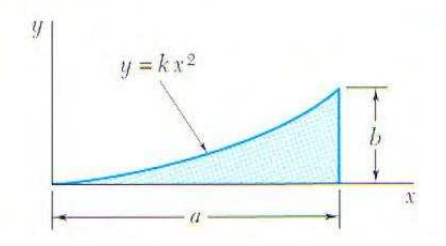
Figura 5.16

el elemento dA es igual a $2\pi y\, dA$. Por tanto, el volumen total generado por A es $V = \int 2\pi y\, dA$ y, puesto que la integral $\int y\, dA$ es igual a $\overline{y}A$ (sección 5.3), se tiene

$$V = 2\pi\overline{y}A \tag{5.11}$$

donde $2\pi\overline{y}$ es la distancia recorrida por el centroide de A. Es importante señalar que el teorema no puede aplicarse si el eje de rotación interseca al área generatriz.

Los teoremas de Pappus-Guldinus proporcionan una forma sencilla de calcular las áreas de superficies de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución. En forma inversa, estos teoremas se emplean para determinar el centroide de una curva plana cuando el área de la superficie generada por la curva es conocida o para determinar el centroide de un área plana cuando el volumen del cuerpo generado por el área es conocido (véase el problema resuelto 5.8).



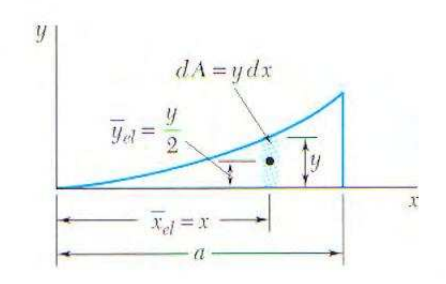
PROBLEMA RESUELTO 5.4

Determine por integración directa la localización del centroide de una enjuta parabólica.

SOLUCIÓN

Determinación de la constante k. El valor de k se determina sustituyendo $x = a$ y $y = b$ en la ecuación dada. Se tiene $b = ka^2$ o $k = b/a^2$. Por tanto, la ecuación de la curva es

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$



Elemento diferencial vertical. Se selecciona el elemento diferencial mostrado y se determina el área total de la figura.

$$A = \int dA = \int y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al eje y es $\bar{x}_{el}\,dA$; por tanto, el primer momento de toda el área con respecto a dicho eje es

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\,dA = \int xy\,dx = \int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2b}{4}$$

Como $Q_y = \bar{x}A$, se tiene que

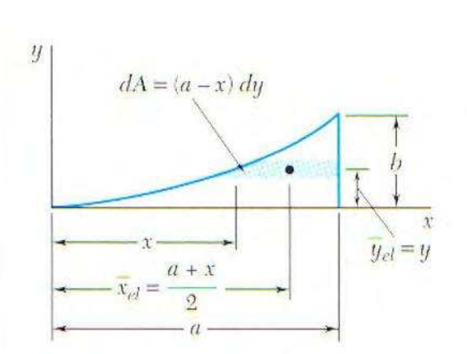
$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA \qquad \bar{x}\frac{ab}{3} = \frac{a^2b}{4} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}a \blacktriangleleft$$

De la misma forma, el primer momento del elemento diferencial con respecto al eje x es $\bar{y}_{el}\,dA$ y el primer momento de toda el área es

$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\,dA = \int \frac{y}{2}y\,dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx = \left[\frac{b^2}{2a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

Como $Q_x = \bar{y}A$, se tiene que

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA \qquad \bar{y}\frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \qquad \bar{y} = \tfrac{3}{10}b \blacktriangleleft$$



Elemento diferencial horizontal. Se pueden obtener los mismos resultados considerando un elemento horizontal. Los primeros momentos del área son

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\,dA = \int \frac{a + x}{2}(a - x)\,dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2}\,dy$$

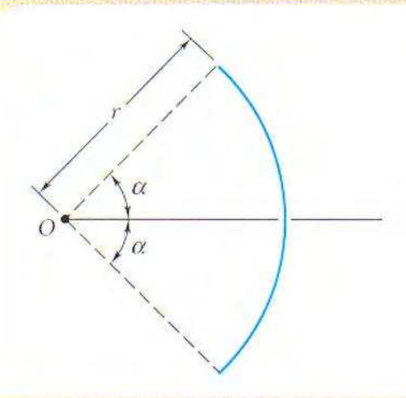
$$= \frac{1}{2}\int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b}y\right)dy = \frac{a^2b}{4}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el}\,dA = \int y(a - x)\,dy = \int y\left(a - \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}\right)dy$$

$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}}y^{3/2}\right)dy = \frac{ab^2}{10}$$

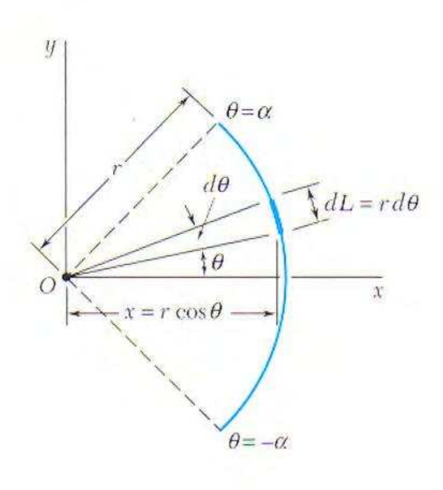
Para determinar $\bar{x}$ y $\bar{y}$, las expresiones obtenidas se sustituyen nuevamente en las ecuaciones que definen el centroide del área.

PROBLEMA RESUELTO 5.5



Determine la ubicación del centroide del arco mostrado.

SOLUCIÓN



Como el arco es simétrico con respecto al eje x, $\bar{y} = 0$. Se selecciona un elemento diferencial, como se muestra en la figura, y se determina la longitud del arco por integración.

$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r\, d\theta = r \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = 2r\alpha$$

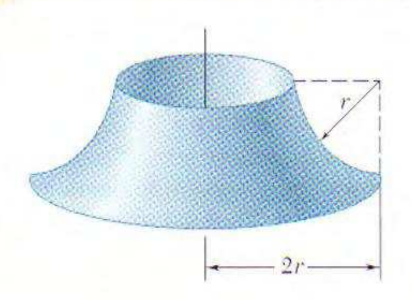
El primer momento del arco con respecto al eje y es

$$Q_y = \int x\, dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \theta)(r\, d\theta) = r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta\, d\theta$$
$$= r^2[\text{sen } \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = 2r^2 \text{ sen } \alpha$$

Como $Q_y = \bar{x}L$, se escribe

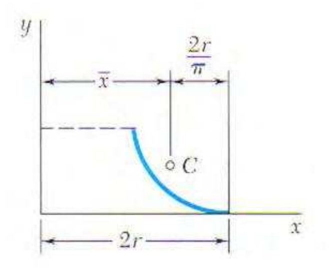
$$\bar{x}(2r\alpha) = 2r^2 \text{ sen } \alpha \qquad \bar{x} = \frac{r \text{ sen } \alpha}{\alpha} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 5.6



Determine el área de la superficie de revolución mostrada en la figura, la cual se obtiene rotando un cuarto de arco circular con respecto a un eje vertical.

SOLUCIÓN

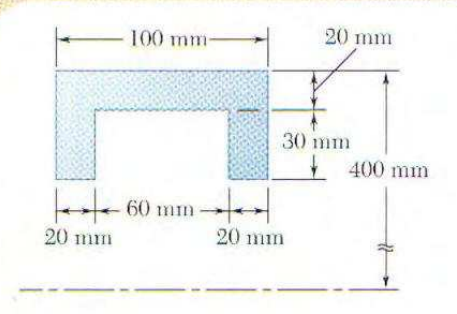


De acuerdo con el teorema I de Pappus-Guldinus, el área generada es igual al producto de la longitud del arco y la distancia recorrida por su centroide. Refiriéndose a la figura 5.8B, se tiene que

$$\bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$$

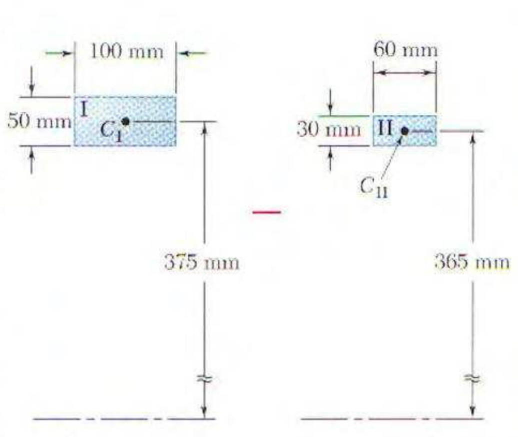
$$A = 2\pi\bar{x}L = 2\pi\left[2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\right]\left(\frac{\pi r}{2}\right)$$

$$A = 2\pi r^2(\pi - 1) \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 5.7

El diámetro exterior de una polea es 0.8 m y la sección transversal de su corona es como se muestra en la figura. Se sabe que la polea está hecha de acero y que la densidad de dicho material es $\rho = 7.85 \times 10^3$ kg/m^3, determine la masa y el peso de la corona.



SOLUCIÓN

El volumen de la corona se puede encontrar con el teorema II de Pappus-Guldinus, el cual establece que el volumen es igual al producto del área de la sección transversal dada por la distancia recorrida por su centroide en una revolución completa. Sin embargo, el volumen se puede determinar más fácilmente si se observa que la sección transversal se puede transformar a partir del rectángulo I, cuya área es positiva y del rectángulo II, cuya área es negativa.

	Área, mm^2	$\bar{y}$, mm	Distancia viajada por C, mm	Volumen, mm^3
I	+5 000	375	$2\pi(375) = 2\,356$	$(5\,000)(2\,356) = 11.78 \times 10^6$
II	−1 800	365	$2\pi(365) = 2\,293$	$(-1\,800)(2\,293) = -4.13 \times 10^6$
				Volumen de la corona $= 7.65 \times 10^6$

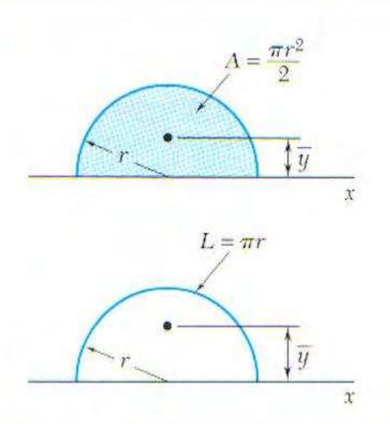
Como 1 mm $= 10^{-3}$ m, se tiene que 1 mm$^3 = (10^{-3}\text{ m})^3 = 10^{-9}$ m^3, y se obtiene $V = 7.65 \times 10^6$ mm$^3 = (7.65 \times 10^6)(10^{-9}\text{ m}^3) = 7.65 \times 10^{-3}$ m^3.

$$m = \rho V = (7.85 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(7.65 \times 10^{-3}\text{ m}^3) \qquad m = 60.0\text{ kg} \blacktriangleleft$$

$$W = mg = (60.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 589\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 \qquad W = 589\text{ N} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 5.8

Con los teoremas de Pappus-Guldinus, determine: *a*) el centroide de un área semicircular y *b*) el centroide de un arco semicircular. Se debe recordar que el volumen y el área superficial de una esfera son, respectivamente, $\frac{4}{3}\pi r^3$ y $4\pi r^2$.



SOLUCIÓN

El volumen de una esfera es igual al producto del área de un semicírculo y la distancia recorrida por el centroide del semicírculo en una revolución alrededor del eje x.

$$V = 2\pi\bar{y}A \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}(\tfrac{1}{2}\pi r^2) \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \blacktriangleleft$$

De la misma forma, el área superficial de una esfera es igual al producto de la longitud del semicírculo generatriz por la distancia recorrida por su centroide en una revolución.

$$A = 2\pi\bar{y}L \qquad 4\pi r^2 = 2\pi\bar{y}(\pi r) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{\pi} \blacktriangleleft$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se usarán las ecuaciones

$$\bar{x}A = \int x \, dA \qquad \bar{y}A = \int y \, dA \qquad (5.3)$$

$$\bar{x}L = \int x \, dL \qquad \bar{y}L = \int y \, dL \qquad (5.4)$$

para localizar, respectivamente, los centroides de áreas y líneas planas. Además, se aplicarán los teoremas de Pappus-Guldinus (sección 5.7) para determinar las áreas de superficie de revolución y los volúmenes de cuerpos de revolución.

1. *Determinación de los centroides de áreas y líneas por integración directa.* Cuando se resuelven problemas de este tipo, se debe seguir el método de solución mostrado en los problemas resueltos 5.4 y 5.5: calcular A o L, determinar los primeros momentos del área o de la línea y resolver las ecuaciones (5.3) o (5.4) para las coordenadas del centroide. Además, se debe poner atención especial en los siguientes puntos.

a) La solución se inicia con la definición o determinación cuidadosa de cada término en las integrales de las fórmulas aplicables. Es bastante recomendable mostrar en el esquema del área o de la línea dada la elección que se ha hecho para dA o para dL y las distancias a su centroide.

b) Como se explicó en la sección 5.6, la x y la y en las ecuaciones anteriores representan las *coordenadas del centroide* de los elementos diferenciales dA y dL. Es importante reconocer que las coordenadas del centroide de dA no son iguales a las coordenadas de un punto localizado sobre la curva que limita al área en consideración. Se debe estudiar con detalle la figura 5.12 hasta que se comprenda en forma cabal este punto que es tan importante.

c) Para tratar de simplificar o minimizar los cálculos, siempre se debe examinar la forma del área o de la línea dada antes de definir el elemento diferencial que se utilizará. Por ejemplo, algunas veces es preferible utilizar elementos rectangulares que sean horizontales en lugar de verticales. Por lo general es mejor emplear coordenadas polares cuando una línea o un área tienen simetría circular.

d) A pesar de que la mayoría de las integraciones en esta lección son sencillas, en algunas ocasiones es posible que se tengan que utilizar técnicas más avanzadas como la sustitución trigonométrica o la integración por partes. Por supuesto, emplear una tabla de integrales es el método más rápido para evaluar integrales difíciles.

2. *Aplicación de los teoremas de Pappus-Guldinus.* Como se mostró en los problemas resueltos 5.6 al 5.8, estos teoremas, que son simples pero muy útiles, permiten aplicar el conocimiento sobre centroides para el cálculo de áreas y volúmenes. A pesar de que los teoremas hacen referencia a la distancia recorrida por el centroide y a la longitud de la curva generatriz o del área generatriz, las ecuaciones resultantes [ecuaciones (5.10) y (5.11)] contienen los productos de estas cantidades, los cuales son simplemente los primeros momentos de una línea ($\bar{y}L$) y de un área ($\bar{y}A$), respectivamente. Por tanto, para aquellos problemas en los cuales la línea o el área generatriz consista de más de una forma común, sólo se necesita determinar $\bar{y}L$ o $\bar{y}A$; de esta manera, no se tiene que calcular la longitud de la curva generatriz o el área generatriz.

Problemas

5.34 a 5.36 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras. Exprese la respuesta en términos de a y h.

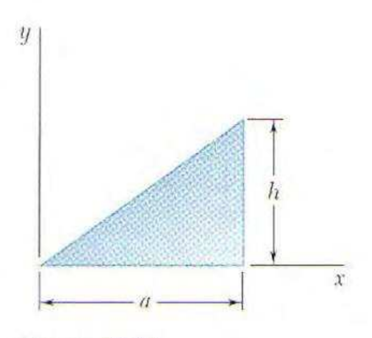


Figura P5.34

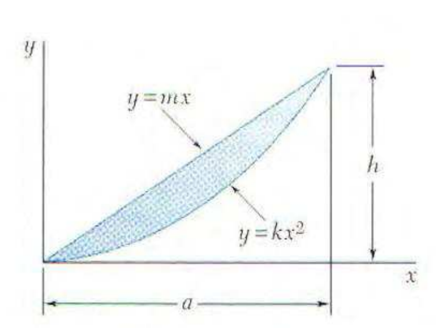


Figura P5.35

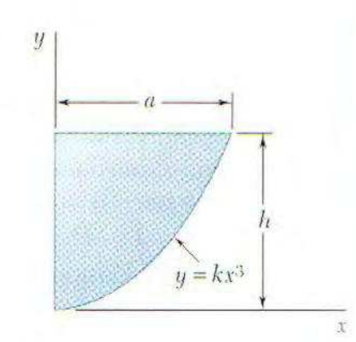


Figura *P5.36*

5.37 a 5.39 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en cada figura.

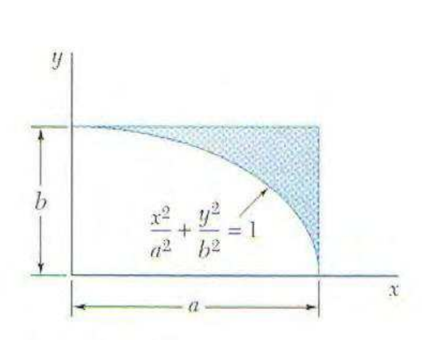


Figura P5.37

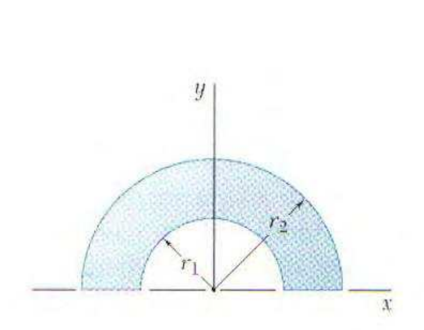


Figura *P5.38*

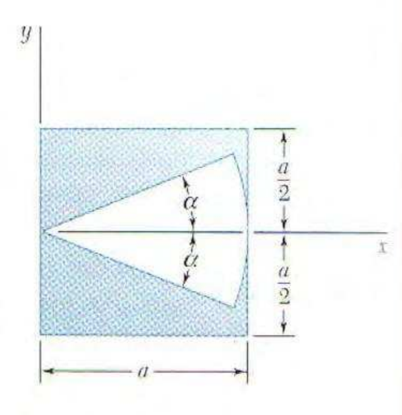


Figura P5.39

5.40 y 5.41 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras. Exprese la respuesta en términos de a y b.

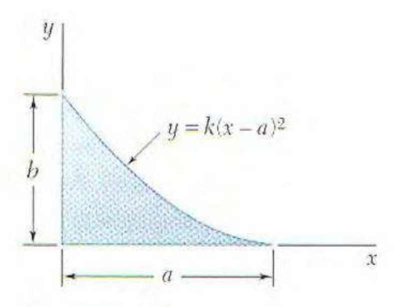


Figura P5.40

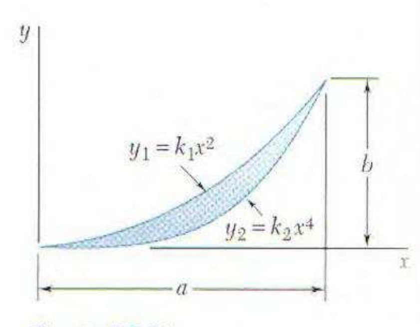


Figura P5.41

5.42 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura.

5.43 y 5.44 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras. Exprese la respuesta en términos de a y b.

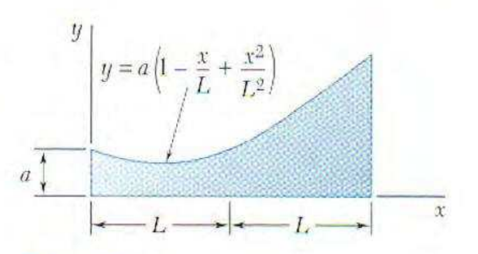


Figura P5.42

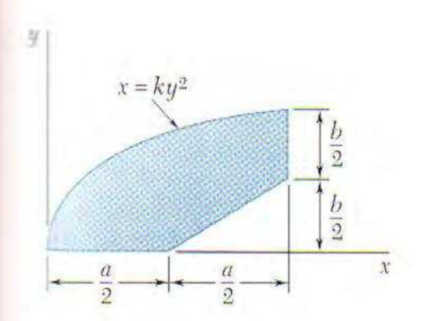


Figura *P5.43*

Figura P5.44

5.45 y 5.46 Un alambre homogéneo se dobla en la forma mostrada. Determine por integración directa la coordenada x de su centroide.

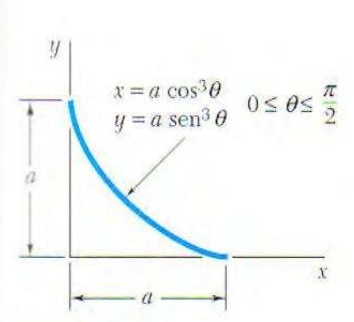


Figura P5.45

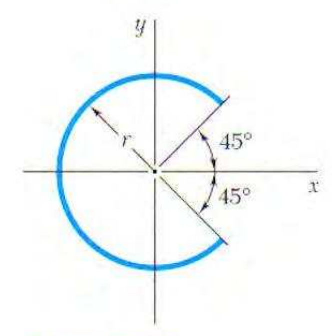


Figura P5.46

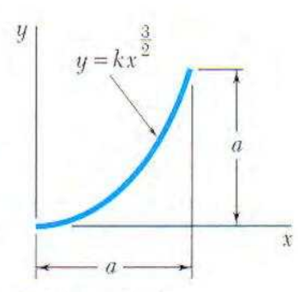


Figura *P5.47*

***5.47** Un alambre homogéneo se dobla en la forma mostrada. Determine por integración directa la coordenada x de su centroide. Exprese la respuesta en términos de a.

***5.48 y *5.49** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras.

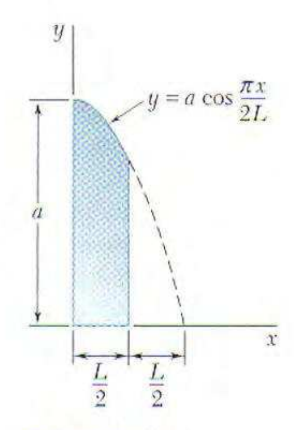


Figura P5.48

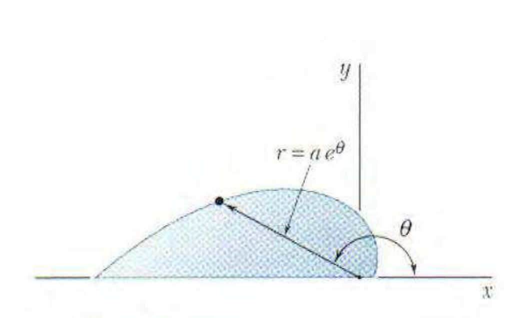


Figura P5.49

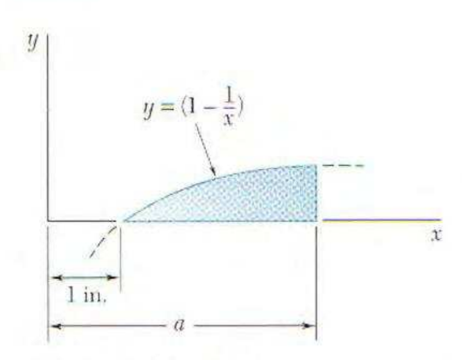


Figura P5.50 y P5.51

5.50 Determine el centroide del área mostrada en la figura cuando $a = 2$ in.

5.51 Determine el valor de a para el que la relación $\overline{x}/\overline{y}$ es igual a 9.

5.52 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.1 alrededor de *a*) la línea $x = 240$ mm y *b*) el eje y.

5.53 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.2 alrededor de *a*) la línea $y = 60$ mm y *b*) el eje y.

5.54 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se obtiene al rotar el área del problema 5.8 alrededor de *a*) el eje x y *b*) el eje y.

5.55 Determine el volumen del sólido que se genera al rotar el área parabólica mostrada en la figura alrededor de *a*) el eje x, *b*) el eje AA'.

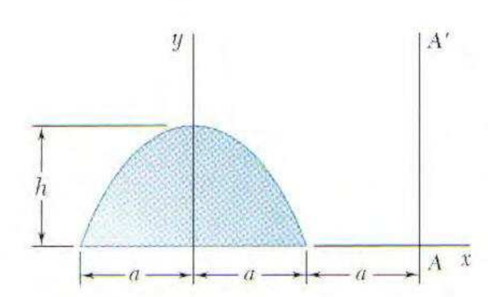


Figura *P5.55*

5.56 Si $R = 10$ mm y $L = 30$ mm, determine el volumen y el área de la superficie del eslabón de cadena que se muestra en la figura, el cual está hecho de una barra de 6 mm de diámetro.

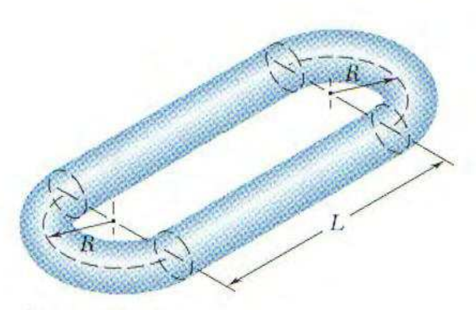


Figura P5.56

5.57 Verifique que las expresiones para los volúmenes de los primeros cuatro perfiles en la figura 5.21 son correctas.

5.58 Un agujero de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro se taladra en una pieza de acero de 1 in. de espesor, y después se avellana como se muestra en la figura. Determine el volumen de acero removido durante el proceso de avellanado.

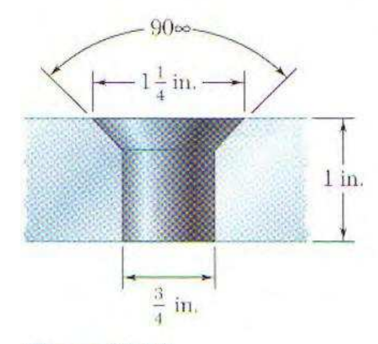


Figura P5.58

5.59 Determine la capacidad en litros de la ponchera que se muestra en la figura si $R = 250$ mm.

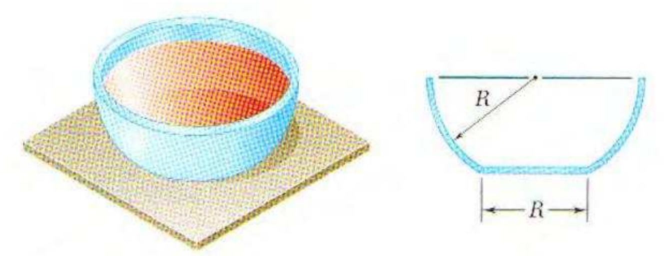


Figura P5.59

5.60 Tres perfiles diferentes de bandas motrices se someten a un estudio. Si en cualquier momento cada una de las bandas hace contacto con la mitad de la circunferencia de su polea, determine el *área de contacto* entre la banda y la polea para cada diseño.

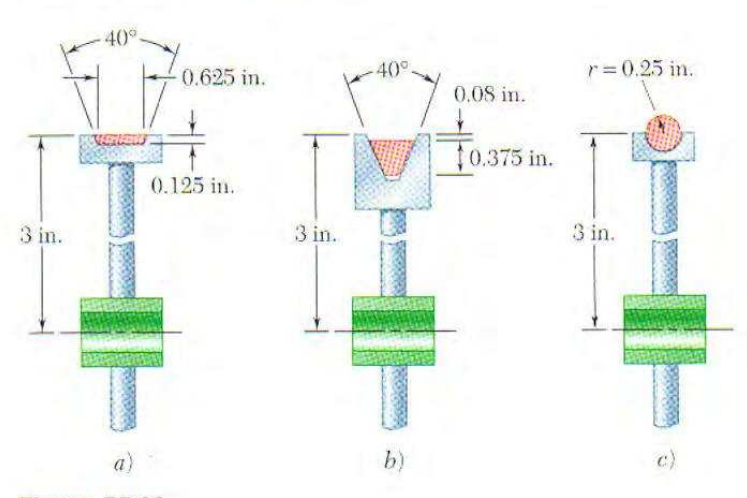


Figura *P5.60*

5.61 El reflector de aluminio de una pequeña lámpara de alta intensidad tiene un espesor uniforme de 1 mm. Si se sabe que la densidad del aluminio es de 2 800 kg/m^3, determine la masa del reflector.

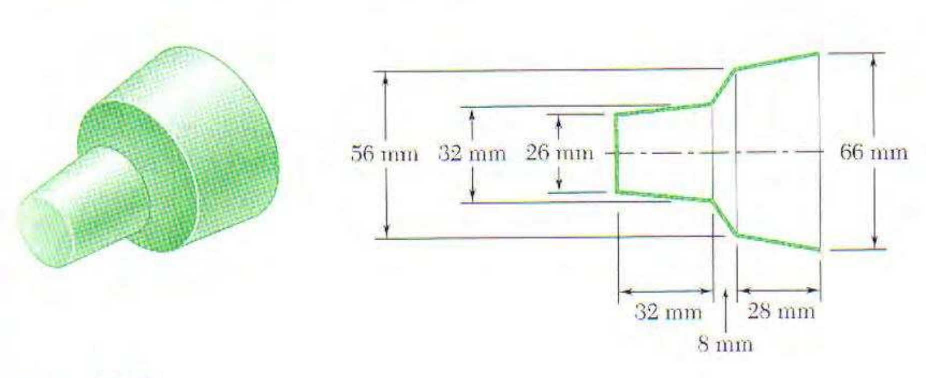


Figura P5.61

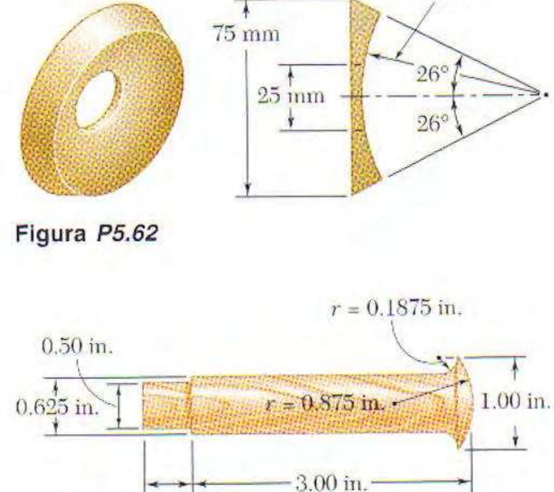


Figura *P5.62*

5.62 El escudete (que es una placa decorativa colocada sobre la parte de la tubería que sale de una pared) está moldeado en latón como se muestra en la figura. Si se sabe que la densidad del latón es de 8 470 kg/m^3, determine el peso del escudete.

5.63 Un fabricante planea producir 20 000 clavijas de madera que tienen la forma mostrada en la figura. Determine cuántos galones de pintura debe comprar, si se sabe que cada clavija recibirá dos manos de pintura y que un galón de pintura cubre 100 ft^2.

5.64 La clavija de madera que se muestra en la figura se tornea a partir de una pieza con 1 in. de diámetro y 4 in. de longitud. Determine el porcentaje del volumen de la pieza inicial que se convierte en desperdicio.

$r = 0.1875$ in.
0.50 in.
0.625 in.
$r = 0.875$ in.
1.00 in.
3.00 in.
0.50 in.

Figura P5.63 y P5.64

***5.65** El reflector de una luz montada en la pared se forma a partir de una hoja delgada de plástico traslúcido. Determine el área de la superficie exterior del reflector, si se sabe que tiene la sección transversal parabólica que se muestra en la figura.

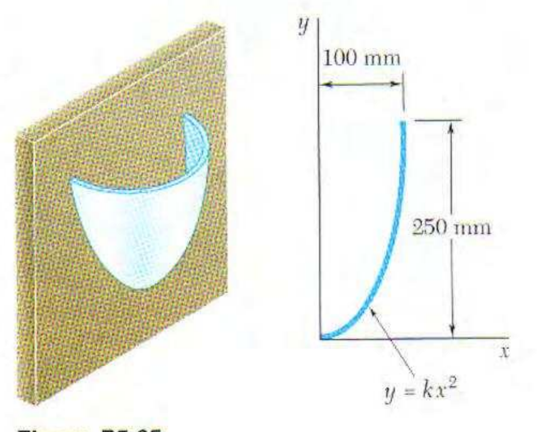


Figura *P5.65*

*5.8. CARGAS DISTRIBUIDAS EN VIGAS

El concepto del centroide de un área puede utilizarse para resolver otros problemas distintos a los relacionados con los pesos de placas planas. Por ejemplo, considérese una viga que soporta una *carga distribuida*; esta carga puede estar constituida por el peso de los materiales soportados directa o indirectamente por la viga o puede ser ocasionada por el viento o por una presión hidrostática. La carga distribuida puede representarse al graficar la carga w soportada por unidad de longitud (figura 5.17); esta carga está expresada en N/m o en lb/ft. La magnitud de la fuerza ejercida sobre un elemento de viga de longitud dx es $dW = w\,dx$, y la carga total soportada por la viga es

$$W = \int_0^L w\,dx$$

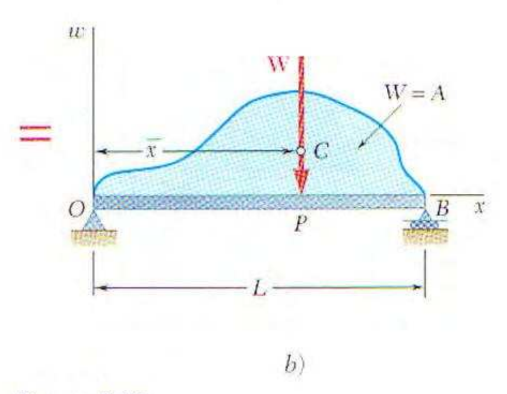


Figura 5.17

Se observa que el producto $w\,dx$ es igual en magnitud al elemento de área dA mostrado en la figura 5.17*a*. Por tanto, la carga W es igual en magnitud al área total A bajo la curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

Ahora se procede a determinar dónde debe aplicarse, sobre la viga, *una sola carga concentrada* **W**, de la misma magnitud W que la carga distribuida total, si se deben producir las mismas reacciones en los apoyos (figura 5.17*b*). Sin embargo, debe aclararse que esta carga concentrada **W**, la cual representa la resultante de la carga distribuida dada, es equivalente a esta última sólo cuando se considera el diagrama de cuerpo libre de toda la viga. El punto de aplicación P de la carga concentrada equivalente **W** se obtiene expresando que el momento de **W** con respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de las cargas elementales $d\mathbf{W}$ con respecto a O:

$$(OP)W = \int x\,dW$$

o, como $dW = w\,dx = dA$ y $W = A$,

$$(OP)A = \int_0^L x\,dA \tag{5.12}$$

Puesto que la integral representa el primer momento con respecto al eje w del área bajo la curva de carga, ésta puede ser reemplazada por el producto $\bar{x}A$. Por tanto, se tiene que $OP = \bar{x}$, donde $\bar{x}$ es la distancia desde el eje w hasta el centroide C del área A (nótese que dicho centroide *no* es el centroide de la viga).

En este sentido, una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una carga concentrada, la magnitud de dicha carga es igual al área bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Sin embargo, se debe señalar que la carga concentrada es equivalente a la carga distribuida dada sólo en lo que respecta a las fuerzas externas. Esta carga concentrada puede utilizarse para determinar reacciones pero no debe ser empleada para calcular fuerzas internas y deflexiones.



Fotografía 5.3 Los techos de las construcciones que se muestran en la fotografía pueden ser capaces de soportar no sólo el peso de la nieve, sino también las cargas distribuidas no simétricas causadas por el amontonamiento de la nieve.

*5.9. FUERZAS SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

El procedimiento usado en la sección anterior puede emplearse para determinar la resultante de las fuerzas de presión hidrostática ejercidas sobre una *superficie rectangular* sumergida en un líquido. Considérese la placa rectangular mostrada en la figura 5.18, la cual tiene una longitud L y un ancho b, donde b se mide perpendicular al plano de la figura. Como se señaló en la sección 5.8, la carga ejercida sobre un elemento de la placa de longitud dx es $w\,dx$, donde w es la carga por unidad de longitud. Sin embargo, esta carga también puede expresarse como $p\,dA = pb\,dx$, donde p es la presión manométrica en el líquido[†] y b es el ancho de la placa; por tanto, $w = bp$. Como la presión manométrica en un líquido es $p = \gamma h$, donde γ es el peso específico del líquido y h es la distancia vertical a partir de la superficie libre, se concluye que

$$w = bp = b\gamma h \tag{5.13}$$

lo cual demuestra que la carga por unidad de longitud w es proporcional a h y, por tanto, varía linealmente con x.

De acuerdo con los resultados de la sección 5.8, se observa que la resultante **R** de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre un lado de la placa es igual en magnitud al área trapezoidal bajo la curva de carga y su línea de acción pasa a través del centroide C de dicha área. El punto P de la placa donde se aplica **R** se conoce como el *centro de presión*.[‡]

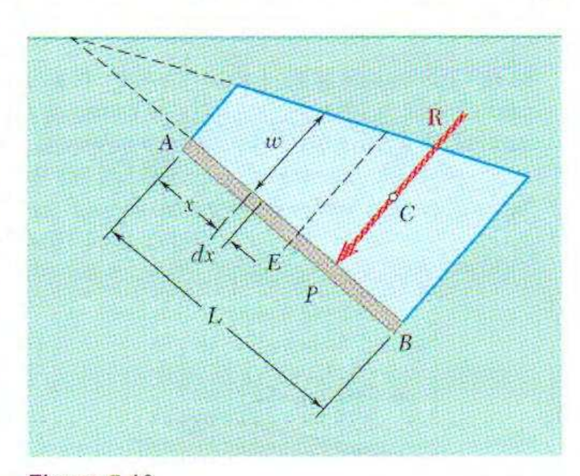
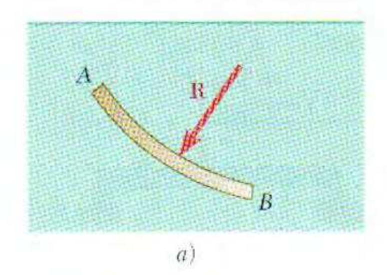
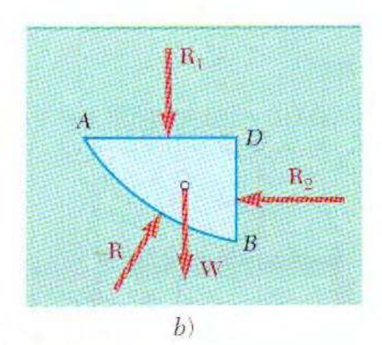


Figura 5.18

A continuación se consideran las fuerzas ejercidas por un líquido sobre una superficie curva de ancho constante (figura 5.19*a*). Como la determinación por integración directa de la resultante **R** de dichas fuerzas podría no ser fácil, se considera el cuerpo libre obtenido por la separación del volumen de líquido ABD el cual está limitado por la superficie curva AB y por las dos superficies planas AD y DB como se muestra en la figura 5.19*b*. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre ABD son el peso **W** del volumen de líquido separado, la resultante $\mathbf{R}_1$ de las fuerzas ejercidas sobre AD, la resultante $\mathbf{R}_2$ de las fuerzas ejercidas sobre BD y la resultante $-\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas *por la superficie curva sobre el líquido*. La resultante $-\mathbf{R}$ es igual y opuesta y tiene la misma línea de acción que la resultante **R** de las fuerzas ejercidas *por el líquido sobre la superficie curva*. Las fuerzas **W**, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ se pueden determinar mediante los métodos convencionales; una vez que se han encontrado estos valores, la fuerza $-\mathbf{R}$ se obtiene al resolver las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre de la figura 5.19*b*. Entonces la resultante **R** de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre la superficie curva se obtienen invirtiendo el sentido de $-\mathbf{R}$.



a)



b)

Figura 5.19

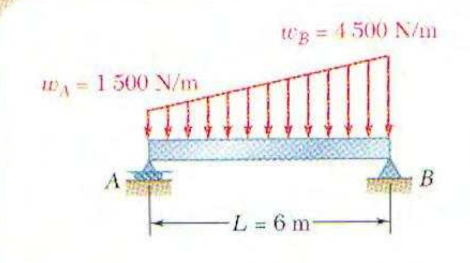
Los métodos presentados en esta sección pueden emplearse para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre las superficies de presas y de compuertas rectangulares y álabes. Las resultantes de las fuerzas que actúan sobre superficies sumergidas de ancho variable se determinarán en el capítulo 9.

[†] La presión p, la cual representa una carga por unidad de área, se expresa en N/m^2 o en lb/ft^2. La unidad derivada del SI N/m^2 recibe el nombre de *pascal* (Pa).

[‡] Observe que el área bajo la curva de carga es igual a $w_E L$, donde w_E es la carga por unidad de longitud en el centro E de la placa y de acuerdo con la ecuación (5.13), se puede escribir

$$R = w_E L = (bp_E)L = p_E(bL) = p_E A$$

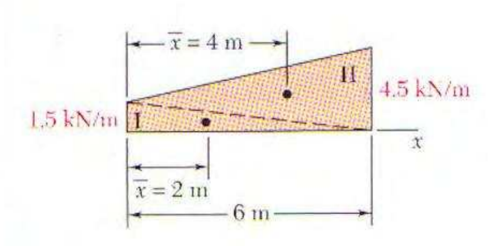
donde A representa el área de la *placa*. Por tanto, se puede obtener la magnitud de **R** si se multiplica el área de la placa por la presión en su centro E. Sin embargo, la resultante **R** *debe ser aplicada en P, no en E.*



PROBLEMA RESUELTO 5.9

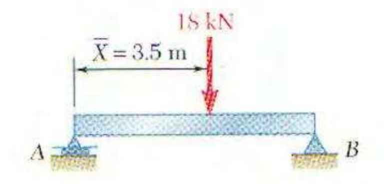
Una viga soporta una carga distribuida como lo muestra la figura; *a*) determine la carga concentrada equivalente y *b*) determine las reacciones en los apoyos.

SOLUCIÓN



***a*) Carga concentrada equivalente.** La magnitud de la resultante de la carga es igual al área bajo la curva de carga y la línea de acción de la resultante pasa a través del centroide de dicha área. Se divide el área bajo la curva de carga en dos triángulos y se construye la tabla que se presenta a continuación. Para simplificar los cálculos y la tabulación, las cargas por unidad de longitud dadas se han convertido a kN/m.

Componente	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Triángulo I	4.5	2	9
Triángulo II	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$



Por tanto, $\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$: $\quad \bar{X}(18 \text{ kN}) = 63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \bar{X} = 3.5 \text{ m}$

La carga concentrada equivalente es

$$\mathbf{W} = 18 \text{ kN} \downarrow \quad ◀$$

y su línea de acción está localizada a una distancia

$$\bar{X} = 3.5 \text{ m a la derecha de } A \quad ◀$$

***b*) Reacciones.** La reacción en A es vertical y se representa con $\mathbf{A}$; la reacción en B está representada por sus componentes $\mathbf{B}_x$ y $\mathbf{B}_y$. Como se muestra en la figura, la carga dada se puede considerar como la suma de dos cargas triangulares. La resultante de cada carga triangular es igual al área del triángulo y actúa en su centroide. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre mostrado:

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\qquad \mathbf{B}_x = 0 \quad ◀$

$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0$: $\qquad -(4.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (13.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + B_y(6 \text{ m}) = 0$

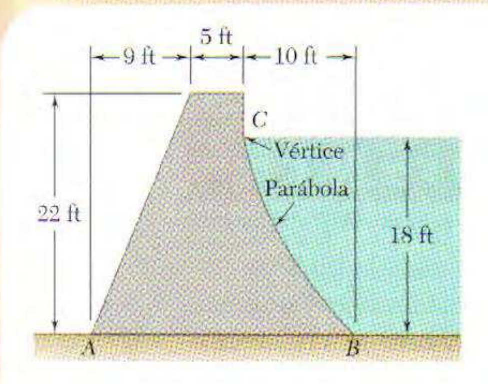
$$\mathbf{B}_y = 10.5 \text{ kN} \uparrow \quad ◀$$

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $\qquad +(4.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (13.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - A(6 \text{ m}) = 0$

$$\mathbf{A} = 7.5 \text{ kN} \uparrow \quad ◀$$

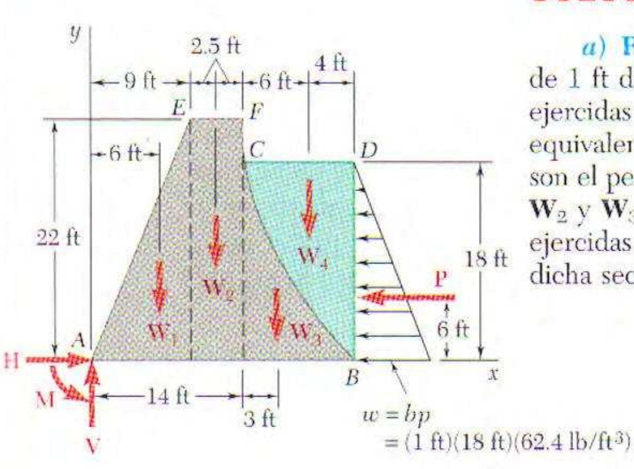
Solución alternativa. La carga distribuida dada se puede reemplazar por su resultante, la cual se determinó en la parte *a*. Las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$. De nuevo se obtiene

$$\mathbf{B}_x = 0 \qquad \mathbf{B}_y = 10.5 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{A} = 7.5 \text{ kN} \uparrow \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 5.10

La sección transversal de una presa de concreto es como se muestra en la figura. Considere una sección de la presa de 1 ft de espesor y determine: *a*) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* de la presa y *b*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BC* de la presa. Los pesos específicos del concreto y del agua son, respectivamente, 150 lb/ft^3 y 62.4 lb/ft^3.



SOLUCIÓN

a) **Reacción del suelo.** Se selecciona como cuerpo libre la sección de 1 ft de espesor *AEFCDB* de la presa y el agua. Las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* están representadas por un sistema equivalente fuerza-par en *A*. Otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la presa, representado con los pesos de sus componentes $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_3$; el peso del agua $\mathbf{W}_4$ y la resultante $\mathbf{P}$ de las fuerzas de presión ejercidas sobre la sección *BD* por el agua que se encuentra a la derecha de dicha sección. Así se tiene

$$W_1 = \tfrac{1}{2}(9 \text{ ft})(22 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 14\,850 \text{ lb}$$
$$W_2 = (5 \text{ ft})(22 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 16\,500 \text{ lb}$$
$$W_3 = \tfrac{1}{3}(10 \text{ ft})(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 9\,000 \text{ lb}$$
$$W_4 = \tfrac{2}{3}(10 \text{ ft})(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 7\,488 \text{ lb}$$
$$P = \tfrac{1}{2}(18 \text{ ft})(1 \text{ ft})(18 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 10\,109 \text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad H - 10\,109 \text{ lb} = 0 \qquad \mathbf{H} = 10\,110 \text{ lb} \rightarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V - 14\,850 \text{ lb} - 16\,500 \text{ lb} - 9\,000 \text{ lb} - 7\,488 \text{ lb} = 0$$

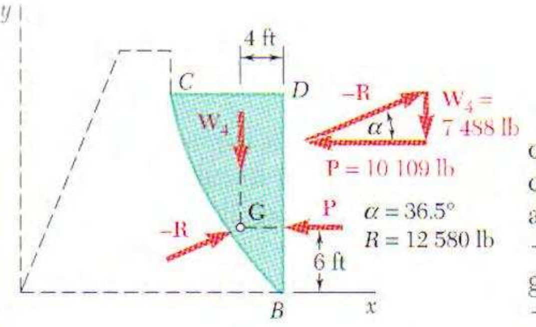
$$\mathbf{V} = 47\,840 \text{ lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad -(14\,850 \text{ lb})(6 \text{ ft}) - (16\,500 \text{ lb})(11.5 \text{ ft}) - (9\,000 \text{ lb})(17 \text{ ft}) - (7\,488 \text{ lb})(20 \text{ ft}) + (10\,109 \text{ lb})(6 \text{ ft}) + M = 0$$

$$\mathbf{M} = 520\,960 \text{ lb} \cdot \text{ft} \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

Se puede reemplazar el sistema fuerza-par obtenido por una fuerza que actúa a una distancia *d* a la derecha de *A*, donde

$$d = \frac{520\,960 \text{ lb} \cdot \text{ft}}{47\,840 \text{ lb}} = 10.89 \text{ ft}$$



b) **Resultante R de las fuerzas ejercidas por el agua.** Se elige como cuerpo libre la sección parabólica de agua *BCD*. Las fuerzas involucradas son la resultante $-\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas por la presa sobre el agua, el peso $\mathbf{W}_4$ y la fuerza $\mathbf{P}$. Como estas fuerzas deben ser concurrentes, $-\mathbf{R}$ pasa a través del punto de intersección *G* de $\mathbf{W}_4$ y $\mathbf{P}$. Se dibuja un triángulo de fuerzas a partir del cual se determinan la magnitud y la dirección de $-\mathbf{R}$. La resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la cara *BC* es igual y opuesta:

$$\mathbf{R} = 12\,580 \text{ lb} \measuredangle 36.5° \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Los problemas en esta lección involucran dos tipos de cargas comunes muy importantes: cargas distribuidas sobre vigas y fuerzas sobre superficies sumergidas de ancho constante. Como se estudió en las secciones 5.8 y 5.9 y se ilustró en los problemas resueltos 5.9 y 5.10, la determinación de la fuerza equivalente única para cada una de estas cargas requiere conocimiento sobre centroides.

*1. **Análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas.*** En la sección 5.8 se demostró que una carga distribuida que actúa sobre una viga puede reemplazarse por una fuerza equivalente. La magnitud de dicha fuerza es igual al área bajo la curva de la carga distribuida y su línea de acción pasa a través del centroide de dicha área. Por tanto, la solución debe comenzar reemplazando las diversas cargas distribuidas que actúan sobre una viga dada, por sus respectivas fuerzas equivalentes. Entonces, las reacciones en los apoyos de la viga pueden determinarse empleando los métodos del capítulo 4.

Cuando sea posible, las cargas distribuidas complejas deben dividirse en áreas que correspondan a las formas comunes mostradas en la figura 5.8A [problema resuelto 5.9]. Entonces, cada una de estas áreas se puede reemplazar por una sola fuerza equivalente. Si así se requiere, el sistema de fuerzas equivalentes puede reducirse aún más a una sola fuerza equivalente. A medida que se estudie el problema resuelto 5.9, observe cómo se ha utilizado la analogía entre fuerza y área y las técnicas para localizar el centroide de áreas compuestas para analizar una viga sujeta a una carga distribuida.

*2. **Resolución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos sumergidos.*** Se deben recordar los siguientes puntos y las siguientes técnicas al momento de resolver problemas de este tipo.

a) La presión p a una profundidad h por debajo de la superficie libre de un líquido es igual a γh o $\rho g h$, donde γ y ρ son, respectivamente, el peso específico y la densidad del líquido. Por tanto, la carga por unidad de longitud w que actúa sobre una superficie sumergida de ancho constante b está dada por

$$w = bp = b\gamma h = b\rho g h$$

b) La línea de acción de la fuerza resultante **R** que actúa sobre una superficie plana sumergida es perpendicular a dicha superficie.

c) Para una superficie rectangular plana vertical o inclinada de ancho b, la carga que actúa sobre la superficie puede representarse por medio de una carga linealmente distribuida que tiene forma trapezoidal (figura 5.18). Además, la magnitud de **R** está dada por

$$R = \gamma h_E A$$

donde h_E es la distancia vertical al centro de la superficie y A es el área de la superficie.

d) En virtud de que la presión del líquido en la superficie libre del mismo es igual a cero, la curva de carga será triangular (en lugar de trapezoidal) cuando el borde superior de una superficie rectangular plana coincida con la superficie libre del líquido. Para este caso, la línea de acción de **R** puede determinarse fácilmente debido a que pasa a través del centroide de una carga distribuida *triangular*.

e) Para el caso general, en lugar de analizar un trapezoide, se sugiere que se use el método señalado en la parte *b* del problema resuelto 5.9. Primero se divide a la carga distribuida trapezoidal en dos triángulos y, entonces, se calcula la magnitud de la resultante de cada carga triangular. (La magnitud es igual al producto del área del triángulo por el ancho de la placa.) Observe que la línea de acción de cada fuerza resultante pasa a través del centroide del triángulo correspondiente y que la suma de dichas fuerzas es equivalente a **R**. Por tanto, en lugar de utilizar **R**, se pueden usar las dos fuerzas resultantes equivalentes cuyos puntos de aplicación pueden determinarse fácilmente. Por supuesto, la ecuación dada para *R* en el párrafo *c* se debe utilizar cuando sólo se necesite conocer la magnitud de **R**.

f) Cuando la superficie sumergida de ancho constante es curva, la fuerza resultante que actúa sobre la superficie se obtiene al considerar el equilibrio del volumen del líquido, limitado por la superficie curva y por planos horizontales y verticales (figura 5.19). Obsérvese que la fuerza $\mathbf{R}_1$ de la figura 5.19 es igual al peso del líquido que se encuentra por encima del plano *AD*. El método de solución para problemas que involucran superficies curvas se muestra en la parte *b* del problema resuelto 5.10.

En los cursos subsecuentes de mecánica (en particular el curso de mecánica de materiales y el curso de mecánica de fluidos) se tendrá una oportunidad amplia de utilizar las ideas presentadas en esta lección.

Problemas

5.66 y 5.67 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine *a*) la magnitud y la localización de la resultante de la carga distribuida y *b*) las reacciones en los apoyos de la viga.

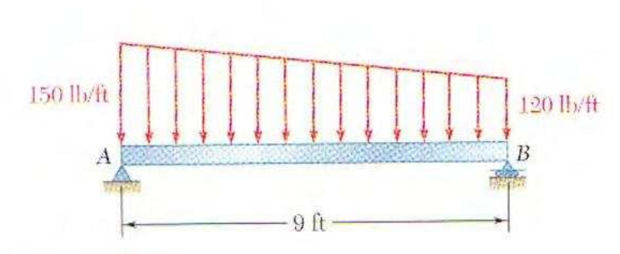


Figura P5.66

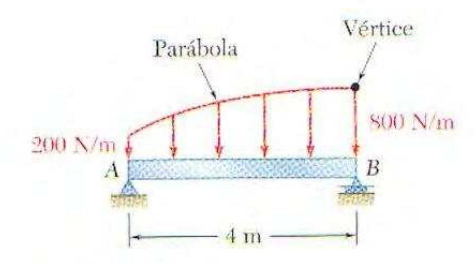


Figura P5.67

5.68 a 5.73 Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de la viga.

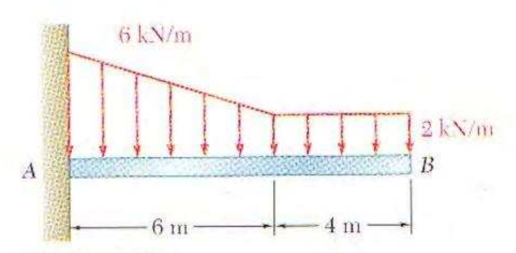


Figura P5.68

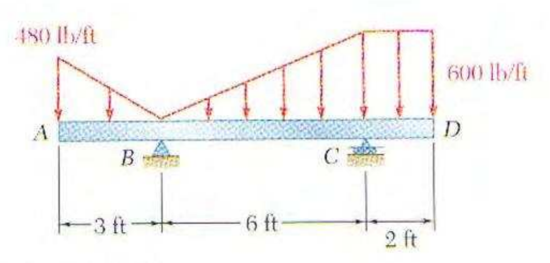


Figura P5.69

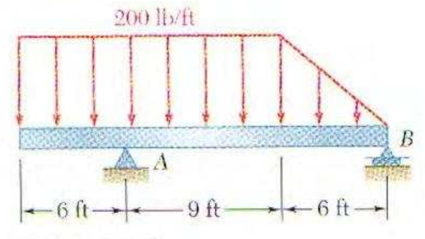


Figura *P5.70*

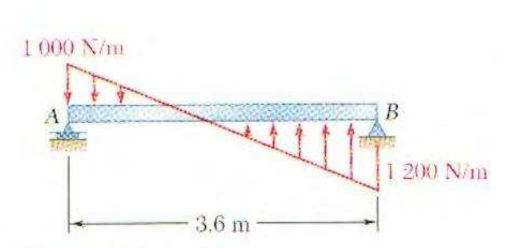


Figura P5.71

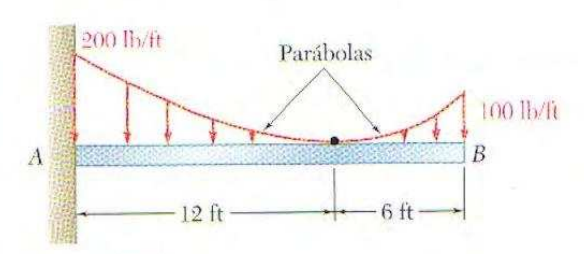


Figura *P5.72*

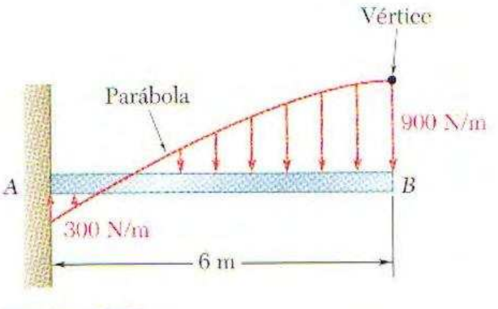


Figura P5.73

5.74 Determine *a*) la distancia *a* tal que las reacciones verticales en los apoyos *A* y *B* sean iguales, *b*) las reacciones correspondientes en los apoyos.

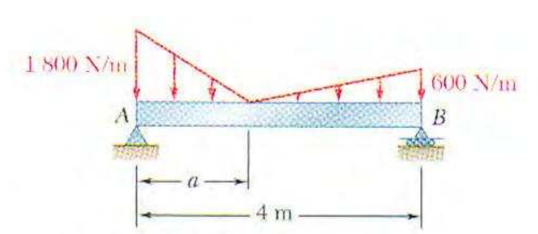


Figura P5.74 y *P5.75*

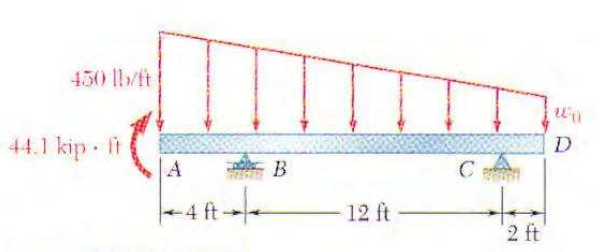


Figura P5.76 y P5.77

5.75 Determine *a*) la distancia *a* tal que la reacción en el apoyo *B* sea mínima, *b*) las reacciones correspondientes en los apoyos.

5.76 Para la carga que se muestra en la figura, determine las reacciones en los apoyos de la viga cuando $w_0 = 150$ lb/ft.

5.77 Determine *a*) la carga distribuida w_0 en el extremo *D* de la viga *ABCD* para la cual la reacción en *B* es cero y *b*) la reacción correspondiente en *C*.

5.78 La viga *AB* soporta dos cargas concentradas y descansa sobre el suelo, el cual ejerce una carga ascendente linealmente distribuida como se muestra en la figura. Determine los valores de w_A y w_B que corresponden a la posición de equilibrio.

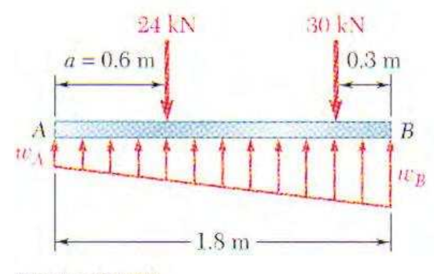


Figura P5.78

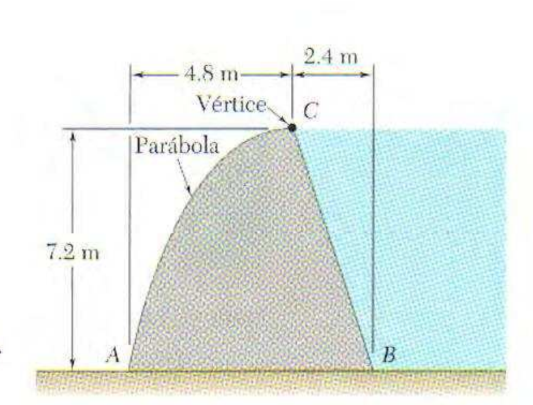
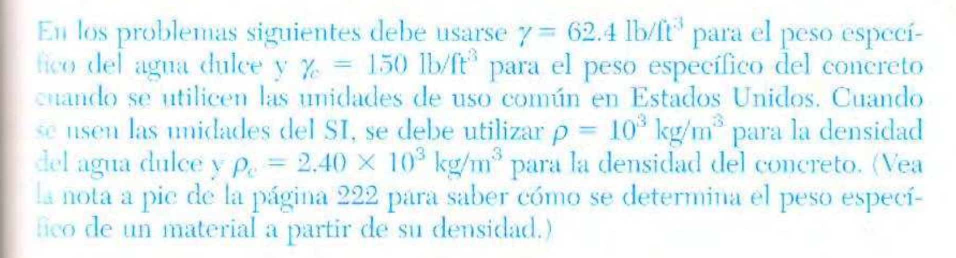


Figura P5.80

5.79 Para la viga y las cargas del problema 5.78, determine *a*) la distancia *a* para la cual $w_A = 20$ kN/m, *b*) el valor correspondiente de w_B.



En los problemas siguientes debe usarse $\gamma = 62.4$ lb/ft^3 para el peso específico del agua dulce y $\gamma_c = 150$ lb/ft^3 para el peso específico del concreto cuando se utilicen las unidades de uso común en Estados Unidos. Cuando se usen las unidades del SI, se debe utilizar $\rho = 10^3$ kg/m^3 para la densidad del agua dulce y $\rho_c = 2.40 \times 10^3$ kg/m^3 para la densidad del concreto. (Vea la nota a pie de la página 222 para saber cómo se determina el peso específico de un material a partir de su densidad.)

5.80 La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de 1 m de ancho, determine *a*) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* del dique, *b*) el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de reacción encontradas en el inciso *a*) y *c*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BC* del dique.

5.81 La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Para una sección del dique de 1 ft de ancho, determine *a*) la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la base *AB* del dique, *b*) el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas de reacción encontradas en el inciso *a*) y *c*) la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara *BC* del dique.

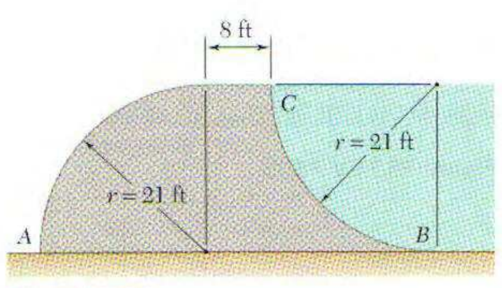


Figura P5.81

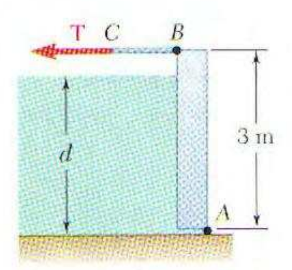


Figura P5.82 y P5.83

5.82 El lado *AB* de un tanque de 3 × 4 m se sostiene mediante bisagras en el fondo *A* y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada *BC*. La fuerza máxima de tensión que la barra puede soportar sin fracturarse es de 200 kN, y las especificaciones de diseño requieren que la fuerza en la barra no exceda 20 por ciento de dicho valor. Si el tanque se llena de agua lentamente, determine la profundidad máxima permisible *d* que puede tener el agua en el tanque.

5.83 Un tanque abierto de 3 × 4 m de lado se sostiene mediante bisagras en el fondo *A* y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada *BC*. El tanque debe llenarse con glicerina, la cual tiene una densidad de 1 263 kg/m^3. Determine la fuerza **T** en la barra y las reacciones en las bisagras una vez que el tanque se llena a una profundidad de 2.9 m.

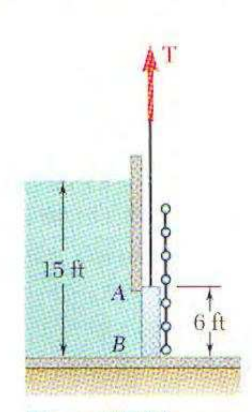


Figura P5.84

5.84 La fuerza de fricción entre la compuerta cuadrada *AB* de 6 × 6 ft y sus guías es igual a 10 por ciento de la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara de la compuerta. Determine la fuerza inicial requerida para levantar la compuerta si ésta pesa 1 000 lb.

5.85 Una marisma de agua dulce drena hacia el océano a través de una compuerta de marea automática que tiene 4 ft de ancho y 3 ft de alto. La compuerta se sostiene mediante bisagras ubicadas a lo largo de su borde superior en *A* y se apoya sobre un tope en *B*. Si el nivel de agua en la marisma es $h = 6$ ft, determine el nivel *d* del océano para el cual la compuerta se abrirá. (El peso específico del agua salada es de 64 lb/ft^3.)

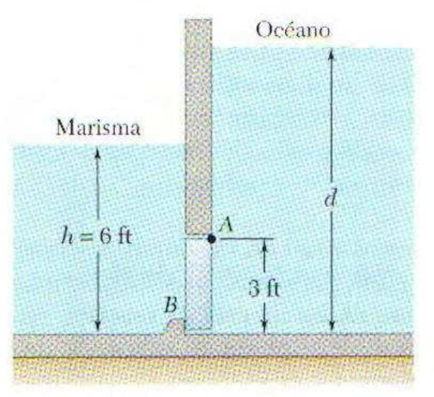


Figura P5.85

5.86 El dique en un lago se diseña para soportar la fuerza adicional producida por el sedimento que se encuentra en el fondo del lago. Si se supone que la densidad del sedimento es equivalente a la de un líquido con densidad $\rho_s = 1.76 \times 10^3$ kg/m^3 y se considera que el ancho del dique es de 1 m, determine el porcentaje de incremento en la fuerza que actúa sobre la cara del dique cuando se tiene una acumulación de sedimento de 2 m de profundidad.

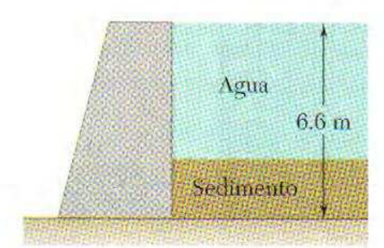


Figura *P5.86* y *P5.87*

5.87 La base del dique para un lago se diseña para soportar hasta el 120 por ciento de la fuerza horizontal ejercida por el agua. Después de su construcción, se descubrió que se está acumulando sedimento (equivalente a un líquido de densidad $\rho_s = 1.76 \times 10^3$ kg/m^3) en el fondo del lago a razón de 12 mm/año. Puesto que el ancho del dique es de 1 m, determine el número de años que deben transcurrir para que el dique se vuelva inseguro.

5.88 Una compuerta AB de 0.5×0.8 m se localiza en la parte inferior de un tanque lleno de agua. La compuerta tiene bisagras a lo largo de su borde superior A y descansa sobre un tope sin fricción en B. Determine las reacciones en A y B cuando el cable BCD se encuentra flojo.

5.89 Una compuerta AB de 0.5×0.8 m se localiza en la parte inferior de un tanque lleno de agua. La compuerta tiene bisagras a lo largo de su borde superior A y descansa sobre un tope sin fricción en B. Determine la tensión mínima requerida en el cable BCD para que la compuerta se abra.

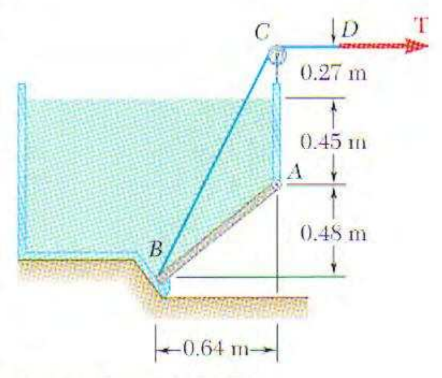


Figura P5.88 y P5.89

5.90 Un canal largo se sostiene mediante una bisagra continua en todo su borde inferior y por medio de una serie de cables horizontales unidos a su borde superior. Determine la tensión, en cada uno de los cables, en el momento que el canal está completamente lleno de agua.

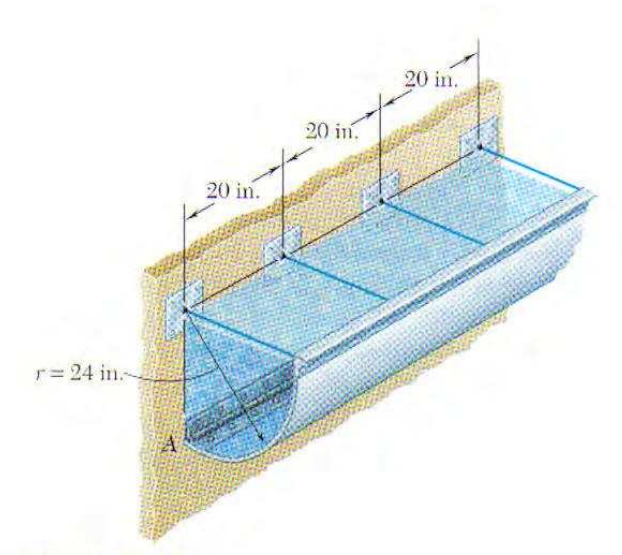


Figura P5.90

5.91 Una compuerta de 4×2 ft está articulada en A y se sostiene en la posición mostrada mediante la barra CD. El extremo D de la barra se apoya sobre un resorte cuya constante es de 828 lb/ft. El resorte está sin deformar cuando la compuerta se encuentra en la posición vertical. Si se supone que la fuerza ejercida sobre la compuerta por la barra CD siempre es horizontal, determine la profundidad mínima d del agua para la cual el fondo B de la compuerta se moverá hacia el extremo de la parte cilíndrica del piso.

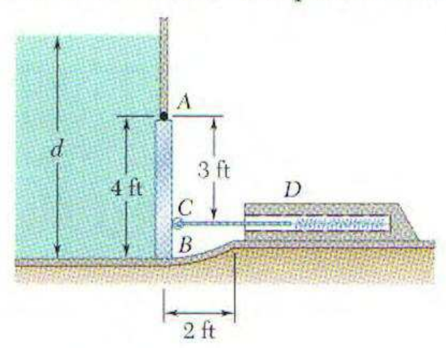


Figura P5.91

5.92 Retome el problema 5.91, y ahora la compuerta pesa 1 000 lb.

5.93 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de prisma, la cual se sujeta por medio de un pasador y una ménsula en A, y descansa sobre un soporte sin fricción en B. El pasador se localiza a una distancia igual $h = 0.10$ m por debajo del centro de gravedad C de la compuerta. Determine la profundidad de agua d para la que se abrirá la compuerta.

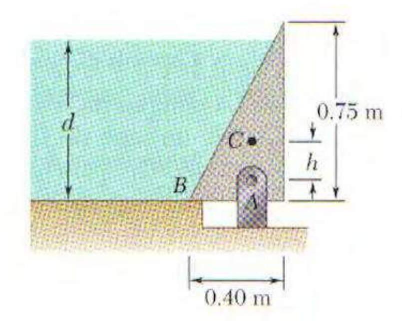


Figura P5.93 y P5.94

5.94 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de prisma, la cual se sujeta por medio de un pasador y una ménsula en A, y descansa sobre un soporte sin fricción en B. Determine la distancia h si la compuerta debe abrirse cuando $d = 0.75$ m.

5.95 Un tonel de 55 galones y 23 pulgadas de diámetro se coloca sobre su costado para actuar como dique en un canal de agua dulce de 30 in. de ancho. Si se sabe que el tonel se ancla a los lados del canal, determine la resultante de las fuerzas de presión que actúan sobre el tonel.

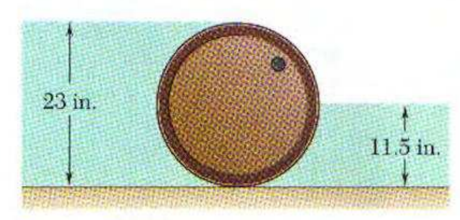


Figura *P5.95*

5.10. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL. CENTROIDE DE UN VOLUMEN

El *centro de gravedad* G de un cuerpo tridimensional se obtiene dividiendo el cuerpo en pequeños elementos y expresando que el peso $\mathbf{W}$ del cuerpo actuando en G es equivalente al sistema de fuerzas distribuidas $\Delta\mathbf{W}$ que representan a los pesos de los elementos pequeños. Al seleccionar al eje y vertical con un sentido positivo hacia arriba (figura 5.20) y representar con $\bar{\mathbf{r}}$ al vector de posición de G, se escribe

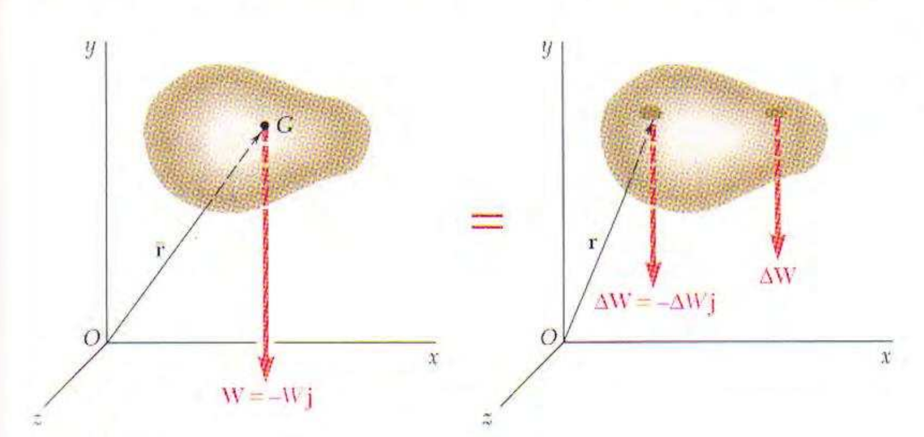
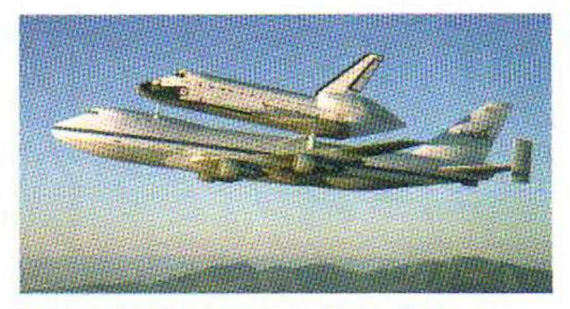


Figura 5.20



Fotografía 5.4 Cuando el Boeing 747 fue modificado para transportar un *transbordador espacial*, fue necesario determinar el centro de gravedad de cada nave para predecir las características del vuelo.

que $\mathbf{W}$ es igual a la suma de los pesos elementales $\Delta\mathbf{W}$ y que su momento con respecto a O es igual a la suma de los momentos con respecto a O de los pesos elementales.

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbf{F}: \qquad & -W\mathbf{j} = \Sigma(-\Delta W\mathbf{j}) \\ \Sigma\mathbf{M}_O: \qquad & \bar{\mathbf{r}} \times (-W\mathbf{j}) = \Sigma[\mathbf{r} \times (-\Delta W\mathbf{j})] \end{aligned} \tag{5.14}$$

Se reescribe la última ecuación de la siguiente forma

$$\bar{\mathbf{r}}W \times (-\mathbf{j}) = (\Sigma\mathbf{r}\,\Delta W) \times (-\mathbf{j}) \tag{5.15}$$

se observa que el peso $\mathbf{W}$ del cuerpo es equivalente al sistema de pesos elementales $\Delta\mathbf{W}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

$$W = \Sigma\,\Delta W \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \Sigma\mathbf{r}\,\Delta W$$

Si se incrementa el número de elementos y al mismo tiempo se disminuye el tamaño de cada uno de ellos, se obtiene en el límite

$$W = \int dW \qquad \bar{\mathbf{r}}W = \int \mathbf{r}\,dW \tag{5.16}$$

Se observa que las relaciones obtenidas son independientes de la orientación del cuerpo. Por ejemplo, si el cuerpo y los ejes coordenados fueran rotados de manera que el eje z apuntara hacia arriba, el vector unitario $-\mathbf{j}$ sería reemplazado por $-\mathbf{k}$ en las ecuaciones (5.14) y (5.15), pero las relaciones (5.16) permanecerían intactas. Descomponiendo los vectores $\bar{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{r}$ en sus componentes rectangulares, se observa que la segunda de las relaciones (5.16) es equivalente a las tres ecuaciones escalares que se presentan a continuación

$$\bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad \bar{z}W = \int z\,dW \tag{5.17}$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo de peso específico γ, la magnitud dW del peso de un elemento infinitesimal se puede expresar en términos del volumen dV de dicho elemento y la magnitud W del peso total puede expresarse en términos del volumen total V. Así, se escribe

$$dW = \gamma \, dV \qquad W = \gamma V$$

Sustituyendo a dW y a W en la segunda de las relaciones (5.16), se escribe

$$\bar{\mathbf{r}}V = \int \mathbf{r} \, dV \tag{5.18}$$

o, en forma escalar,

$$\bar{x}V = \int x \, dV \qquad \bar{y}V = \int y \, dV \qquad \bar{z}V = \int z \, dV \tag{5.19}$$

El punto cuyas coordenadas son $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ también se conoce como el *centroide C del volumen V* del cuerpo. Si el cuerpo no es homogéneo, las ecuaciones (5.19) no pueden utilizarse para determinar el centro de gravedad del mismo; sin embargo, las ecuaciones (5.19) aún definen al centroide de su volumen.

La integral $\int x \, dV$ se conoce como el *primer momento del volumen con respecto al plano yz*. De manera análoga, las integrales $\int y \, dV$ y $\int z \, dV$ definen, respectivamente, los primeros momentos del volumen con respecto al plano zx y al plano xy. A partir de las ecuaciones (5.19) se observa que si el centroide de un volumen está localizado en un plano coordenado, el primer momento del volumen con respecto a dicho plano es igual a cero.

Se dice que un volumen es simétrico con respecto a un plano dado si para cada punto P del volumen existe un punto P' del mismo volumen tal que la línea PP' es perpendicular al plano dado y está dividida en dos partes por dicho plano. Bajo estas circunstancias, se dice que el plano en cuestión es un *plano de simetría* para el volumen dado. Cuando un volumen V posee un plano de simetría, el primer momento de V con respecto a ese plano es igual a cero y el centroide del volumen está localizado en el plano de simetría. Cuando un volumen posee dos planos de simetría, el centroide del volumen está localizado en la línea de intersección de los dos planos. Finalmente, cuando un volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un punto bien definido (esto es, que no se intersecan a lo largo de una línea común), el punto de intersección de los tres planos coincide con el centroide del volumen. Esta propiedad permite determinar la ubicación de los centroides de esferas, elipsoides, cubos y paralelepípedos rectangulares, entre otros.

Los centroides de volúmenes que no son simétricos o de volúmenes que tienen sólo uno o dos planos de simetría deben determinarse mediante integración (sección 5.12). Los centroides de varios volúmenes comunes se muestran en la figura 5.21. Se debe observar que, en general, el centroide de un volumen de revolución *no coincide* con el centroide de su sección transversal. Por tanto, el centroide de un hemisferio es diferente al de un área semicircular y el centroide de un cono es diferente al de un triángulo.

Forma		$\bar{x}$	Volumen
Semiesfera		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semielipsoide de revolución		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloide de revolución		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cono		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pirámide		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3} abh$

Figura 5.21 Centroides de formas y volúmenes comunes.

5.11. CUERPOS COMPUESTOS

Si un cuerpo puede dividirse en varias de las formas comunes mostradas en la figura 5.21, su centro de gravedad G puede determinarse al expresar que el momento con respecto a O de su peso total es igual a la suma de los momentos con respecto a O de los pesos de las diferentes partes que lo componen. Si se procede de la misma forma que en la sección 5.10, se obtienen las siguientes ecuaciones que definen las coordenadas $\overline{X}$, $\overline{Y}$ y $\overline{Z}$ del centro de gravedad G de un cuerpo.

$$\overline{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \overline{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad \overline{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{z} W \qquad (5.20)$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de su volumen y se obtiene:

$$\overline{X}\Sigma V = \Sigma \bar{x} V \qquad \overline{Y}\Sigma V = \Sigma \bar{y} V \qquad \overline{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z} V \qquad (5.21)$$

$\bar{x}_{el} = x, \ \bar{y}_{el} = y, \ \bar{z}_{el} = \frac{z}{2}$

$dV = z\, dx\, dy$

Figura 5.22 Determinación del centroide de un volumen por integración doble.

5.12. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES DE VOLÚMENES POR INTEGRACIÓN

El centroide de un volumen limitado por superficies analíticas se puede determinar al evaluar las integrales dadas en la sección 5.10:

$$\bar{x}V = \int x\, dV \qquad \bar{y}V = \int y\, dV \qquad \bar{z}V = \int z\, dV \qquad (5.22)$$

Si el elemento de volumen dV se selecciona de manera que sea igual a un pequeño cubo de lados dx, dy y dz, la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración triple*. Sin embargo, es posible determinar las coordenadas del centroide de la mayoría de los volúmenes utilizando *integración doble* si dV se selecciona de tal forma que sea igual al volumen de un filamento delgado (figura 5.22). Entonces, las coordenadas del centroide del volumen se obtienen reescribiendo las ecuaciones (5.22),

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\, dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\, dV \qquad (5.23)$$

y sustituyendo después las expresiones dadas en la figura 5.22 para el volumen dV y para las coordenadas $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$. Si se utiliza la ecuación de la superficie para expresar a z en términos de x y y, la integración se reduce a una integración doble en x y y.

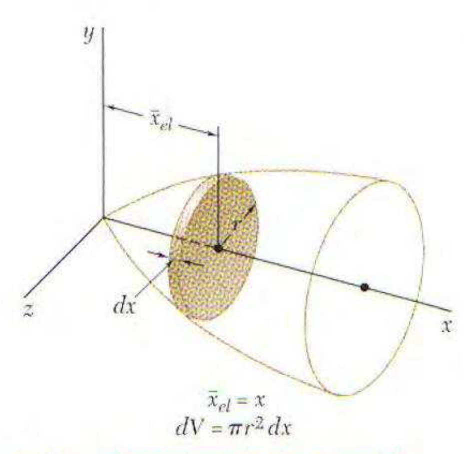
Si el volumen en consideración posee *dos planos de simetría*, su centroide debe estar localizado sobre la línea de intersección de los dos planos. Seleccionando al eje x de manera que coincida con esta línea se tiene

$$\bar{y} = \bar{z} = 0$$

y la única coordenada que se tiene que determinar es $\bar{x}$. Esto se puede realizar con una *sola integración* dividiendo el volumen dado en placas delgadas paralelas al plano yz y expresando a dV en términos de x y dx en la ecuación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad (5.24)$$

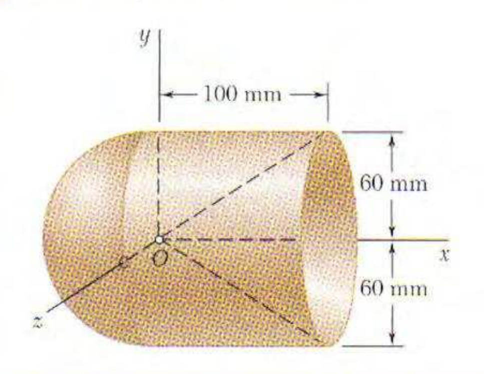
Para un cuerpo de revolución las placas son circulares y sus volúmenes se dan en la figura 5.23.



$\bar{x}_{el} = x$

$dV = \pi r^2 dx$

Figura 5.23 Determinación del centroide de un cuerpo de revolución.

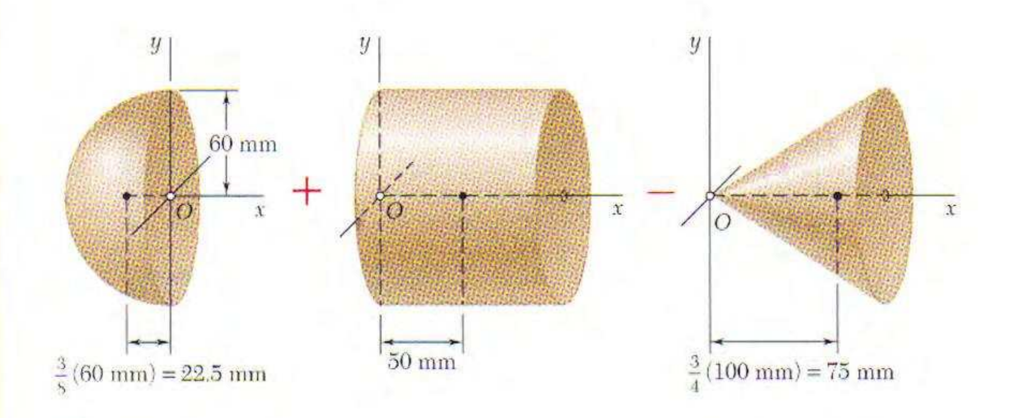


PROBLEMA RESUELTO 5.11

Determine la ubicación del centro de gravedad del cuerpo de revolución homogéneo que se muestra en la figura, el cual se obtuvo al unir una semiesfera y un cilindro y removiendo un cono.

SOLUCIÓN

Debido a la simetría, el centro de gravedad se encuentra sobre el eje x, como se muestra en la figura que se presenta a continuación. El cuerpo puede obtenerse sumándole una semiesfera a un cilindro y después restándole un cono. El volumen y la abscisa del centroide de cada una de estas componentes se obtiene a partir de la figura 5.21 y se introduce en la tabla que aparece a continuación. Entonces, se determinan el volumen total del cuerpo y el primer momento de dicho volumen con respecto al plano yz.

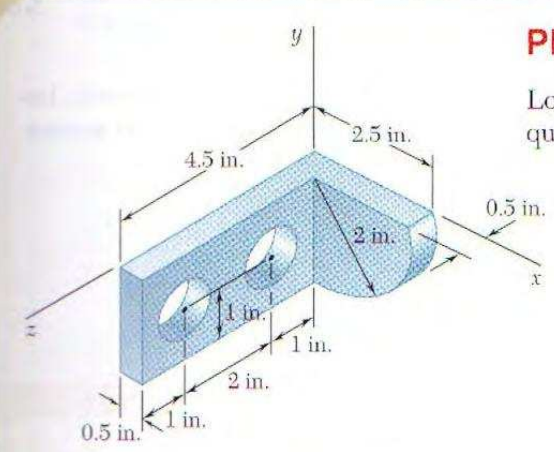


Componente	Volumen, mm^3	$\bar{x}$, mm	$\bar{x}V$, mm^4
Semiesfera	$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}(60)^3 = \quad 0.4524 \times 10^6$	-22.5	-10.18×10^6
Cilindro	$\pi(60)^2(100) = \quad 1.1310 \times 10^6$	$+50$	$+56.55 \times 10^6$
Cono	$-\frac{\pi}{3}(60)^2(100) = -0.3770 \times 10^6$	$+75$	-28.28×10^6
	$\Sigma V = \quad 1.206 \times 10^6$		$\Sigma\bar{x}V = +18.09 \times 10^6$

Por tanto,

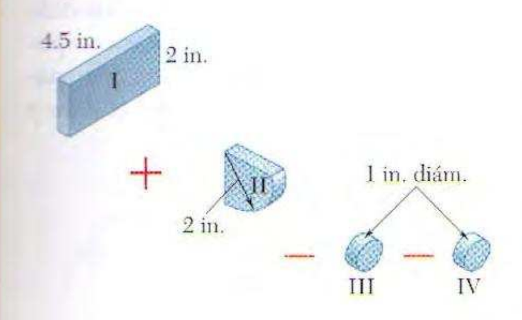
$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V: \qquad \bar{X}(1.206 \times 10^6 \text{ mm}^3) = 18.09 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{X} = 15 \text{ mm} \quad ◀$$



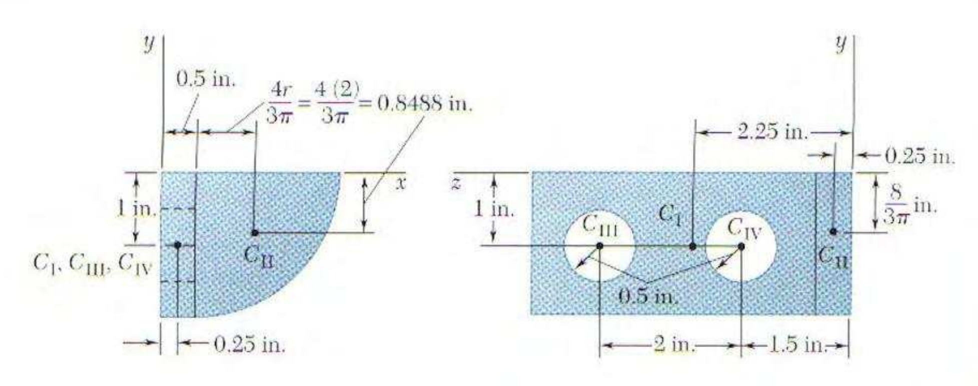
PROBLEMA RESUELTO 5.12

Localice el centro de gravedad del elemento de una máquina hecho de acero que se muestra en la figura. El diámetro de cada agujero es 1 in.



SOLUCIÓN

El elemento de máquina se puede obtener sumándole a un paralelepípedo rectangular (I) un cuarto de cilindro (II) y, entonces, restando dos cilindros de 1 in. de diámetro (III y IV). Se determinan el volumen y las coordenadas del centroide de cada componente y se introducen en la tabla que se presenta a continuación. Entonces, al utilizar los datos que están en la tabla se determina el volumen total y los momentos de dicho volumen con respecto a cada uno de los planos coordenados.



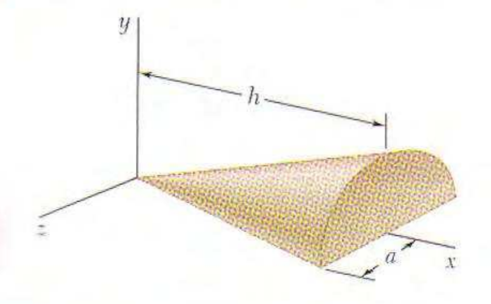
	V, in.^{3}	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{z}$, in.	$\bar{x}V$, in.^{4}	$\bar{y}V$, in.^{4}	$\bar{z}V$, in.^{4}
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma\bar{x}V = 3.048$	$\Sigma\bar{y}V = -5.047$	$\Sigma\bar{z}V = 8.555$

Por tanto,

$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V$: $\quad \bar{X}(5.286\text{ in.}^3) = 3.048\text{ in.}^4$ $\qquad \bar{X} = 0.577\text{ in.}$ ◀

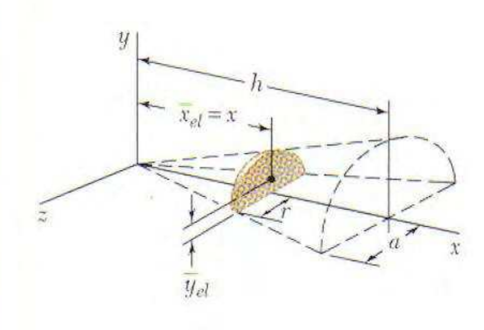
$\bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V$: $\quad \bar{Y}(5.286\text{ in.}^3) = -5.047\text{ in.}^4$ $\qquad \bar{Y} = -0.955\text{ in.}$ ◀

$\bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V$: $\quad \bar{Z}(5.286\text{ in.}^3) = 8.555\text{ in.}^4$ $\qquad \bar{Z} = 1.618\text{ in.}$ ◀



PROBLEMA RESUELTO 5.13

Determine la ubicación del centroide del medio cono circular recto mostrado en la figura.



SOLUCIÓN

Como el plano xy es un plano de simetría, el centroide se encuentra en dicho plano y $\bar{z} = 0$. Se selecciona una placa de espesor dx como el elemento diferencial. El volumen de dicho elemento es

$$dV = \tfrac{1}{2}\pi r^2\, dx$$

Las coordenadas $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ del centroide del elemento se obtienen de la figura 5.8 (área semicircular).

$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \frac{4r}{3\pi}$$

Se observa que r es proporcional a x y se escribe

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \qquad r = \frac{a}{h}x$$

Así, el volumen del cuerpo está dado por

$$V = \int dV = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi r^2\, dx = \int_0^h \tfrac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al plano yz es $\bar{x}_{el}\, dV$; en consecuencia, el momento total del cuerpo con respecto a ese mismo plano es

$$\int \bar{x}_{el}\, dV = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\, dx = \int_0^h x(\tfrac{1}{2}\pi)\left(\frac{a}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

Por tanto,

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\, dV \qquad \bar{x}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \qquad \bar{x} = \tfrac{3}{4}h \blacktriangleleft$$

En forma similar, el momento del elemento diferencial con respecto al plano zx es $\bar{y}_{el}\, dV$; en consecuencia, el momento total es

$$\int \bar{y}_{el}\, dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi}(\tfrac{1}{2}\pi r^2)\, dx = \frac{2}{3}\int_0^h \left(\frac{a}{h}x\right)^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

Por tanto,

$$\bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\, dV \qquad \bar{y}\frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{a^3 h}{6} \qquad \bar{y} = \frac{a}{\pi} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta lección se pedirá localizar los centros de gravedad de cuerpos tridimensionales o los centroides de sus volúmenes. Todas las técnicas que se presentaron anteriormente para cuerpos bidimensionales, como usar simetría, dividir al cuerpo en formas comunes, seleccionar el elemento diferencial más eficiente, entre otros, también pueden aplicarse para el caso tridimensional general.

1. Localización de los centros de gravedad de cuerpos compuestos. En general, se deben utilizar las ecuaciones (5.20):

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma\bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma\bar{y}W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma\bar{z}W \tag{5.20}$$

Sin embargo, para el caso de un *cuerpo homogéneo*, el centro de gravedad del mismo coincide con el *centroide de su volumen*. Por tanto, para este caso específico, el centro de gravedad del cuerpo también puede localizarse con las ecuaciones (5.21):

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V \tag{5.21}$$

Debe observarse que estas ecuaciones son sólo una extensión de las ecuaciones utilizadas para los problemas bidimensionales considerados en secciones anteriores de este mismo capítulo. Como lo ilustran las soluciones de los problemas resueltos 5.11 y 5.12, los métodos de solución para problemas bidimensionales y tridimensionales son idénticos. Por tanto, de nuevo se recomienda construir diagramas y tablas apropiadas cuando se analicen cuerpos compuestos. Además, cuando se estudie el problema resuelto 5.12, se debe observar cómo las coordenadas x y y del centroide del cuarto de cilindro se obtuvieron mediante las ecuaciones para el centroide de un cuarto de círculo.

Se debe señalar que se presentan *dos casos especiales* de interés cuando el cuerpo dado consiste de alambres uniformes o de placas uniformes hechos del mismo material.

a) Para un cuerpo hecho de *varios elementos de alambre* que tienen la *misma sección transversal uniforme*, el área A de la sección transversal de los elementos de alambre se podrá eliminar de las ecuaciones (5.21) cuando V se reemplaza por el producto AL, donde L es la longitud de un elemento dado. Entonces, para este caso, las ecuaciones (5.21) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma L = \Sigma\bar{x}L \qquad \bar{Y}\Sigma L = \Sigma\bar{y}L \qquad \bar{Z}\Sigma L = \Sigma\bar{z}L$$

b) Para un cuerpo hecho de *varias placas* que tienen el *mismo espesor uniforme*, el espesor t de las placas puede factorizarse y eliminarse de las ecuaciones (5.21) cuando V se reemplaza por el producto tA, donde A es el área de una placa dada. Por tanto, en este caso, las ecuaciones (5.21) se reducen a

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma\bar{x}A \qquad \bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A \qquad \bar{Z}\Sigma A = \Sigma\bar{z}A$$

2. Localización de los centroides de volúmenes por integración directa. Como se explicó en la sección 5.12, la evaluación de las integrales de las ecuaciones (5.22) se puede simplificar seleccionando para el elemento de volumen dV un filamento delgado (figura 5.23) o una placa delgada (figura 5.23). Por tanto, la solución se debe iniciar con la identificación, de ser posible, del dV que produce integrales sencillas o dobles que son fáciles de calcular. Para cuerpos de revolución, este elemento de volumen puede ser una placa delgada (como en el problema resuelto 5.13) o un cascarón cilíndrico delgado. Sin embargo, es importante recordar que las relaciones que se establezcan entre las variables (como las relaciones entre r y x en el problema resuelto 5.13) afectarán directamente la complejidad de las integrales que se tendrán que calcular. Finalmente, conviene recordar que $\bar{x}_{el}, \bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ en las ecuaciones (5.23) son las coordenadas del centroide de dV.

Problemas

5.96 Determine la ubicación del centroide del cuerpo compuesto que se muestra en la figura cuando *a*) $h = 2b$, *b*) $h = 2.5b$.

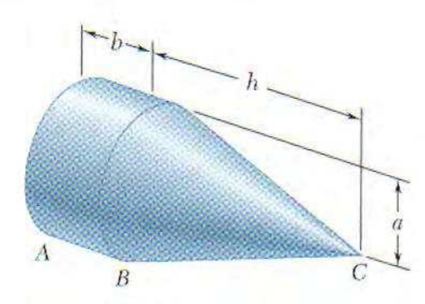


Figura P5.96

5.97 Determine la coordenada y del centroide del cuerpo mostrado en la figura.

5.98 Determine la coordenada z del centroide del cuerpo mostrado en la figura. (*Sugerencia*: Use el resultado del problema resuelto 5.13.)

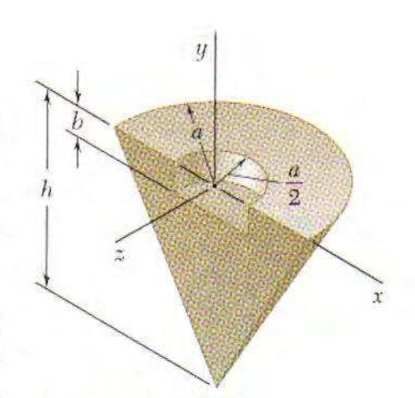


Figura P5.97 y P5.98

5.99 El cuerpo compuesto que se muestra en la figura se obtiene al retirar un semielipsoide de revolución con eje semimayor h y eje semimenor $a/2$ de una semiesfera con radio a. Determine *a*) la coordenada y del centroide cuando $h = a/2$ y *b*) la relación h/a para la cual $\bar{y} = -0.4a$.

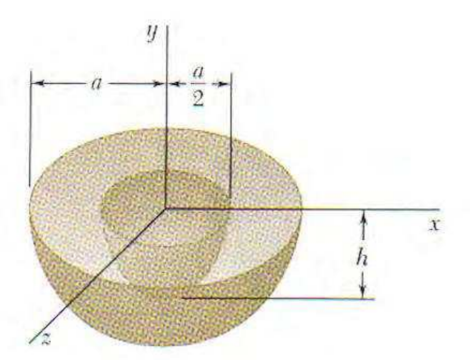


Figura P5.99

5.100 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

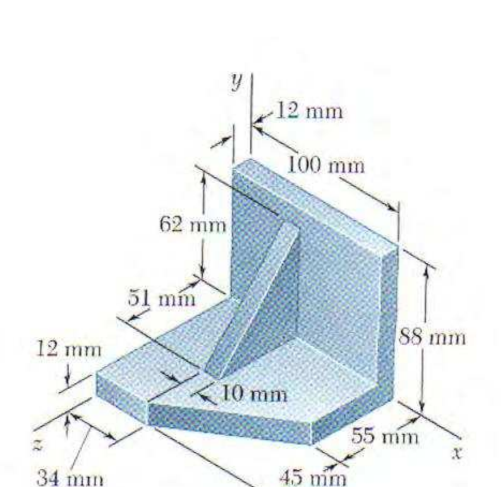


Figura P5.100 y P5.101

5.101 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

***5.102* y 5.103** Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada y del centro de gravedad.

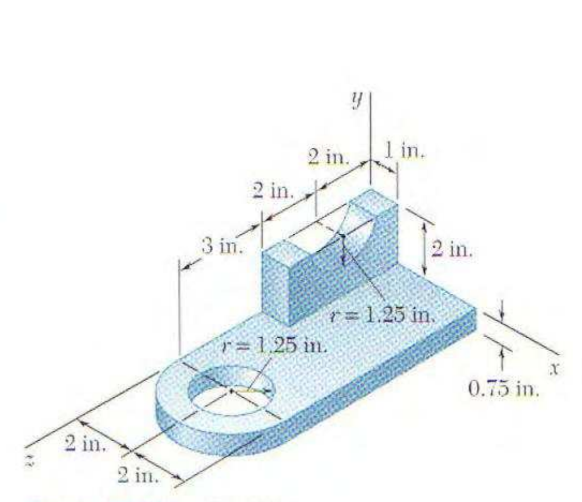


Figura P5.103 y P5.104

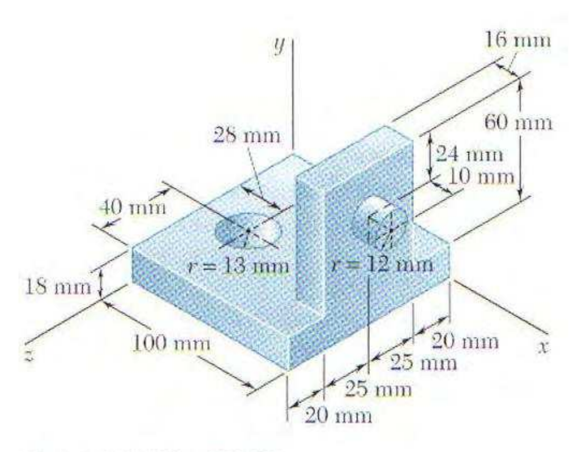


Figura *P5.102* y *P5.105*

5.104 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

5.105 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

5.106 y 5.107 Localice el centro de gravedad de la hoja metálica que tiene la forma mostrada en la figura.

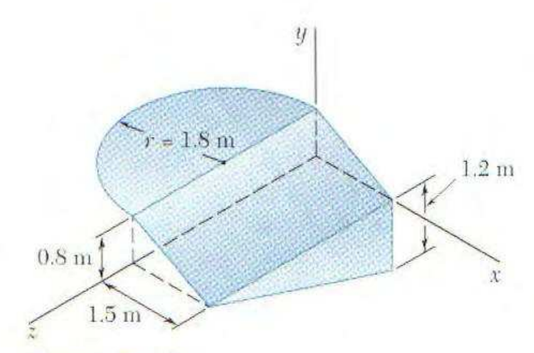


Figura P5.106

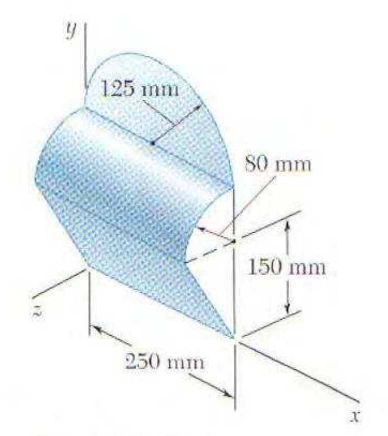


Figura P5.107

5.108 Una canasta de basura, diseñada para colocarse en la esquina de una habitación, tiene 16 in. de altura y una base en forma de un cuarto de círculo con radio de 10 in. Localice el centro de gravedad de la canasta de basura, si se sabe que está hecha de hoja metálica de espesor uniforme.

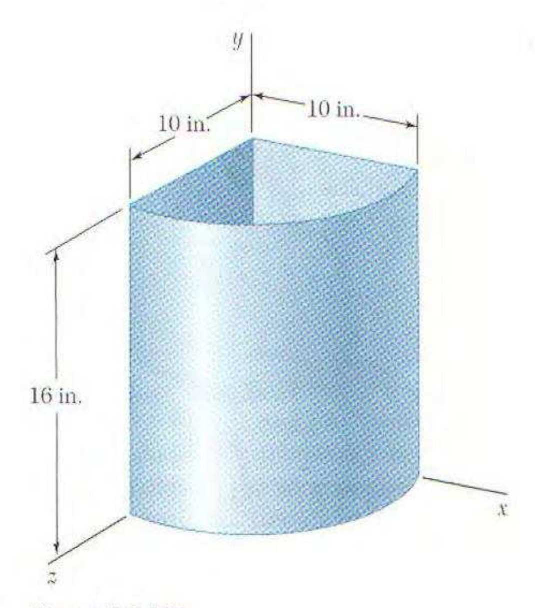


Figura P5.108

5.109 Una ménsula de montaje para componentes electrónicos se formó a partir de hoja metálica de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la ménsula.

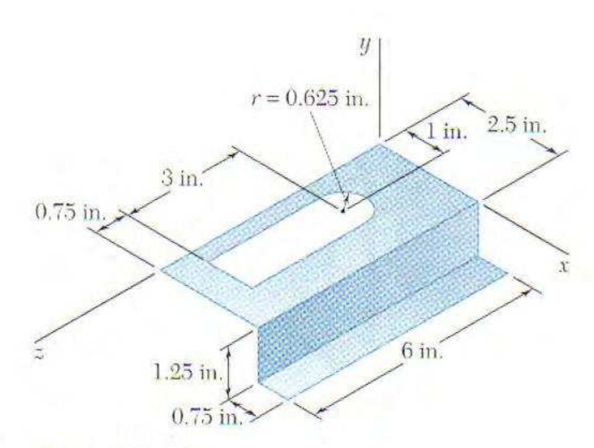


Figura *P5.109*

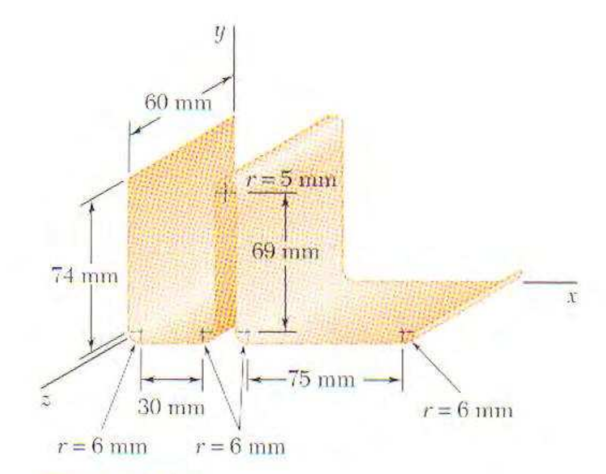


Figura P5.110

5.110 Una hoja delgada de plástico de espesor uniforme se dobla para formar un organizador de escritorio. Localice el centro de gravedad del organizador.

5.111 El toldo para ventana que se muestra en la figura está fabricado a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del toldo.

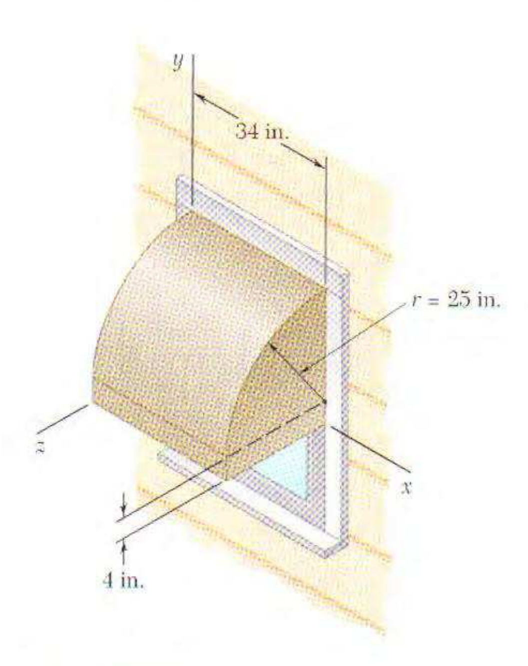


Figura P5.111

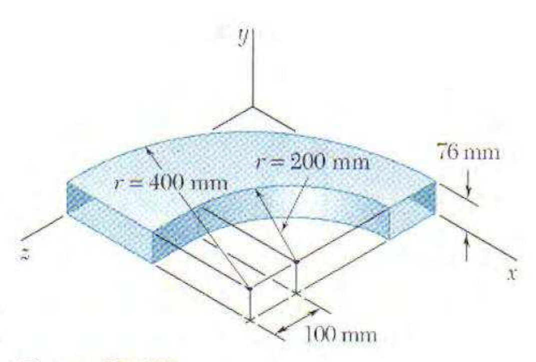


Figura P5.112

5.112 Un codo para el ducto de un sistema de ventilación está hecho a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del codo.

5.102 **y 5.103** Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada y del centro de gravedad.

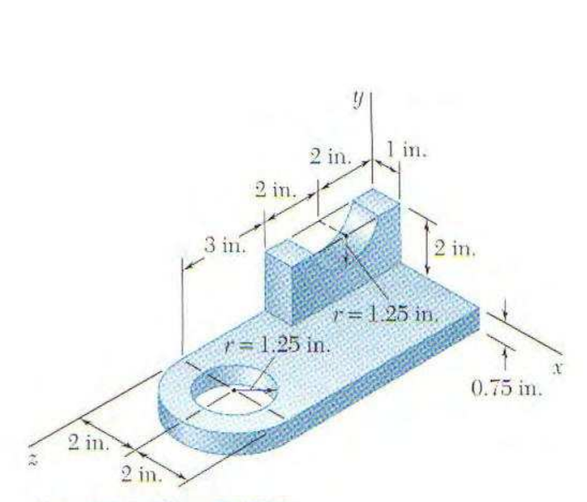


Figura P5.103 y P5.104

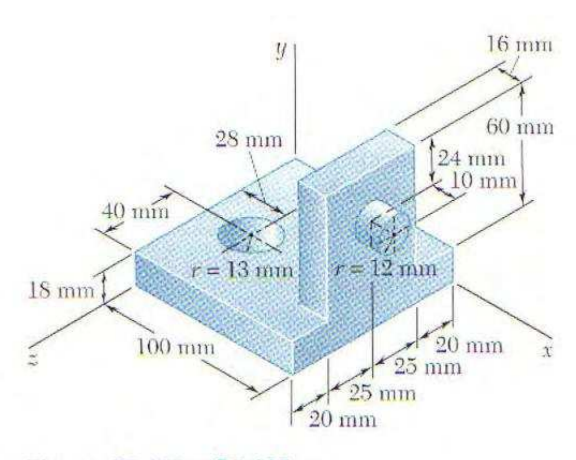


Figura *P5.102* y *P5.105*

5.104 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

5.105 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

5.106 y 5.107 Localice el centro de gravedad de la hoja metálica que tiene la forma mostrada en la figura.

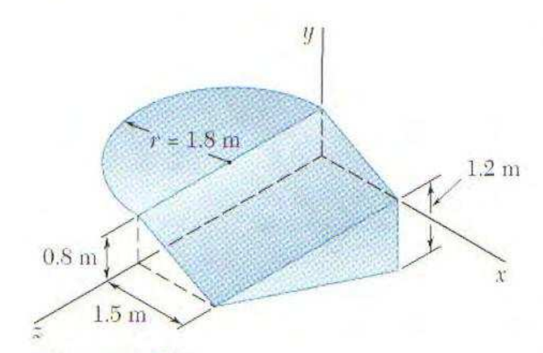


Figura P5.106

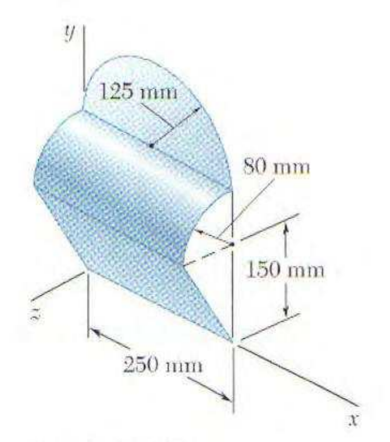


Figura P5.107

5.108 Una canasta de basura, diseñada para colocarse en la esquina de una habitación, tiene 16 in. de altura y una base en forma de un cuarto de círculo con radio de 10 in. Localice el centro de gravedad de la canasta de basura, si se sabe que está hecha de hoja metálica de espesor uniforme.

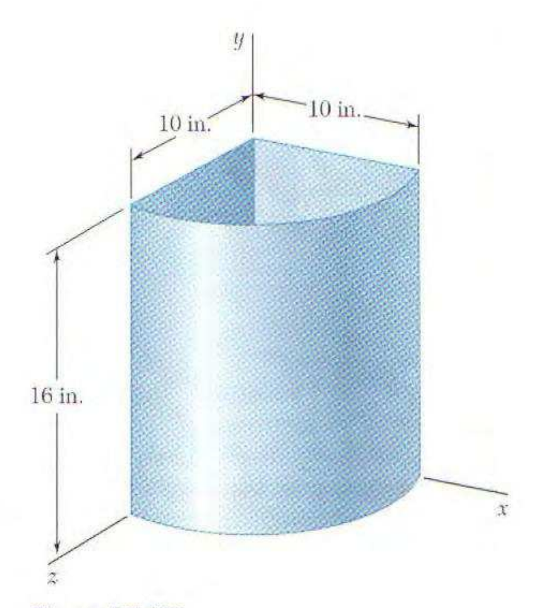


Figura P5.108

5.109 Una ménsula de montaje para componentes electrónicos se formó a partir de hoja metálica de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la ménsula.

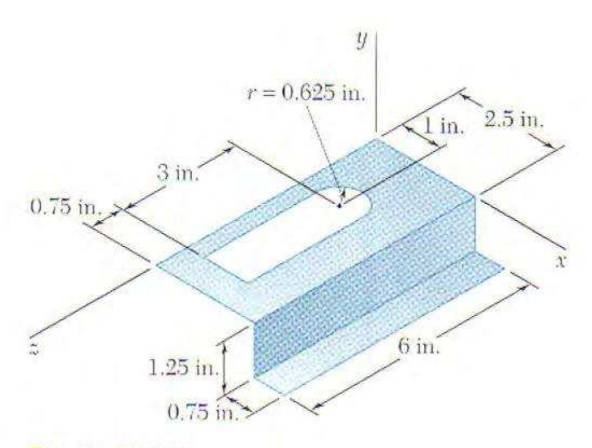


Figura *P5.109*

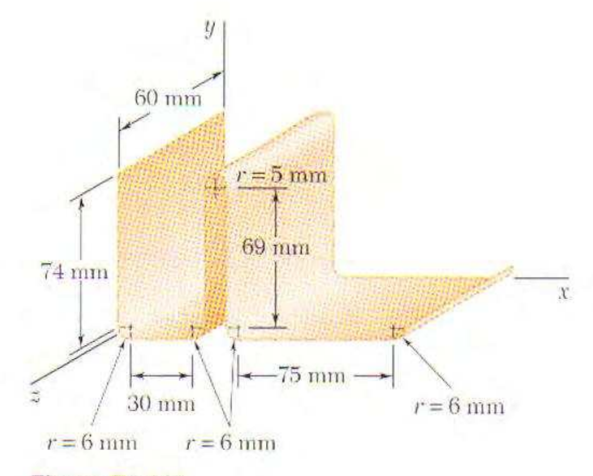


Figura P5.110

5.110 Una hoja delgada de plástico de espesor uniforme se dobla para formar un organizador de escritorio. Localice el centro de gravedad del organizador.

5.111 El toldo para ventana que se muestra en la figura está fabricado a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del toldo.

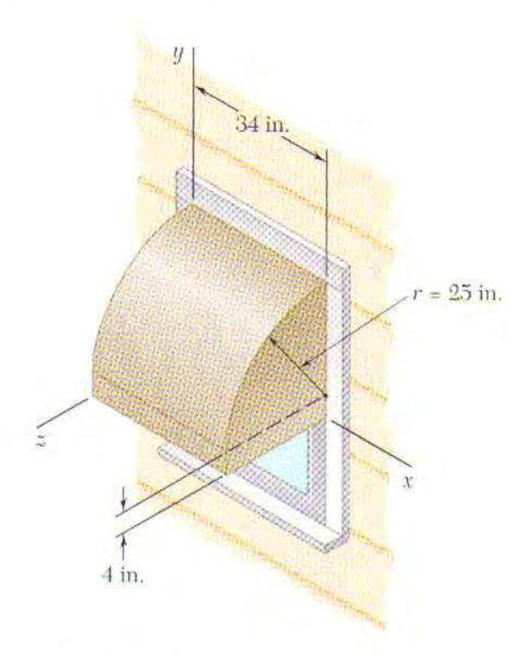


Figura P5.111

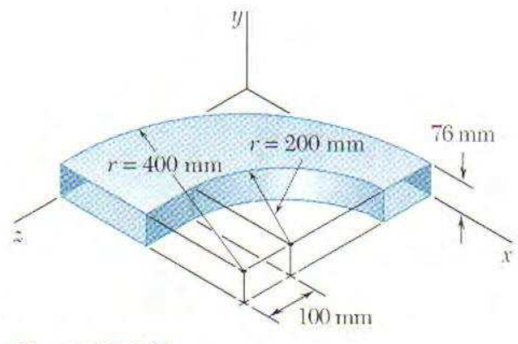


Figura P5.112

5.112 Un codo para el ducto de un sistema de ventilación está hecho a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del codo.

5.102 **y 5.103** Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada y del centro de gravedad.

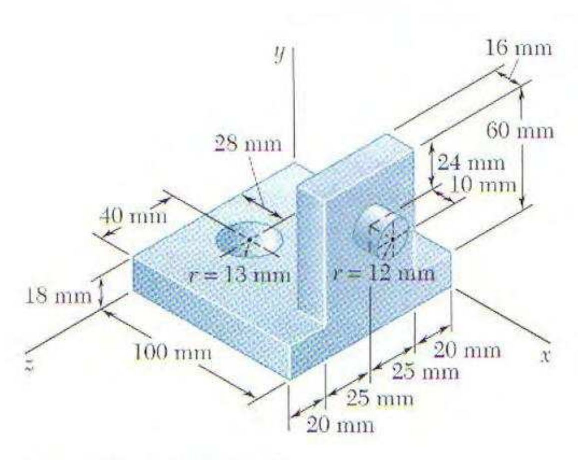


Figura *P5.102* y *P5.105*

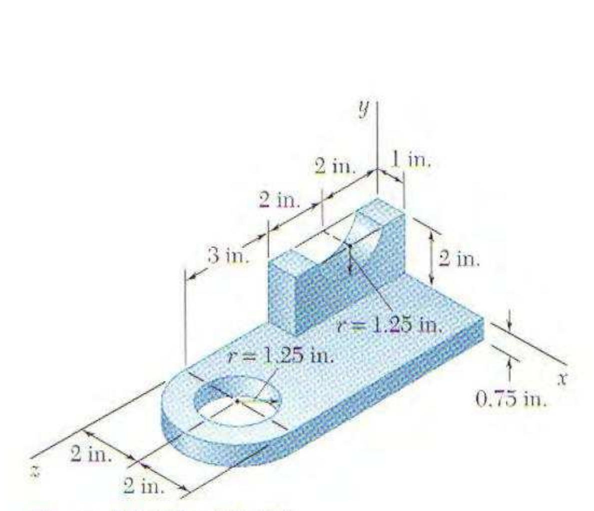


Figura P5.103 y P5.104

5.104 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

5.105 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

5.106 y 5.107 Localice el centro de gravedad de la hoja metálica que tiene la forma mostrada en la figura.

5.108 Una canasta de basura, diseñada para colocarse en la esquina de una habitación, tiene 16 in. de altura y una base en forma de un cuarto de círculo con radio de 10 in. Localice el centro de gravedad de la canasta de basura, si se sabe que está hecha de hoja metálica de espesor uniforme.

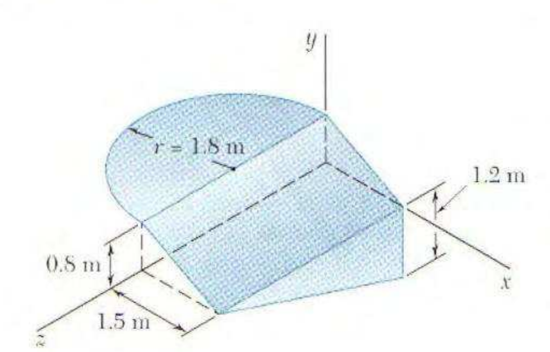


Figura P5.106

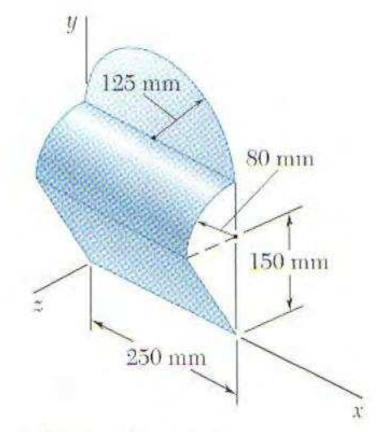


Figura P5.107

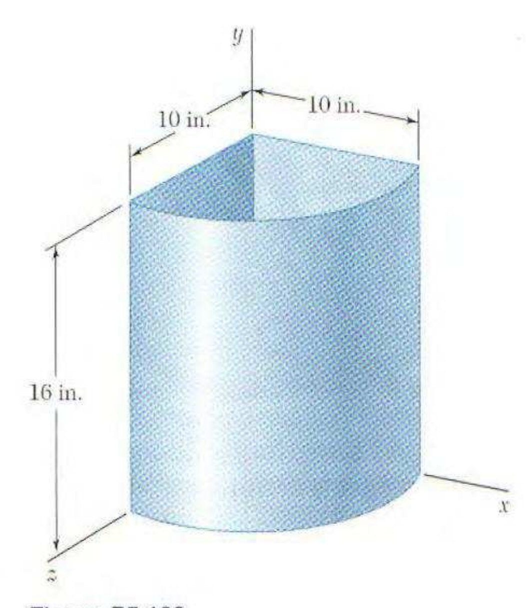


Figura P5.108

5.109 Una ménsula de montaje para componentes electrónicos se formó a partir de hoja metálica de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad de la ménsula.

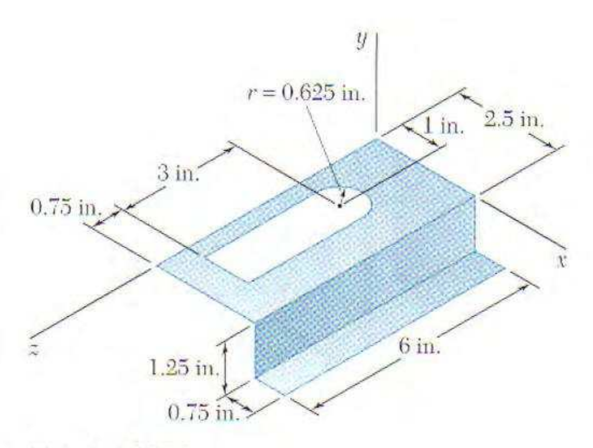


Figura *P5.109*

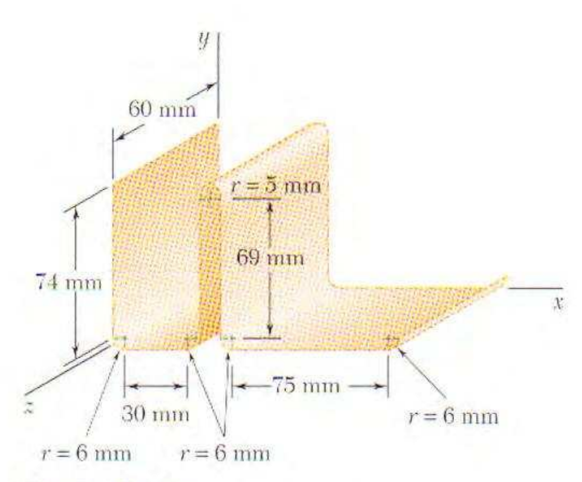
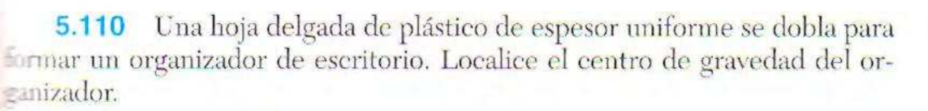


Figura P5.110



5.110 Una hoja delgada de plástico de espesor uniforme se dobla para formar un organizador de escritorio. Localice el centro de gravedad del organizador.

5.111 El toldo para ventana que se muestra en la figura está fabricado a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del toldo.

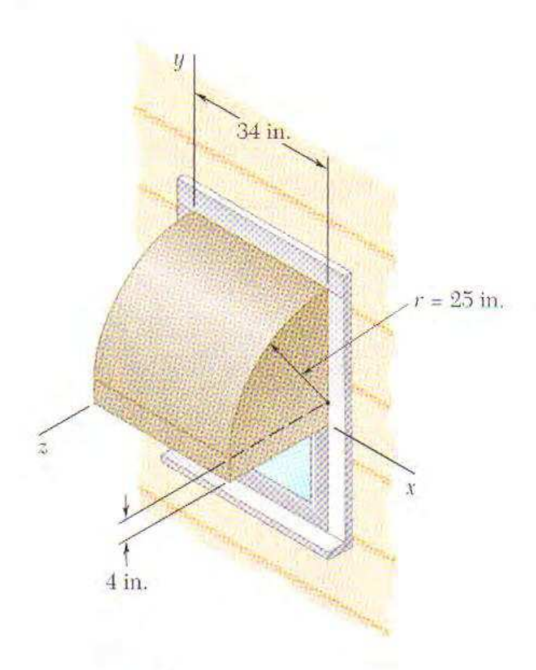


Figura P5.111

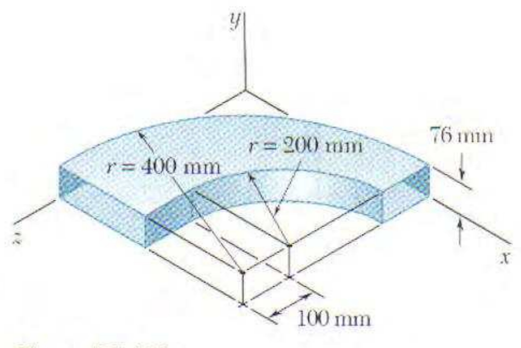


Figura P5.112

5.112 Un codo para el ducto de un sistema de ventilación está hecho a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Localice el centro de gravedad del codo.

5.113 Un ducto cilíndrico de 8 in. de diámetro y un ducto rectangular de 4 × 8 in. se unen en la forma indicada en la figura. Localice el centro de gravedad del ensamble si se sabe que los ductos fueron fabricados con la misma hoja de metal de espesor uniforme.

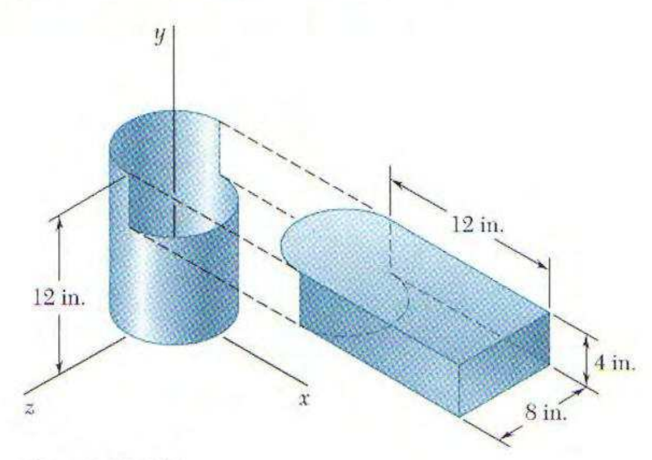


Figura *P5.113*

5.114 Un alambre delgado de acero con una sección transversal uniforme se dobla en la forma mostrada en la figura. Localice su centro de gravedad.

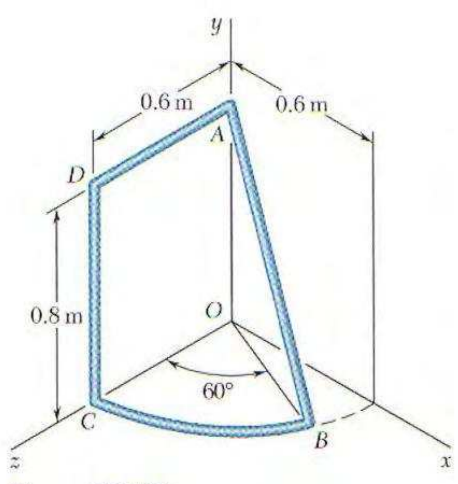


Figura P5.114

5.115 y *5.116* Localice el centro de gravedad de la figura mostrada, si se sabe que está hecha con varillas delgadas de latón de diámetro uniforme.

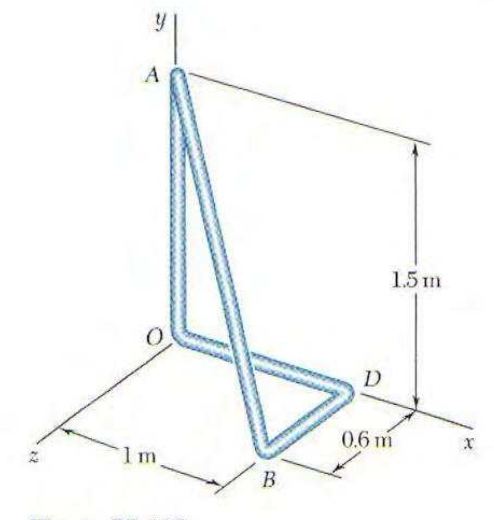


Figura P5.115

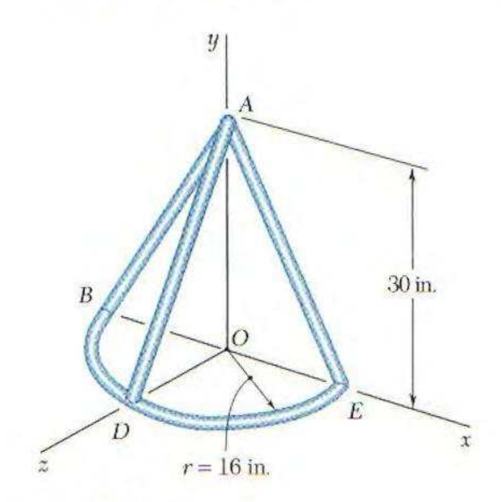


Figura *P5.116*

5.117 El bastidor de un invernadero se construye a partir de canales uniformes de aluminio. Localice el centro de gravedad de la parte del bastidor que se muestra en la figura.

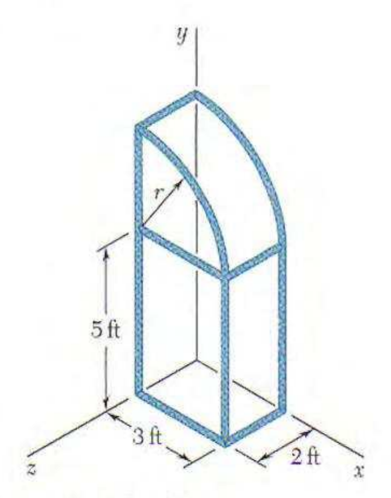


Figura P5.117

5.118 Una lesna marcadora tiene un mango de plástico, un vástago y una punta de acero. Si se sabe que la densidad del plástico es de 1 030 kg/m^3 y la del acero es de 7 860 kg/m^3, localice el centro de gravedad de la lesna.

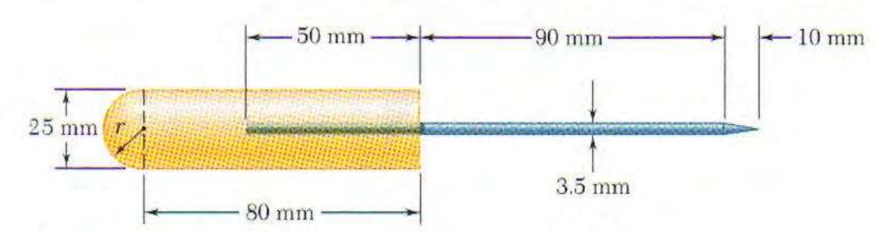


Figura P5.118

5.119 Un buje de bronce se coloca en el interior de un mango de acero. Si se sabe que el peso específico del bronce es de 0.318 lb/in.^{3} y el del acero es de 0.284 lb/in.^{3}, determine la ubicación del centro de gravedad del ensamble.

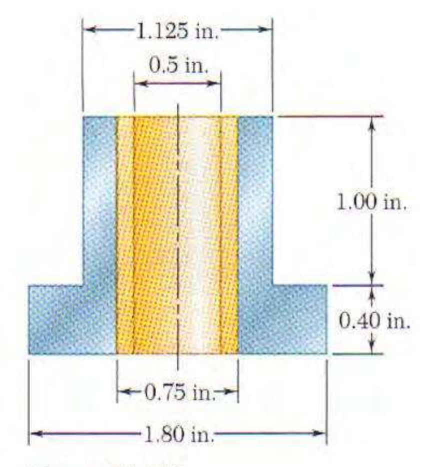


Figura P5.119

5.120 Un collarín de latón, con una longitud de 2.5 in., se monta sobre una varilla de aluminio que tiene una longitud de 4 in. Localice el centro de gravedad del cuerpo compuesto. (Pesos específicos: latón = 0.306 lb/in.^{3}, aluminio = 0.101 lb/in.^{3})

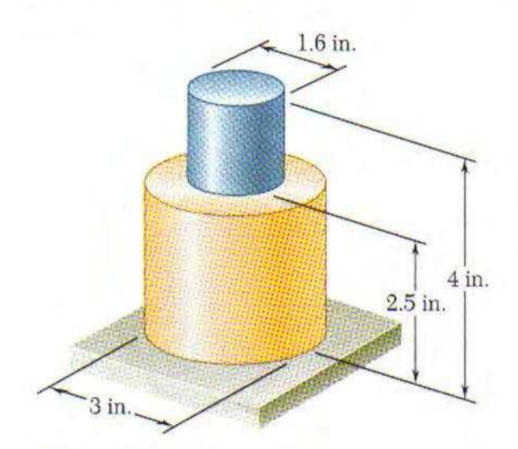


Figura *P5.120*

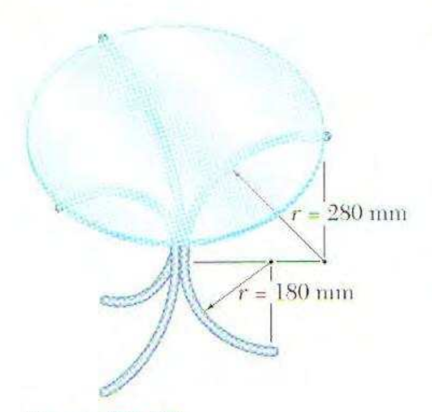


Figura P5.121

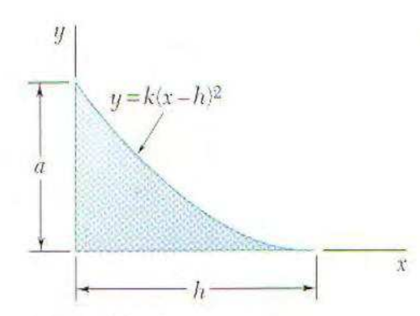


Figura P5.125

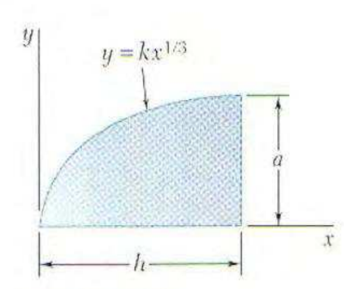


Figura *P5.126*

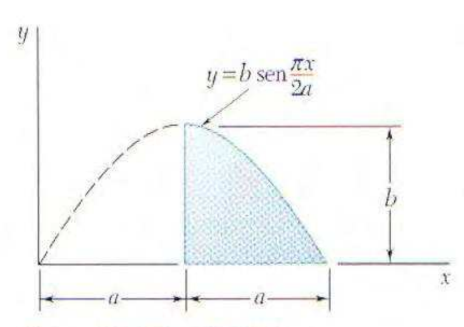


Figura P5.128 y P5.129

5.121 Las tres patas de una pequeña mesa con cubierta de cristal están igualmente espaciadas y hechas de tubo metálico, el cual tiene un diámetro exterior de 24 mm y un área de sección transversal de 150 mm^2. El diámetro y el espesor de la cubierta de la mesa son 600 mm y 10 mm, respectivamente. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 860 kg/m^3 y la del cristal es de 2 190 kg/m^3, localice el centro de gravedad de la mesa.

5.122 a 5.124 Determine por integración directa los valores de $\bar{x}$ para los dos volúmenes obtenidos al hacer pasar un plano de corte vertical a través de las formas mostradas en la figura 5.21. El plano de corte es paralelo a la base de la forma dada y la divide en dos volúmenes de la misma altura.

5.122 Una semiesfera.

5.123 Un semielipsoide de revolución.

5.124 Un paraboloide de revolución.

5.125 y *5.126* Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor del eje x.

5.127 Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor de la línea $x = h$.

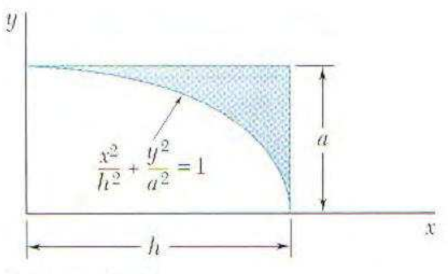


Figura *P5.127*

***5.128** Localice el centroide del volumen generado al revolver la porción de la curva senoidal mostrada alrededor del eje x.

***5.129** Localice el centroide del volumen generado al revolver la porción de la curva senoidal mostrada alrededor del eje y. (*Sugerencia*: Use como elemento de volumen un cascarón cilíndrico delgado de radio r y espesor dr.)

***5.130** Muestre que para una pirámide regular de altura h y n lados ($n = 3, 4,...$) el centroide de su volumen se localiza a una distancia $h/4$ por encima de su base.

5.131 Determine por integración directa la ubicación del centroide de la mitad de un cascarón semiesférico delgado uniforme de radio R.

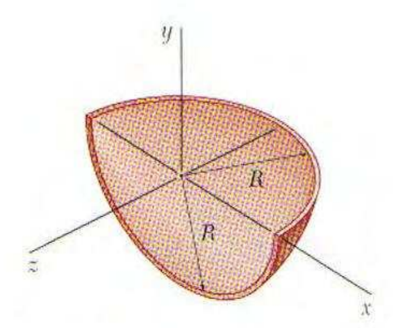


Figura *P5.131*

5.132 Los lados y la base de la ponchera que se muestra en la figura tienen un espesor uniforme t. Si $t \ll R$ y $R = 250$ mm, determine la localización del centro de gravedad de *a*) la ponchera y *b*) el ponche.

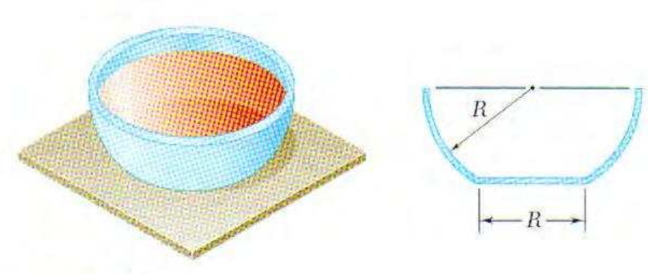


Figura P5.132

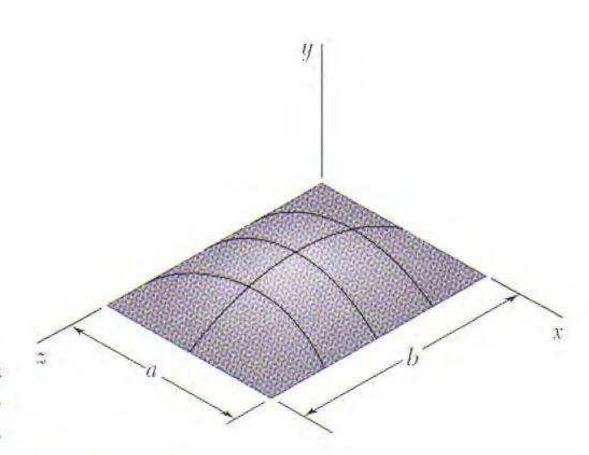


Figura P5.134

5.133 Después de medir y marcar un terreno, un constructor coloca cuatro estacas para identificar las esquinas de la losa para una casa. Para suministrar el firme, el constructor coloca un mínimo de 3 in. de grava por debajo de la losa. Determine el volumen de grava requerido y la coordenada x del centroide de dicho volumen. (*Sugerencia*: La superficie del fondo de la grava es un plano oblicuo que puede representarse mediante la ecuación $y = a + bx + cz$.)

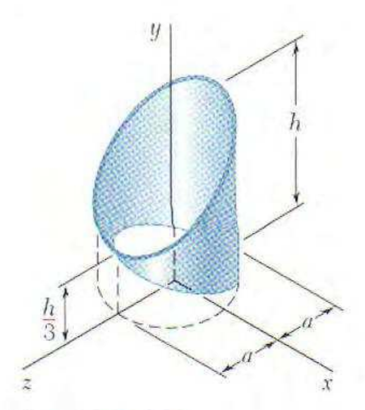


Figura *P5.135*

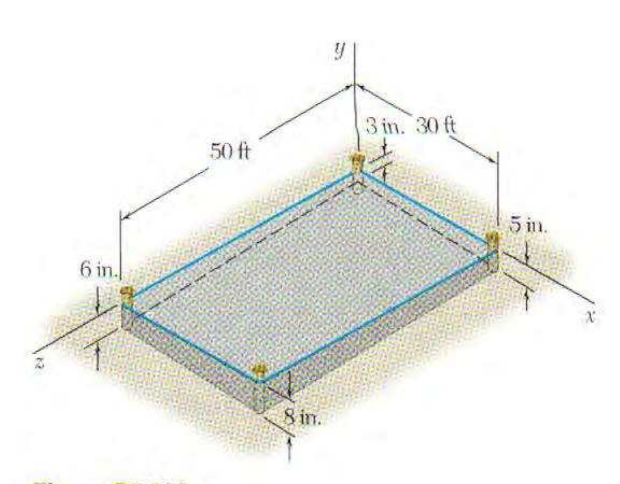
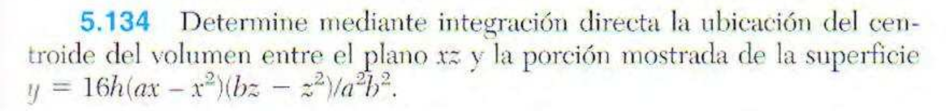
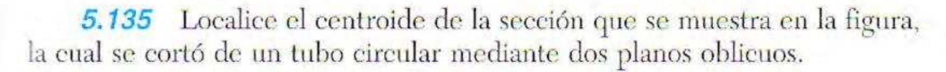


Figura P5.133



5.134 Determine mediante integración directa la ubicación del centroide del volumen entre el plano xz y la porción mostrada de la superficie $y = 16h(ax - x^2)(bz - z^2)/a^2b^2$.

5.135 Localice el centroide de la sección que se muestra en la figura, la cual se cortó de un tubo circular mediante dos planos oblicuos.



***5.136** Localice el centroide de la sección que se muestra en la figura, la cual se cortó de un cilindro elíptico mediante un plano oblicuo.

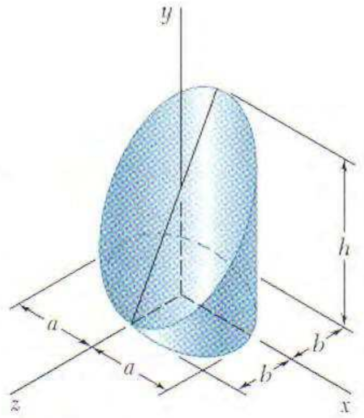


Figura P5.136

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 5

Este capítulo estuvo dedicado primordialmente a la determinación del *centro de gravedad* de un cuerpo rígido, es decir, determinar el punto G donde una sola fuerza $\mathbf{W}$, llamada el *peso* del cuerpo, se puede aplicar para representar el efecto de la atracción de la Tierra sobre el cuerpo en cuestión.

Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

En la primera parte del capítulo se consideraron *cuerpos bidimensionales* como placas planas y alambres contenidos en el plano xy. Al sumar componentes de fuerza en la dirección vertical z y sumar momentos con respecto a los ejes horizontales x y y [sección 5.2], se derivaron las relaciones

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW \qquad (5.2)$$

las cuales definen el peso del cuerpo y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de su centro de gravedad.

Centroide de un área o línea

En el caso de una *placa plana homogénea de espesor uniforme* [sección 5.3], el centro de gravedad G de la placa coincide con el *centroide C del área A* de la placa cuyas coordenadas están definidas por las relaciones

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA \qquad (5.3)$$

De manera similar, la determinación del centro de gravedad de un *alambre homogéneo de sección transversal uniforme* que está contenido en un plano, se reduce a la determinación del *centroide C de la línea L* que representa al alambre; así, se tiene

$$\bar{x}L = \int x\,dL \qquad \bar{y}L = \int y\,dL \qquad (5.4)$$

Primeros momentos

Se hace referencia a las integrales en las ecuaciones (5.3) como los *primeros momentos* del área A con respecto a los ejes x y y, los cuales se representan, respectivamente, con Q_y y Q_x [sección 5.4]. Así, se tiene

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A \qquad (5.6)$$

Los primeros momentos de una línea se pueden definir en forma similar.

Propiedades de simetría

La determinación del centroide C de un área o de una línea se simplifica cuando el área o la línea poseen ciertas *propiedades de simetría*. Si el área o la línea es simétrica con respecto a un eje, su centroide C se encuentra sobre dicho eje; si el área o la línea es simétrica con respecto a dos ejes, C está localizado en la inter-

sección de los dos ejes; si el área o la línea es simétrica con respecto a un centro O, C coincide con O.

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Las *áreas y los centroides de varias formas comunes* están tabulados en la figura 5.8. Cuando una placa puede dividirse en varias de estas formas, las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centro de gravedad G se pueden determinar a partir de las coordenadas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ y $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots$ de los centros de gravedad $G_1, G_2, \ldots$ de las diferentes partes [sección 5.5]. Al igualar, respectivamente, los momentos en relación a los ejes y y x (figura 5.24), se tiene que

$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma \bar{x} W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma \bar{y} W \qquad (5.7)$$

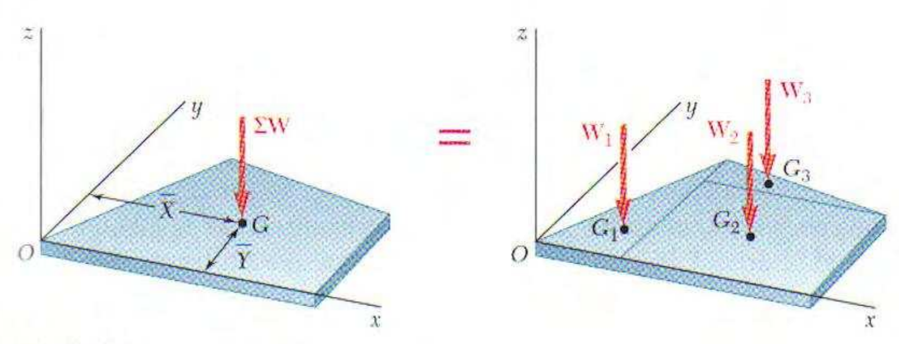


Figura 5.24

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, su centro de gravedad coincide con el centroide C del área de la placa y las ecuaciones (5.7) se reducen a

$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A \qquad Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A \qquad (5.8)$$

De estas ecuaciones se obtienen los primeros momentos del área compuesta o pueden resolverse para las coordenadas $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ de su centroide [problema resuelto 5.1]. La determinación del centro de gravedad de un alambre compuesto se lleva a cabo de forma similar [problema resuelto 5.2].

Determinación del centroide por integración

Cuando un área está limitada por curvas analíticas, las coordenadas de su centroide pueden determinarse por *integración* [sección 5.6]. Esto se puede realizar evaluando las integrales dobles en las ecuaciones (5.3) o evaluando una *sola integral* que emplea uno de los elementos de área mostrados en la figura 5.12 que tienen la forma de un rectángulo delgado o de un fragmento de círculo delgado. Al representar con $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dA, se tiene que

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA \qquad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA \qquad (5.9)$$

Es ventajoso emplear el mismo elemento del área para el cálculo de los dos primeros momentos Q_y y Q_x; además, el mismo elemento también se puede utilizar para determinar el área A [problema resuelto 5.4].

Teoremas de Pappus-Guldinus

Los *teoremas de Pappus-Guldinus* relacionan la determinación del área de una superficie de revolución o el volumen de un cuerpo de revolución con la determinación del centroide de la curva generatriz o del área generatriz [sección 5.7]. El área A de la superficie generada al rotar una curva de longitud L con respecto a un eje fijo (figura 5.25*a*) es igual a

$$A = 2\pi \bar{y} L \qquad (5.10)$$

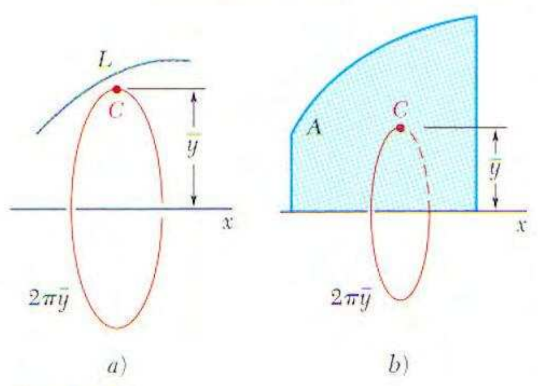


Figura 5.25

donde $\bar{y}$ representa la distancia desde el centroide C de la curva hasta el eje fijo. En forma similar, el volumen V del cuerpo generado al rotar un área A alrededor de un eje fijo (figura 5.25*b*) es igual a

$$V = 2\pi \bar{y} A \qquad (5.11)$$

donde $\bar{y}$ representa la distancia desde el centroide C del área hasta el eje fijo.

Cargas distribuidas

El concepto de centroide de un área también se puede utilizar para resolver otros problemas distintos de aquellos relacionados con el peso de placas planas. Por ejemplo, para determinar las reacciones en los apoyos de una viga [sección 5.8], se puede reemplazar una *carga distribuida* w por una carga concentrada **W** igual en magnitud al área A bajo la curva de carga y que pasa a través del centroide C de dicha área (figura 5.26). Se puede utilizar el mismo procedimiento para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre una *placa rectangular que está sumergida en un líquido* [sección 5.9].

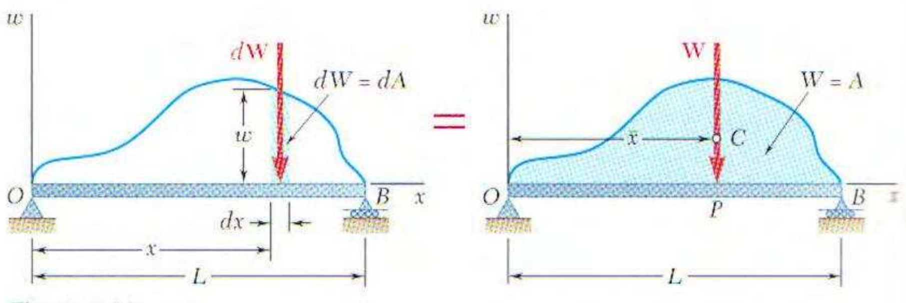


Figura 5.26

Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional

La última parte del capítulo estuvo dedicada a la determinación del *centro de gravedad G de un cuerpo tridimensional*. Las coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ de G se definieron por las relaciones

$$\bar{x}W = \int x\, dW \qquad \bar{y}W = \int y\, dW \qquad \bar{z}W = \int z\, dW \qquad (5.17)$$

Centroide de un volumen

En el caso de un *cuerpo homogéneo*, el centro de gravedad G coincide con el *centroide C del volumen V* del cuerpo; las coordenadas de C están definidas por las relaciones

$$\bar{x}V = \int x\, dV \qquad \bar{y}V = \int y\, dV \qquad \bar{z}V = \int z\, dV \qquad (5.19)$$

Si el volumen tiene un *plano de simetría*, su centroide C estará en dicho plano; si el volumen posee dos planos de simetría, C estará localizado sobre la línea de intersección de los dos planos; si el volumen tiene tres ejes de simetría que se intersecan en un solo punto, C coincidirá con dicho punto [sección 5.10].

Centro de gravedad de un cuerpo compuesto

Los *volúmenes y los centroides de varias formas tridimensionales comunes* están tabulados en la figura 5.21. Cuando un cuerpo se puede dividir en varias de estas formas, las coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ y $\bar{Z}$ de su centro de gravedad G se pueden determinar a partir de las coordenadas correspondientes de los centros de gravedad de sus diferentes partes [sección 5.11]. Así se tiene que

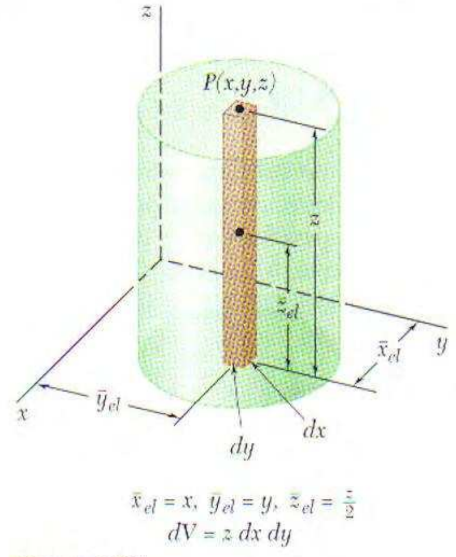
$$\bar{X}\Sigma W = \Sigma\bar{x}W \qquad \bar{Y}\Sigma W = \Sigma\bar{y}W \qquad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma\bar{z}W \quad (5.20)$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide C de su volumen y se escribe [problemas resueltos 5.11 y 5.12]

$$\bar{X}\Sigma V = \Sigma\bar{x}V \qquad \bar{Y}\Sigma V = \Sigma\bar{y}V \qquad \bar{Z}\Sigma V = \Sigma\bar{z}V \quad (5.21)$$

Determinación del centroide por integración

Cuando el volumen está limitado por superficies analíticas, las coordenadas de su centroide se pueden determinar por *integración* [sección 5.12]. Para evitar el cálculo de las integrales triples



$\bar{x}_{el} = x,\ \bar{y}_{el} = y,\ \bar{z}_{el} = \frac{z}{2}$
$dV = z\,dx\,dy$

Figura 5.27



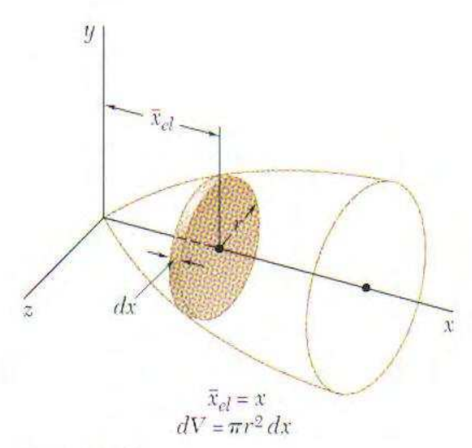
en la ecuación (5.19), se pueden usar elementos de volumen que tienen la forma de filamentos delgados, como se muestra en la figura 5.27. Al representar con $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ las coordenadas del centroide del elemento dV, se reescriben las ecuaciones (5.19) como

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\,dV \qquad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el}\,dV \qquad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el}\,dV \quad (5.23)$$

las cuales involucran sólo integrales dobles. Si el volumen tiene *dos planos de simetría*, su centroide C está localizado sobre la línea de intersección de dichos planos. Si se selecciona al eje x de manera que quede a lo largo de esa línea y se divide el volumen en placas delgadas paralelas al plano yz, se puede determinar C a partir de la relación

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el}\,dV \quad (5.24)$$

realizando una *sola integración* [problema resuelto 5.13]. Para un cuerpo de revolución, dichas placas son circulares y su volumen está dado en la figura 5.28.



$\bar{x}_{el} = x$
$dV = \pi r^2\,dx$

Figura 5.28

Problemas de repaso

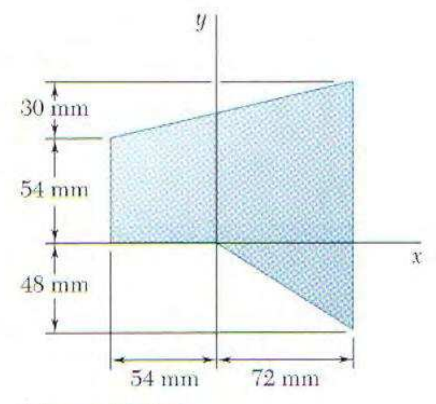


Figura P5.137

5.137 y 5.138 Localice el centroide del área plana mostrada en las figuras.

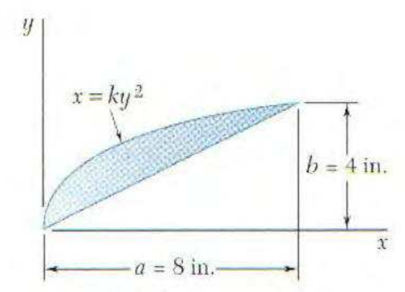


Figura P5.138

5.139 El bastidor para un señalamiento se fabrica a partir de una barra plana y delgada con 4.73 kg/m de masa por unidad de longitud. El bastidor se sostiene mediante un pasador en C y por medio de un cable AB. Determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la reacción en C.

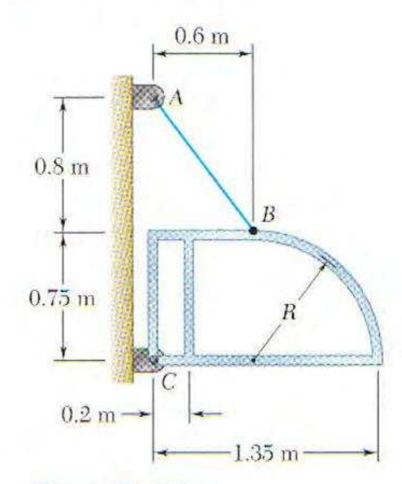


Figura *P5.139*

5.140 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de a y h.

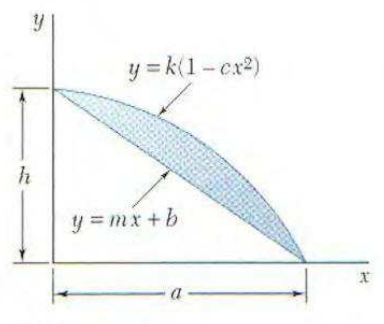


Figura P5.140

5.141 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de a y b.

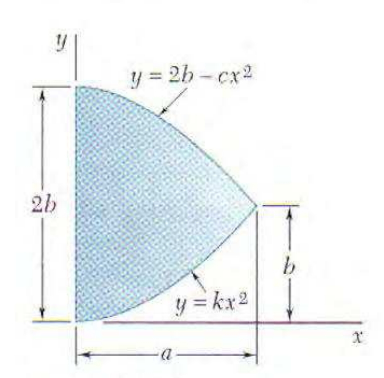


Figura P5.141

5.142 Si se sabe que se han retirado dos tapas iguales de la esfera de madera con 10 in. de diámetro que se muestra en la figura, determine el área superficial total de la porción restante.

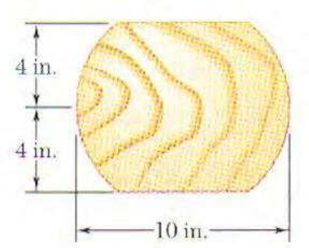
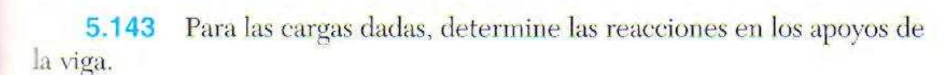


Figura *P5.142*



5.143 Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de la viga.

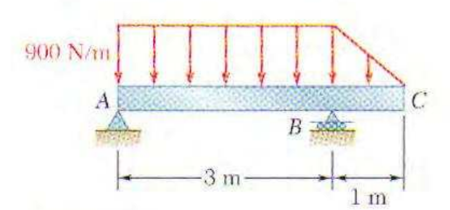


Figura P5.143

5.144 Una viga está sometida a una carga descendente linealmente distribuida y descansa sobre dos apoyos anchos BC y DE, los cuales ejercen cargas ascendentes uniformemente distribuidas como se muestra en la figura. Determine los valores de w_{BC} y w_{DE} que corresponden a la posición de equilibrio cuando $w_A = 600$ N/m.

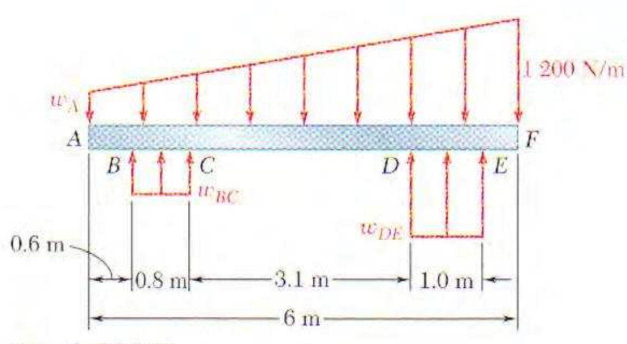


Figura *P5.144*

5.145 La compuerta cuadrada AB se mantiene en la posición mostrada en la figura mediante bisagras a lo largo de su extremo superior A y por medio de un pasador cortante en B. Determine la fuerza ejercida por el pasador sobre la compuerta si la profundidad del agua es $d = 3.5$ ft.

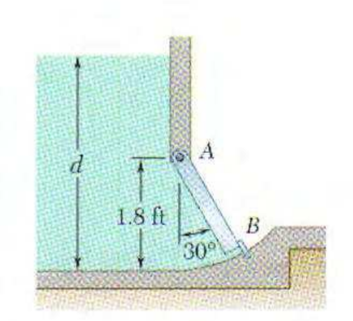


Figura *P5.145*

5.146 Considere el cuerpo compuesto que se muestra en la figura. Determine *a*) el valor de $\bar{x}$ cuando $h = L/2$, *b*) la relación h/L para la cual $\bar{x} = L$.

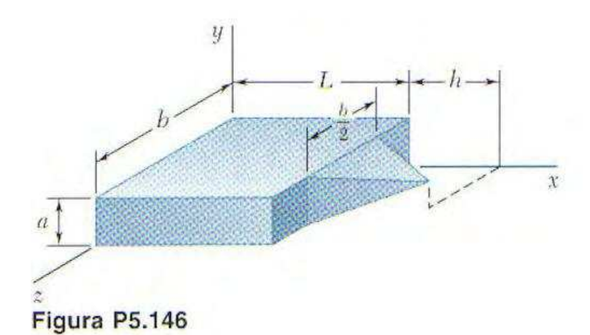


Figura P5.146

5.147 Localice el centro de gravedad de una hoja metálica que tiene la forma mostrada en la figura.

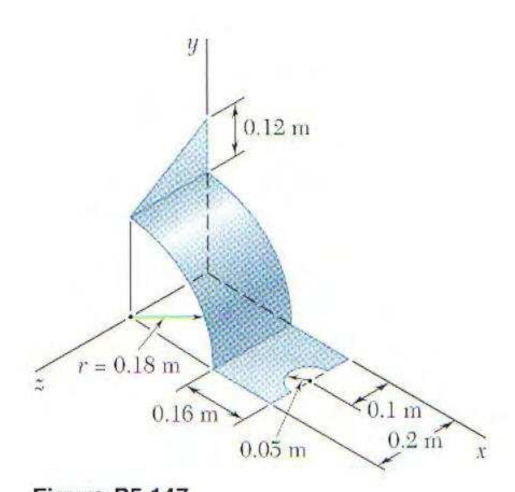


Figura P5.147

5.148 Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área mostrada alrededor del eje *x*.

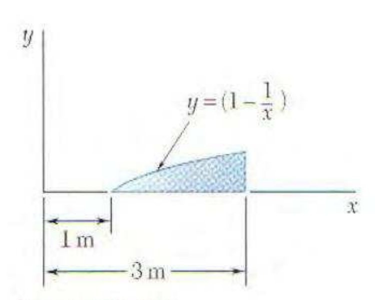
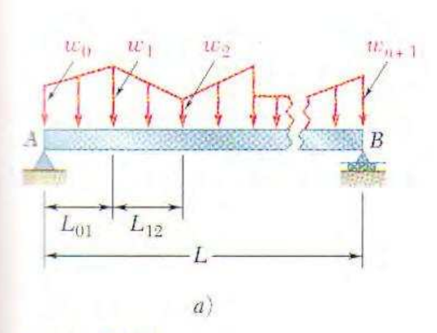
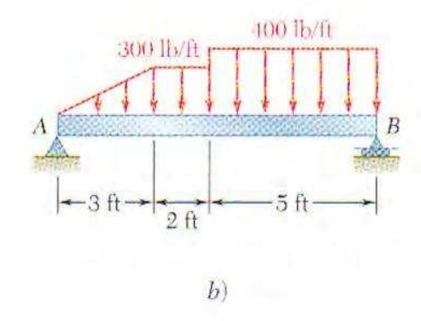


Figura P5.148

Problemas de computadora

5.C1 Una viga debe soportar una serie de cargas uniformemente distribuidas y variantes, como se muestra en la parte *a*) de la figura. Divida el área bajo cada porción de la curva de carga en dos triángulos (vea el problema resuelto 5.9) y después use software para calcular las reacciones en *A* y *B*. Utilice el software para calcular las reacciones en los apoyos de las vigas mostradas en las partes *b*) y *c*) de la figura.





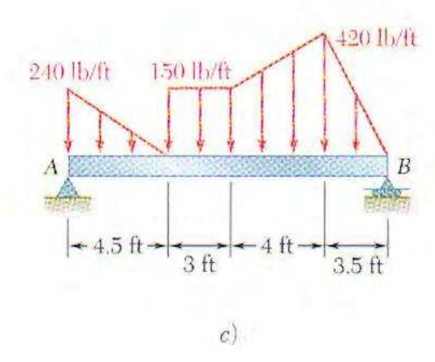


Figura P5.C1

5.C2 La estructura tridimensional que se muestra en la figura está fabricada a partir de cinco barras delgadas de acero de igual diámetro. Use software para determinar las coordenadas del centro de gravedad de la estructura. Localice las coordenadas del centro de gravedad cuando *a*) $h = 12$ m, $R = 5$ m, $\alpha = 90°$; *b*) $h = 570$ mm, $R = 760$ mm, $\alpha = 30°$; *c*) $h = 21$ m, $R = 20$ m, $\alpha = 135°$.

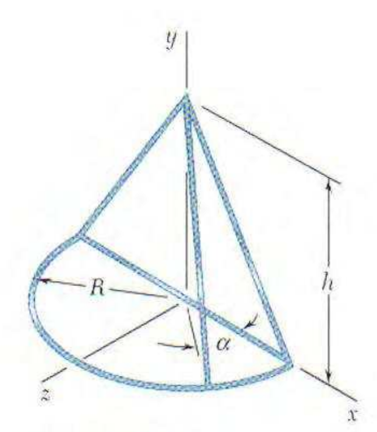


Figura P5.C2

5.C3 Un tanque abierto debe llenarse lentamente con agua. (La densidad del agua es de 10^3 kg/m^3.) Utilice software para determinar la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre una sección de 1 m de ancho en el lado *ABC* del tanque. Determine la resultante de las fuerzas de presión para valores de *d* desde 0 hasta 3 m, con incrementos de 0.25 m.

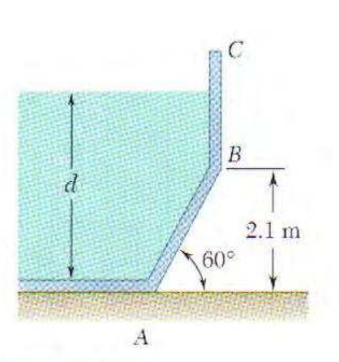
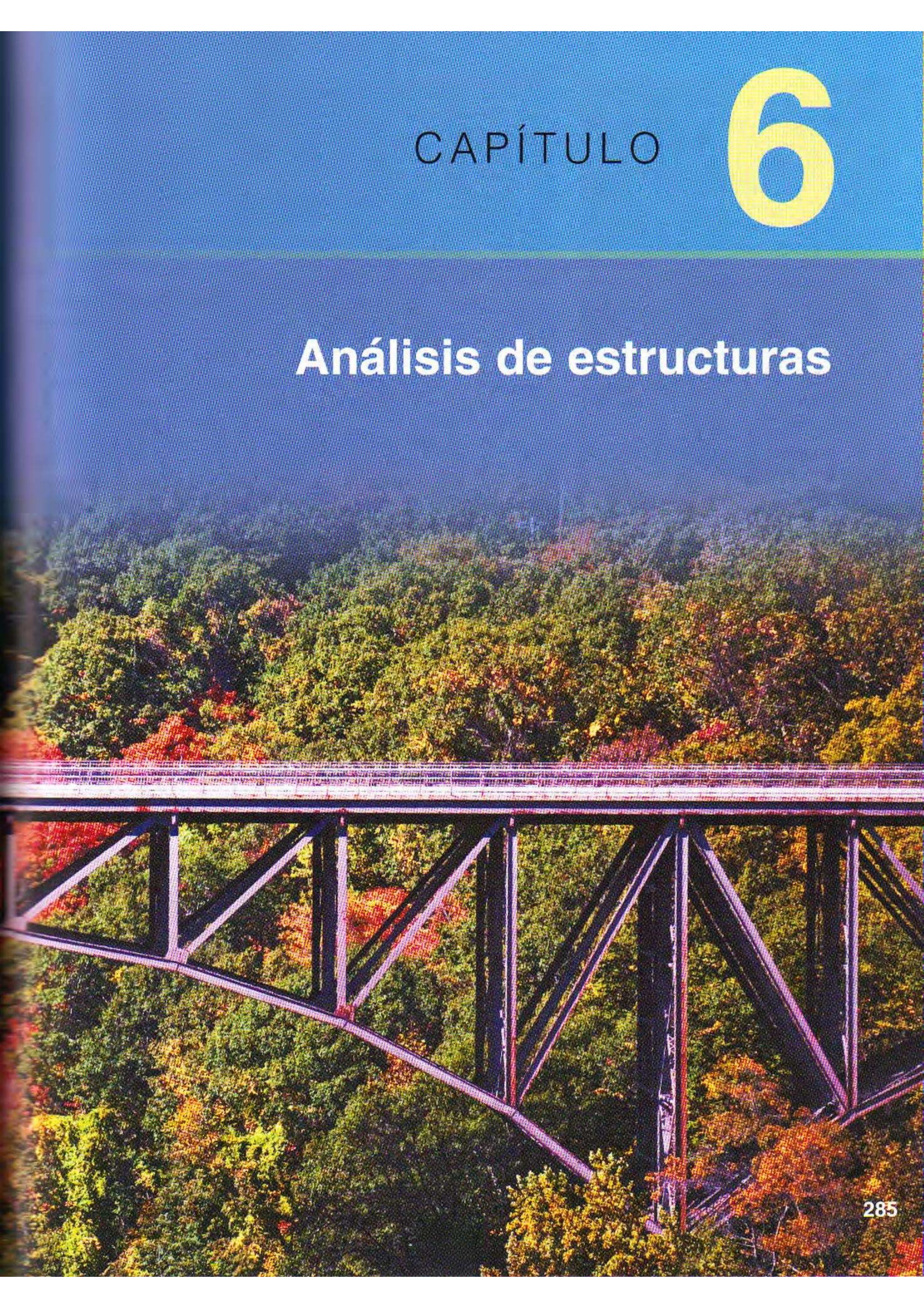


Figura P5.C3



Las armaduras, como este puente de arco en voladizo estilo Pratt en el estado de Nueva York, proporcionan una solución práctica y económica para muchos problemas de ingeniería.



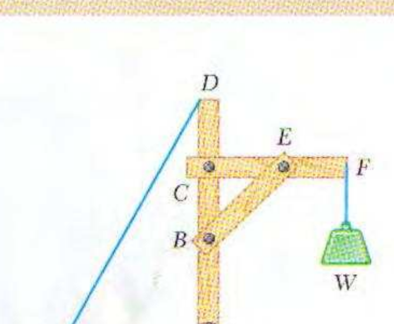
CAPÍTULO 6

Análisis de estructuras

6.1. INTRODUCCIÓN

Los problemas considerados en los capítulos anteriores estuvieron relacionados con el equilibrio de un solo cuerpo rígido y todas las fuerzas involucradas eran externas a este último. A continuación se estudian problemas que tratan sobre el equilibrio de estructuras formadas por varias partes que están conectadas entre sí. Estos problemas, además de determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura, implican calcular las fuerzas que mantienen unidas a las diversas partes que la constituyen. Desde el punto de vista de la estructura como un todo, estas fuerzas son *fuerzas internas*.

Por ejemplo, considérese la grúa mostrada en la figura 6.1*a*, la cual soporta una carga W. La grúa consta de tres vigas AD, CF y BE que están conectadas por medio de pernos sin fricción; la grúa está apoyada por un perno en A y un cable DG. La figura 6.1*b* representa el diagrama de cuerpo libre de la grúa. Las fuerzas externas que se muestran en el diagrama incluyen al peso $\mathbf{W}$, a las dos componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ de la reacción en A y a la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable en D. Las fuerzas internas que mantienen unidas las diversas partes de la grúa no aparecen en el diagrama. Sin embargo, si se desarma la grúa y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen, las fuerzas que mantienen unidas a las tres vigas también estarán representadas puesto que dichas fuerzas son externas desde el punto de vista de cada una de las partes que forman la grúa (figura 6.1*c*).



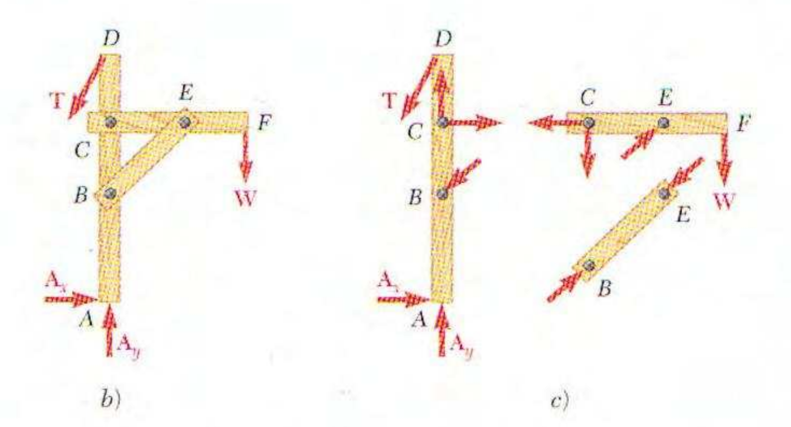
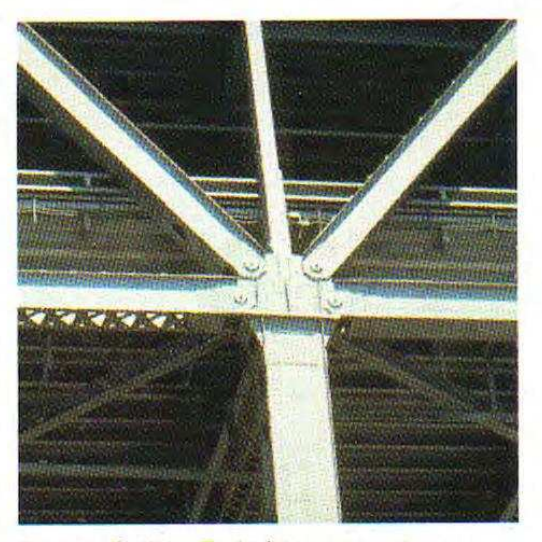


Figura 6.1

Se debe señalar que la fuerza ejercida en B por el elemento BE sobre el elemento AD se ha representado como igual y opuesta a la fuerza ejercida en ese mismo punto por el elemento AD sobre el elemento BE; la fuerza ejercida en E por el elemento BE sobre el elemento CF se muestra igual y opuesta a la fuerza ejercida por el elemento CF sobre el elemento BE y las componentes de la fuerza ejercida en C por el elemento CF sobre el elemento AD se presentan iguales y opuestas a las componentes de la fuerza ejercida por el elemento AD sobre el elemento CF. Lo anterior está sujeto a la tercera ley de Newton, la cual establece que *las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos*. Como se señaló en el capítulo 1, esta ley, que está basada en la evidencia experimental, es uno de los seis principios fundamentales de la mecánica elemental y su aplicación es esencial para la solución de problemas que involucran a cuerpos que están conectados entre sí.

En este capítulo se considerarán tres categorías amplias de estructuras de ingeniería.

1. *Armaduras*, las cuales están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. Por tanto, los elementos de una armadura son *elementos sujetos a dos fuerzas*, esto es, elementos sobre los cuales actúan dos fuerzas iguales y opuestas que están dirigidas a lo largo del elemento.
2. *Armazones*, los cuales están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Sin embargo, como en el caso de la grúa de la figura 6.1, los armazones siempre contienen por lo menos un *elemento sujeto a varias fuerzas*, esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento.
3. *Máquinas*, las cuales están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas, son estructuras que contienen partes en movimiento. Las máquinas, al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas.



Fotografía 6.1 En la foto se muestra una conexión con juntas de pasador sobre el acceso al puente de la Bahía de San Francisco y Oakland.

ARMADURAS

6.2. DEFINICIÓN DE UNA ARMADURA

La armadura es uno de los principales tipos de estructuras que se usan en la ingeniería. Ésta proporciona una solución práctica y económica para muchas situaciones de ingeniería, en especial para el diseño de puentes y edificios. En la figura 6.2*a* se muestra una armadura típica. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos. Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura 6.2*a* no existe un elemento AB, en su lugar existen dos elementos distintos AD y DB. La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.

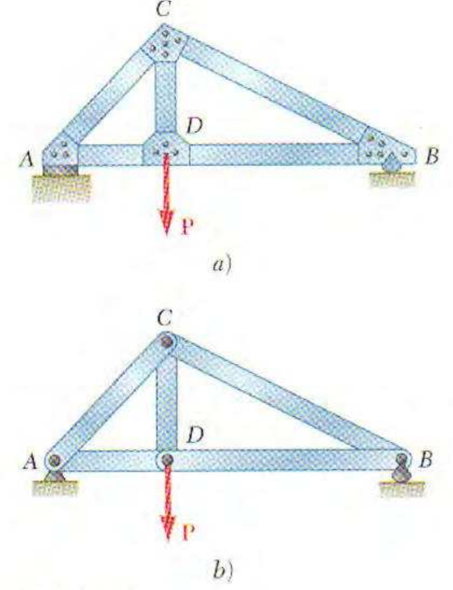


Figura 6.2

Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de piso, el cual, mediante el uso de travesaños y largueros, transmite la carga a los nodos (figura 6.3).

Los pesos de los elementos de la armadura los cargan los nodos, aplicándose la mitad del peso de cada elemento a cada uno de los nodos a los que éste se conecta. A pesar de que en realidad los elementos están unidos entre sí por medio de conexiones romachadas o soldadas, es común suponer que los elementos están conectados por medio de pernos; por tanto, las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos del elemento se reducen a una sola fuerza y no existe un par. De

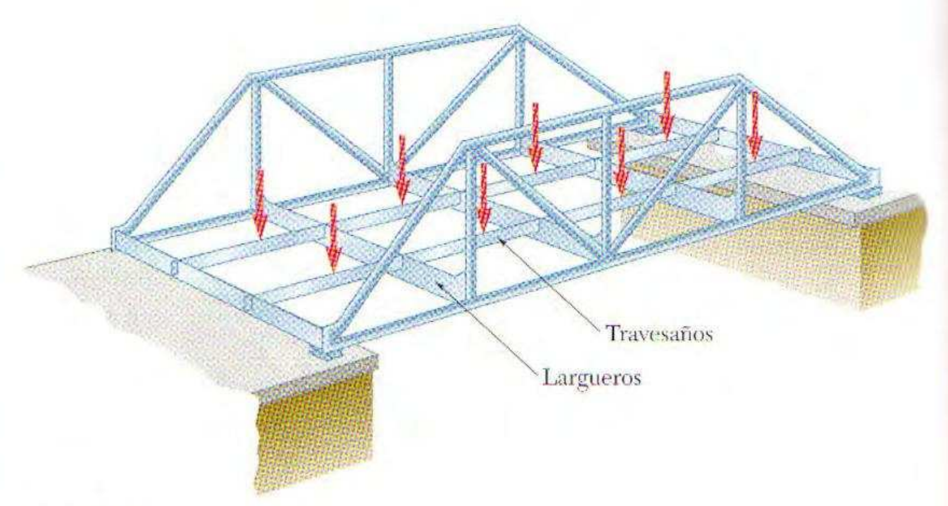


Figura 6.3

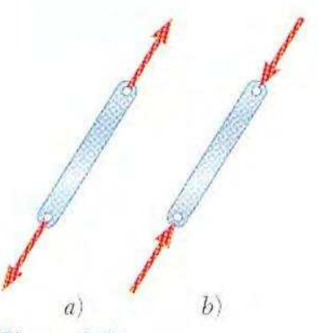


Figura 6.4

esta forma se supone que las únicas fuerzas que actúan sobre un elemento de la armadura son una sola fuerza en cada uno de los extremos del elemento. Entonces, cada elemento puede tratarse como sometido a la acción de dos fuerzas, mientras que la armadura, como un todo, puede considerarse como un grupo de pernos y elementos sujetos a dos fuerzas (figura 6.2*b*). Sobre un elemento individual pueden actuar fuerzas, como las que se muestran en cualquiera de los croquis de la figura 6.4. En la figura 6.4*a* las fuerzas tienden a estirar al elemento y éste está en tensión; en la figura 6.4*b* las fuerzas tienden a comprimir al elemento y el mismo está en compresión. En la figura 6.5 se muestran algunas armaduras típicas.

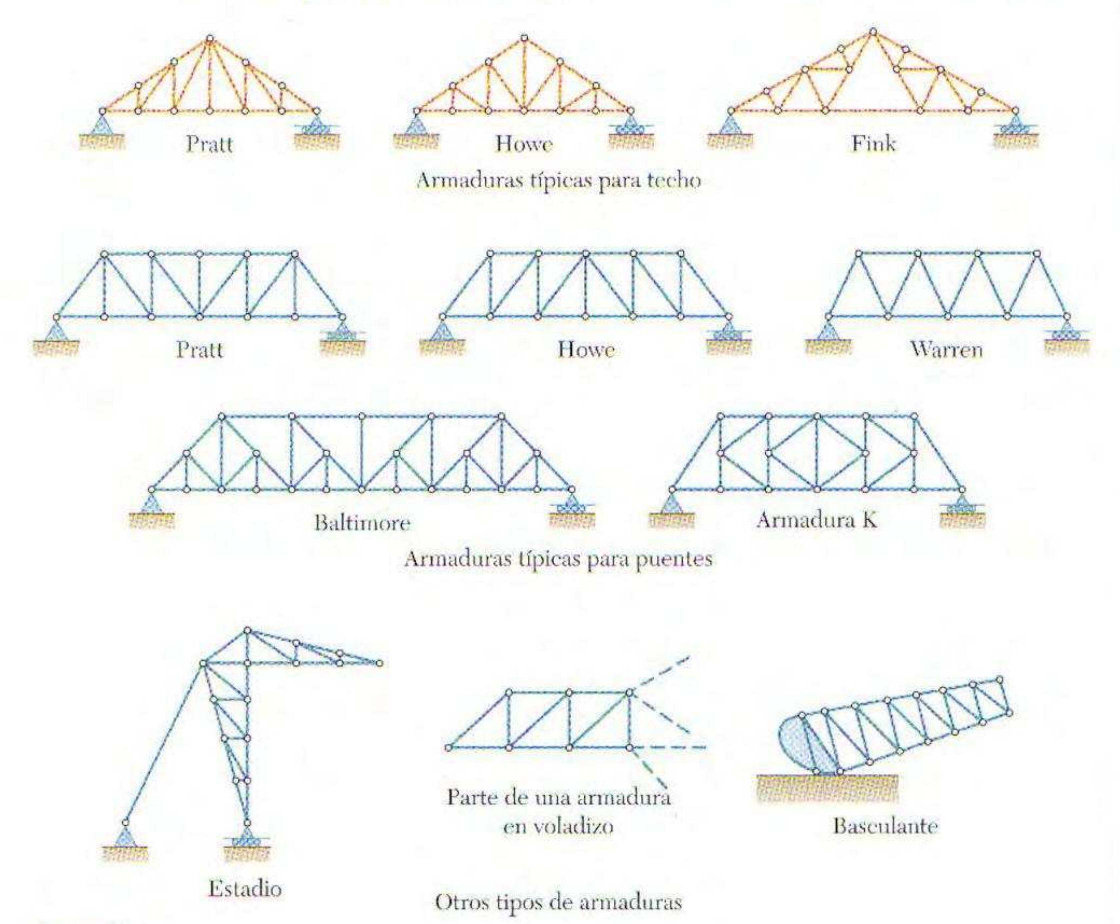


Figura 6.5

6.3. ARMADURAS SIMPLES

Considere la armadura mostrada en la figura 6.6*a*, la cual está constituida por cuatro elementos conectados por medio de pernos en *A*, *B*, *C* y *D*. Si se aplica una carga en *B*, la armadura se deformará hasta perder por completo su forma original. Por el contrario, la armadura de la figura 6.6*b*, la cual está constituida por tres elementos conectados por medio de pernos en *A*, *B* y *C*, sólo se deformará ligeramente bajo la acción de una carga aplicada en *B*. La única deformación posible para esta armadura es la que involucra pequeños cambios en la longitud de sus elementos. Por tanto, se dice que la armadura de la figura 6.6*b* es una *armadura rígida*, aquí el término rígida se ha empleado para indicar que la armadura *no se colapsará*.

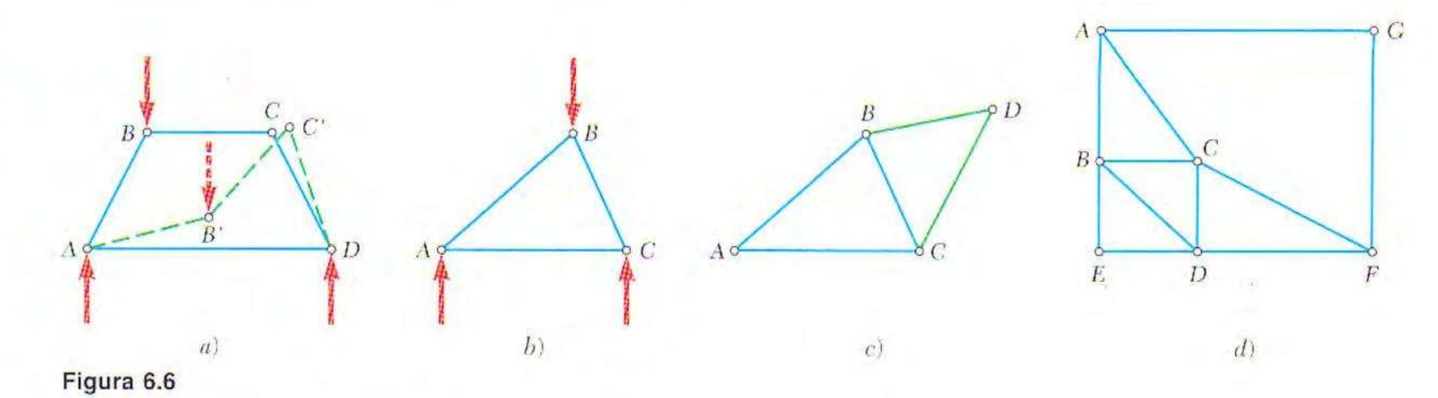
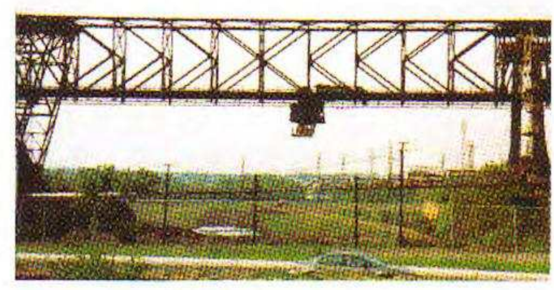


Figura 6.6

Como se muestra en la figura 6.6*c*, se puede obtener una armadura rígida más grande agregando dos elementos *BD* y *CD* a la armadura triangular básica de la figura 6.6*b*. Este procedimiento se puede repetir tantas veces como se desee y la armadura resultante será rígida si cada vez que se agregan dos nuevos elementos, éstos se unen a dos nodos ya existentes y además se conectan entre sí en un nuevo nodo.[1] Una armadura que se puede construir de esta forma recibe el nombre de *armadura simple*.

Se debe señalar que una armadura simple no está hecha necesariamente a partir de triángulos. Por ejemplo, la armadura de la figura 6.6*d* es una armadura simple que fue construida a partir del triángulo *ABC* y se agregaron sucesivamente los nodos *D*, *E*, *F* y *G*. Por otra parte, las armaduras rígidas no siempre son armaduras simples, incluso cuando parecen estar hechas de triángulos. Por ejemplo, las armaduras de Fink y Baltimore mostradas en la figura 6.5, no son armaduras simples, puesto que no pueden construirse a partir de un solo triángulo en la forma descrita en el párrafo anterior. Todas las demás armaduras que se muestran en la figura 6.5 son armaduras simples, lo cual se puede verificar fácilmente. (Para la armadura K se debe comenzar con uno de los triángulos centrales.)

En la figura 6.6 se observa que la armadura triangular básica de la figura 6.6*b* tiene tres elementos y tres nodos. La armadura de la figura 6.6*c* tiene dos elementos y un nodo adicionales, esto es, cinco elementos y cuatro nodos en total. Si se tiene presente que cada vez que se agregan dos nuevos elementos el número de nodos se incrementa en uno, se encuentra que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos.



Fotografía 6.2 Dos armaduras K se usaron como los principales componentes del puente móvil que se muestra en la foto, el cual se movía por encima de un gran montón de mineral de reserva. El cubo que se encuentra debajo de las armaduras levantaba mineral y lo redepositaba hasta que el mineral estuvo completamente mezclado. Después, el mineral se envió al molino para incorporarlo a un proceso de producción de acero.

[1] Los tres nodos no deben ser colineales.

6.4. ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS NODOS

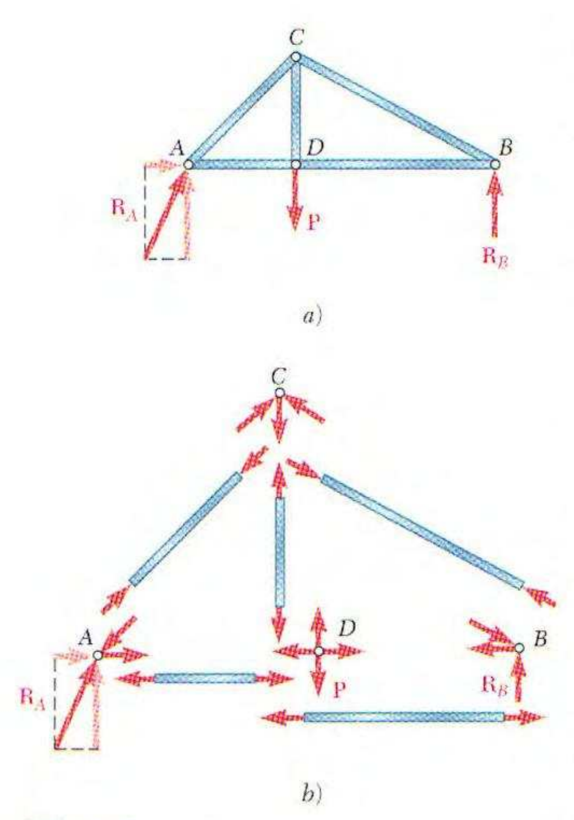
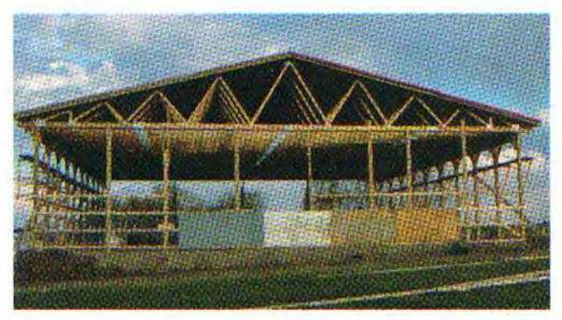


Figura 6.7

En la sección 6.2 se vio que una armadura puede ser considerada como un grupo de pernos y elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. Por tanto, la armadura de la figura 6.2, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.7*a*, se puede desarmar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada perno y para cada elemento (figura 6.7*b*). Cada elemento está sometido a la acción de dos fuerzas, una en cada uno de sus extremos; estas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.6). Además, la tercera ley de Newton indica que las fuerzas de acción y reacción entre un elemento y un perno son iguales y opuestas. Por tanto, las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los cuales se conecta deben estar dirigidos a lo largo de ese elemento y deben ser iguales y opuestas. Con frecuencia se hace referencia a la magnitud común de las fuerzas ejercidas por un elemento sobre los dos pernos a los que se conecta como la *fuerza en el elemento* bajo consideración, a pesar de que esta cantidad en realidad es un escalar. Como las líneas de acción de todas las fuerzas internas en una armadura son conocidas, el análisis de una armadura se reduce a calcular las fuerzas en los elementos que la constituyen y a determinar si cada uno de dichos elementos está en tensión o en compresión.

Como la armadura en su totalidad está en equilibrio, cada perno debe estar en equilibrio. El que un perno esté en equilibrio se expresa dibujando su diagrama de cuerpo libre y escribiendo dos ecuaciones de equilibrio (sección 2.9). Por tanto, si una armadura tiene n pernos, habrá $2n$ ecuaciones disponibles, las cuales podrán resolverse para $2n$ incógnitas. En el caso de una armadura simple, se tiene que $m = 2n - 3$, esto es, $2n = m + 3$, y el número de incógnitas que se pueden determinar a partir de los diagramas de cuerpo libre de los pernos es $m + 3$. Esto significa que las fuerzas en todos los elementos, las dos componentes de la reacción $\mathbf{R}_A$ y la reacción $\mathbf{R}_B$ se determinan considerando los diagramas de cuerpo libre de los pernos.

El hecho de que la armadura como un todo sea un cuerpo rígido que está en equilibrio, se puede utilizar para escribir tres ecuaciones adicionales que involucran a las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.7*a*. Puesto que estas ecuaciones no contienen ninguna información nueva, son independientes de las ecuaciones asociadas con los diagramas de cuerpo libre de los pernos. Sin embargo, las tres ecuaciones en cuestión se pueden emplear para determinar las componentes de las reacciones en los apoyos. El arreglo de pernos y elementos en una armadura simple es tal que siempre será posible encontrar un nodo que involucre únicamente a dos fuerzas desconocidas. Estas fuerzas se determinan por medio de los métodos de la sección 2.11 y sus valores se transfieren a los nodos adyacentes tratándolos como cantidades conocidas en dichos nodos, este procedimiento se repite hasta determinar todas las fuerzas desconocidas.



Fotografía 6.3 Las armaduras para techo, como las que se muestran en la foto, requieren apoyo sólo en los extremos. Gracias a esto es posible realizar construcciones con grandes áreas libres de obstáculos en el piso.

Como ejemplo se analiza la armadura de la figura 6.7, en la que se considera sucesivamente el equilibrio de cada perno; se inicia con el nodo en el cual sólo dos fuerzas son desconocidas. En dicha armadura todos los pernos están sujetos a cuando menos tres fuerzas desconocidas. Por tanto, primero se deben determinar las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como cuerpo libre y utilizando las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido. De esta forma, $\mathbf{R}_A$ es vertical y se determinan las magnitudes de $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$.

Entonces el número de fuerzas desconocidas en el nodo A se reduce a dos y estas fuerzas se pueden determinar considerando el equilibrio del perno A. La reacción $\mathbf{R}_A$ y las fuerzas $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ ejercidas sobre el perno A por los elementos AC y AD, respectivamente, deben formar un triángulo de fuerzas. Primero se dibuja $\mathbf{R}_A$ (figura 6.8); luego si $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ están dirigidas a lo largo de AC y AD, respectivamente, se completa el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$. Las magnitudes F_{AC} y F_{AD} representan las fuerzas en los elementos AC y AD. Como $\mathbf{F}_{AC}$ está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, esto es, *hacia* el nodo A, el elemento AC empuja el perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en compresión. Como $\mathbf{F}_{AD}$ está dirigida *alejándose* del nodo A, el elemento AD jala al perno A y, por consiguiente, dicho elemento está en tensión.

	Diagrama de cuerpo libre	Polígono de fuerza
Nodo A	A, $\mathbf{F}_{AC}$, $\mathbf{F}_{AD}$, $\mathbf{R}_A$	$\mathbf{F}_{AC}$, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{F}_{AD}$
Nodo D	$\mathbf{F}_{DC}$, $\mathbf{F}_{DA}$, $\mathbf{F}_{DB}$, D, $\mathbf{P}$	$\mathbf{F}_{DB}$, $\mathbf{F}_{DC}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}_{DA}$
Nodo C	C, $\mathbf{F}_{CA}$, $\mathbf{F}_{CB}$, $\mathbf{F}_{CD}$	$\mathbf{F}_{CB}$, $\mathbf{F}_{CD}$, $\mathbf{F}_{CA}$
Nodo B	$\mathbf{F}_{BC}$, $\mathbf{F}_{BD}$, B, $\mathbf{R}_B$	$\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BC}$, $\mathbf{R}_B$

Figura 6.8

Ahora se procede a considerar el nodo D en el cual sólo dos fuerzas, $\mathbf{F}_{DC}$ y $\mathbf{F}_{DB}$, aún son desconocidas. Las otras fuerzas que actúan sobre dicho nodo son la carga $\mathbf{P}$, la cual es un dato y la fuerza $\mathbf{F}_{DA}$ ejercida sobre el perno por el elemento AD. Como se señaló antes, esta última fuerza es igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{AD}$ ejercida por el mismo elemento sobre el perno A. Como se muestra en la figura 6.8, se puede dibujar el polígono de fuerzas correspondiente al nodo D y deter-

minar las fuerzas $\mathbf{F}_{DC}$ y $\mathbf{F}_{DB}$ a partir de dicho polígono. Sin embargo, cuando están involucradas más de tres fuerzas, es más conveniente resolver las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para las dos fuerzas desconocidas. Como se encuentra que ambas fuerzas se alejan del nodo D, los elementos DC y DB jalan al perno y se concluye que ambos están en tensión.

Después se considera el nodo C, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.8. Se observa que tanto $\mathbf{F}_{CD}$ como $\mathbf{F}_{CA}$ son conocidas a partir del análisis de los nodos anteriores y que sólo $\mathbf{F}_{CB}$ es desconocida. Como el equilibrio de cada perno proporciona suficiente información para determinar dos incógnitas, se obtiene una comprobación del análisis realizado en este nodo. Se dibuja el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y el sentido de $\mathbf{F}_{CB}$. Como $\mathbf{F}_{CB}$ está dirigida hacia el nodo C, el elemento CB empuja al perno C y, por tanto, está en compresión. La comprobación se obtiene al verificar que la fuerza $\mathbf{F}_{CB}$ y el elemento CB son paralelos.

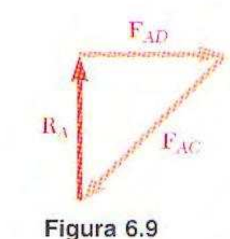


Figura 6.9

En el nodo B todas las fuerzas son conocidas. Puesto que el perno correspondiente está en equilibrio, el triángulo de fuerzas debe cerrar, obteniéndose de esta forma una comprobación adicional del análisis realizado.

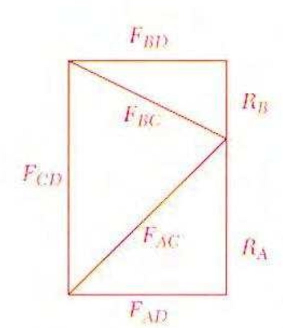


Figura 6.10

Es importante señalar que los polígonos de fuerza mostrados en la figura 6.8 no son únicos. Cada uno de ellos podría reemplazarse por una configuración alterna. Por ejemplo, el triángulo de fuerzas correspondiente al nodo A podría dibujarse como el de la figura 6.9. El triángulo mostrado en la figura 6.8 se obtuvo dibujando las tres fuerzas $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ uniendo la parte terminal de una con la parte inicial de otra, en el orden en el que se encuentran sus líneas de acción, al realizar un desplazamiento en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del nodo A. Los otros polígonos de fuerzas en la figura 6.8 se dibujaron de la misma forma, por ello se pueden reunir en un solo diagrama, como se ilustra en la figura 6.10. Un diagrama de este tipo, conocido como *diagrama de Maxwell*, facilita en gran medida el *análisis gráfico* de problemas que involucran armaduras.

*6.5. NODOS BAJO CONDICIONES ESPECIALES DE CARGA

Observe la figura 6.11*a*, en la cual el nodo conecta a cuatro elementos que están ubicados sobre dos líneas rectas que se intersecan. El diagrama de cuerpo libre de la figura 6.11*b* muestra que el perno A está sujeto a dos pares de fuerzas directamente opuestas. Por tanto, el polígono de fuerzas debe ser un paralelogramo (figura 6.11*c*) y *las fuerzas en elementos opuestos deben ser iguales.*

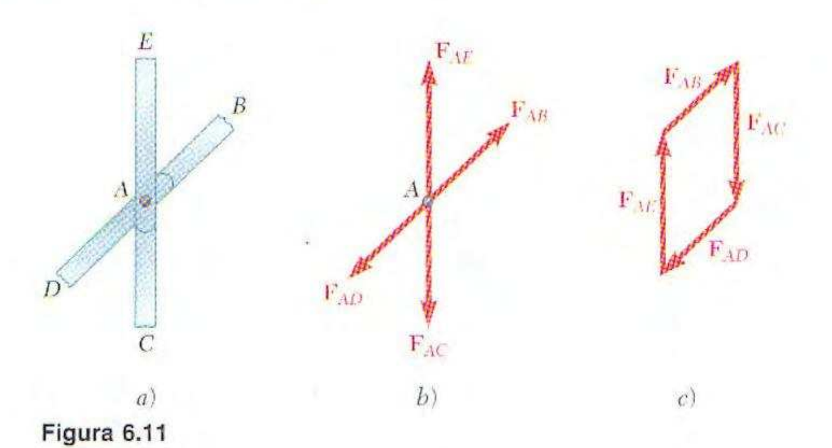


Figura 6.11

A continuación considere la figura 6.12*a*, en la cual el nodo mostrado conecta tres elementos y soporta una carga **P**. Dos de los elementos se encuentran ubicados sobre la misma línea y la carga **P** actúa a lo largo del tercer elemento. El diagrama de cuerpo libre del perno *A* y el polígono de fuerzas correspondiente serán como se muestran en la figura 6.11*b* y *c*, reemplazando a $\mathbf{F}_{AE}$ por la carga **P**. Por tanto, *las fuerzas en los dos elementos opuestos deben ser iguales y la fuerza en el otro elemento debe ser igual a P*. En la figura 6.12*b* se muestra un caso de especial interés, en el que no hay una fuerza externa aplicada en el nodo, se tiene que $P = 0$, y la fuerza en el elemento *AC* es igual a cero. Por tanto, se dice que el elemento *AC* es un *elemento de fuerza cero*.

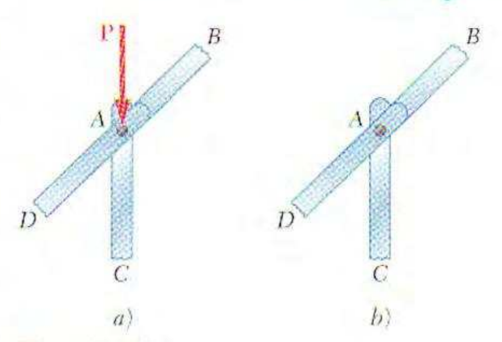


Figura 6.12

Considere ahora un nodo que conecta sólo dos elementos. A partir de la sección 2.9 se sabe que una partícula sobre la que actúan dos fuerzas estará en equilibrio si las dos fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. En el caso del nodo de la figura 6.13*a*, el cual conecta a dos elementos *AB* y *AD* que se encuentran sobre la misma línea, *las fuerzas en los dos elementos deben ser iguales* para que el perno *A* esté en equilibrio. En el caso del nodo de la figura 6.13*b*, el perno *A* no puede estar en equilibrio a menos que las fuerzas en ambos elementos sean iguales a cero. Por tanto, los elementos conectados como se muestra en la figura 6.13*b* deben ser *elementos de fuerza cero*.

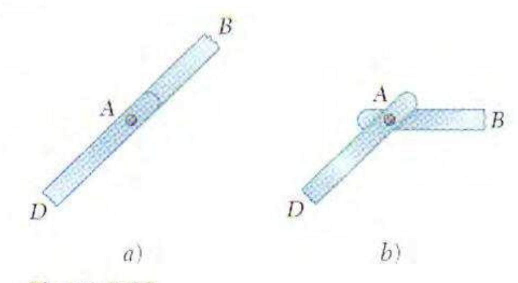


Figura 6.13

La identificación de los nodos que se encuentran bajo las condiciones especiales de carga mencionadas en los párrafos anteriores, permitirá que el análisis de una armadura se lleve a cabo más rápido. Por ejemplo, considere una armadura tipo Howe cargada, como se muestra en la figura 6.14; todos los elementos representados por líneas en color serán reconocidos como elementos de fuerza cero. El nodo *C* conecta a tres elementos, dos de los cuales se encuentran sobre la misma línea y no está sujeto a cargas externas; por tanto, el elemento *BC* es un elemento de fuerza cero. Si se aplica el mismo razonamiento al nodo *K*, se encuentra que el elemento *JK* también es un elemento de fuerza cero. Ahora, el nodo *J* está en la misma situación que los nodos *C* y *K*, entonces el elemento *IJ* debe ser un elemento de fuerza cero. La observación de los nodos *C*, *J* y *K* revela que las fuerzas en los elementos *AC* y *CE* son iguales, las fuerzas en los elementos *HJ* y *JL* son también iguales, así como las fuerzas en los elementos *IK* y *KL*. Regresando la atención al nodo *I*, donde la carga de 20 kN y el elemento *HI* son colineales, se observa que la fuerza en el elemento *HI* es de 20 kN (tensión) y que las fuerzas en los elementos *GI* e *IK* son iguales. De esta manera, se concluye que las fuerzas en los elementos *GI*, *IK* y *KL* son iguales.

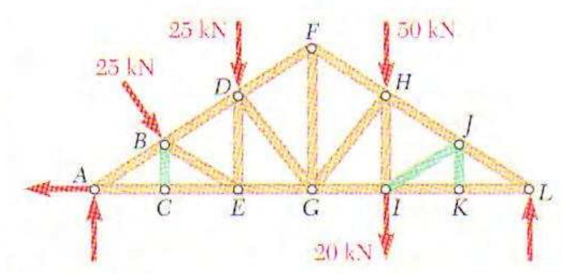


Figura 6.14

Se debe observar que las condiciones descritas en el párrafo anterior no pueden aplicarse a los nodos *B* y *D* de la figura 6.14 y sería erróneo suponer que la fuerza en el elemento *DE* es de 25 kN o que las fuerzas en los elementos *AB* y *BD* son iguales. Las fuerzas en estos elementos y en los restantes se encuentran con el análisis de los nodos *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* y *L* en la forma habitual. Por tanto, hasta que se esté familiarizado con las condiciones que permiten aplicar las reglas establecidas en esta sección, se debe dibujar el diagrama de cuerpo libre de todos los pernos y escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes (o dibujar los polígonos de fuerzas correspondientes) sin importar si los medios considerados se encuentran bajo una de las condiciones especiales de carga que se describieron anteriormente.



Fotografía 6.4 Las armaduras tridimensionales o espaciales se usan para las torres de transmisión de energía eléctrica y señales en estructuras de techo y para aplicaciones a naves espaciales, como en los componentes de la *Estación Espacial Internacional*.

Un comentario final en relación con los elementos de fuerza cero: estos elementos no son inútiles. Por ejemplo, a pesar de que los ele-

mentos de fuerza cero de la figura 6.14 no soportan ninguna carga bajo las condiciones mostradas, es probable que los mismos elementos podrían soportar alguna si se cambiaran las condiciones de carga. Además, incluso en el caso considerado, estos elementos son necesarios para soportar el peso de la armadura y para mantener a esta última con la forma deseada.

*6.6. ARMADURAS EN EL ESPACIO O ESPACIALES

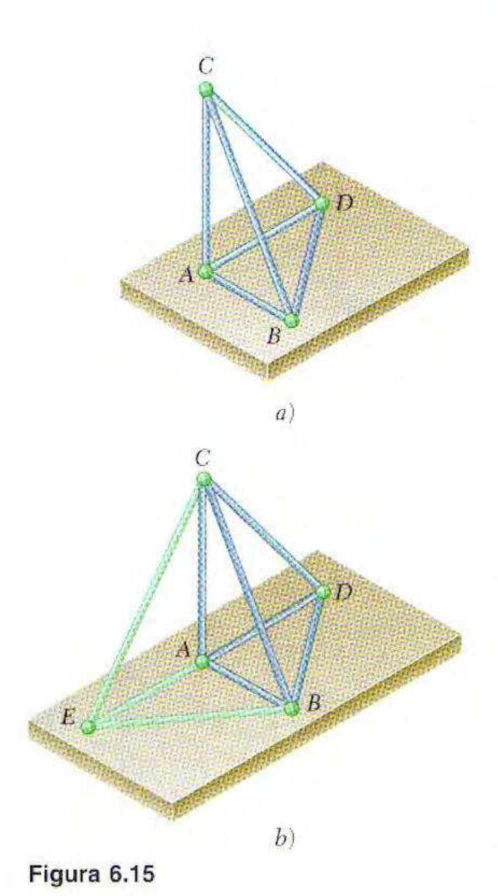


Figura 6.15

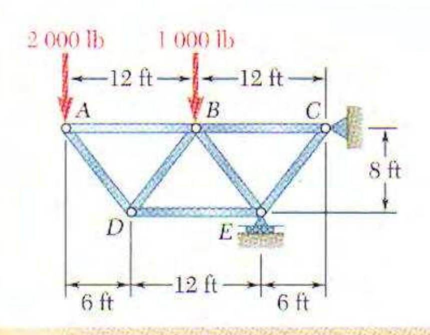
Cuando varios elementos rectos se unen en sus extremos para formar una configuración tridimensional, la estructura obtenida recibe el nombre de *armadura en el espacio* o *espacial*.

En la sección 6.3 se estableció que la mayoría de las armaduras rígidas bidimensionales elementales consistían de tres elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un triángulo; al agregar dos elementos a esta configuración básica y conectándolos en un nuevo nodo, se obtiene una estructura rígida más grande, la cual fue definida como una armadura simple. En forma similar, la armadura rígida básica en el espacio está constituida por seis elementos unidos en sus extremos para formar los lados de un tetraedro $ABCD$ (figura 6.15*a*). Si se agregan tres elementos a esta configuración básica, como los elementos AE, BE y CE, uniéndolos a los tres nodos existentes y conectándolos en un nuevo nodo,[†] se puede obtener una estructura rígida más grande, la cual se define como una *armadura simple en el espacio* (figura 6.15*b*). Observe que el tetraedro básico tiene seis elementos y cuatro nodos y que cada vez que se agregan tres elementos el número de nodos se incrementa en uno, se concluye que en una armadura espacial simple el número total de elementos es $m = 3n - 6$, donde n es el número total de nodos.

Si una armadura espacial debe tener restricción completa y si las reacciones en sus apoyos deben ser estáticamente determinadas, los apoyos deben consistir en una combinación de bolas, rodillos y rótulas que proporcionen un total de seis reacciones desconocidas (véase sección 4.9). Estas reacciones desconocidas se determinan al resolver las seis ecuaciones que expresan que la armadura tridimensional está en equilibrio.

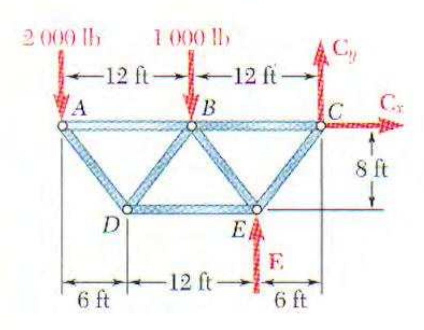
A pesar de que los elementos de una armadura en el espacio están unidos por conexiones soldadas o remachadas, se supone que cada nodo consiste en una conexión tipo rótula. Por tanto, no se aplicará ningún par a los elementos de la armadura y cada elemento puede tratarse como un elemento sometido a la acción de dos fuerzas. Las condiciones de equilibrio para cada nodo estarán expresadas por las tres ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$. Entonces, en el caso de una armadura simple en el espacio que contiene n nodos, escribir las condiciones de equilibrio para cada nodo proporcionará un total de $3n$ ecuaciones. Como $m = 3n - 6$, estas ecuaciones serán suficientes para determinar todas las fuerzas desconocidas (las fuerzas en los m elementos y las seis reacciones en los apoyos). Sin embargo, para evitar la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas, se debe tener cuidado en seleccionar nodos en un orden tal que ninguno involucre más de tres fuerzas desconocidas.

[†] Los cuatro nodos no deben estar localizados en un plano.



PROBLEMA RESUELTO 6.1

Con el uso del método de los nodos, determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: armadura completa. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Las fuerzas que actúan en este cuerpo libre consisten en las cargas aplicadas y en las reacciones en C y en E. Se escriben las ecuaciones de equilibrio siguientes.

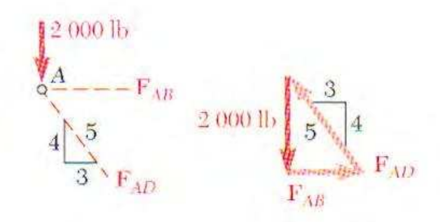
$+\circlearrowleft\Sigma M_C = 0$: $\quad (2\,000 \text{ lb})(24 \text{ ft}) + (1\,000 \text{ lb})(12 \text{ ft}) - E(6 \text{ ft}) = 0$

$E = +10\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{E} = 10\,000 \text{ lb}\uparrow$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0$: $\qquad \mathbf{C}_x = 0$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad -2\,000 \text{ lb} - 1\,000 \text{ lb} + 10\,000 \text{ lb} + C_y = 0$

$C_y = -7\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{C}_y = 7\,000 \text{ lb}\downarrow$

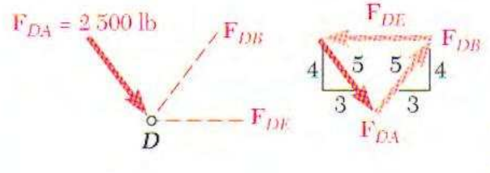


Cuerpo libre: nodo A. El nodo sujeto a dos fuerzas desconocidas, esto es, a las fuerzas ejercidas por los elementos AB y AD. Se usa un triángulo de fuerzas para determinar $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AD}$. Se observa que el elemento AB jala al nodo y, por tanto, dicho elemento está en tensión. Además, el elemento AD empuja al nodo y, por tanto, dicho elemento está en compresión. Las magnitudes de las dos fuerzas se obtienen a partir de la proporción

$$\frac{2\,000 \text{ lb}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$F_{AB} = 1\,500 \text{ lb } T$ ◀

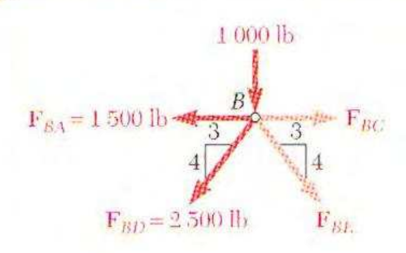
$F_{AD} = 2\,500 \text{ lb } C$ ◀



Cuerpo libre: nodo D. Como la fuerza ejercida por el elemento AD ya se determinó, ahora sólo se tienen dos incógnitas involucradas con este nodo. De nuevo se usa un triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas en los elementos DB y DE.

$F_{DB} = F_{DA} \qquad F_{DB} = 2\,500 \text{ lb } T$ ◀

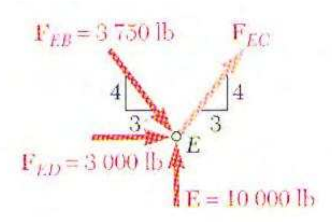
$F_{DE} = 2(\tfrac{3}{5})F_{DA} \qquad F_{DE} = 3\,000 \text{ lb } C$ ◀



Cuerpo libre: nodo *B*. Como en este nodo actúan más de tres fuerzas, se determinan las dos fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_{BC}$ y $\mathbf{F}_{BE}$ resolviendo las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. De manera arbitraria se supone que ambas fuerzas desconocidas actúan hacia fuera del nodo, esto es, que los elementos están en tensión. El valor positivo obtenido para F_{BC} indica que la suposición hecha fue correcta, por tanto, el elemento *BC* está en tensión. El valor negativo de F_{BE} indica que la suposición hecha fue incorrecta, por tanto, el elemento *BE* está en compresión.

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad -1\,000 - \tfrac{4}{5}(2\,500) - \tfrac{4}{5}F_{BE} = 0$$
$$F_{BE} = -3\,750 \text{ lb} \qquad F_{BE} = 3\,750 \text{ lb } C \;◀$$

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad F_{BC} - 1\,500 - \tfrac{3}{5}(2\,500) - \tfrac{3}{5}(3\,750) = 0$$
$$F_{BC} = +5\,250 \text{ lb} \qquad F_{BC} = 5\,250 \text{ lb } T \;◀$$

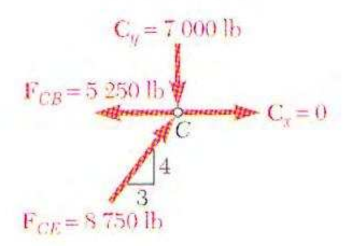


Cuerpo libre: nodo *E*. Se supone que la fuerza desconocida $\mathbf{F}_{EC}$ actúa hacia fuera del nodo. Si se suman las componentes *x*, se escribe

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad \tfrac{3}{5}F_{EC} + 3\,000 + \tfrac{3}{5}(3\,750) = 0$$
$$F_{EC} = -8\,750 \text{ lb} \qquad F_{EC} = 8\,750 \text{ lb } C \;◀$$

Al sumar las componentes *y*, se obtiene una comprobación de los cálculos realizados

$$+\uparrow\Sigma F_y = 10\,000 - \tfrac{4}{5}(3\,750) - \tfrac{4}{5}(8\,750)$$
$$= 10\,000 - 3\,000 - 7\,000 = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$



Cuerpo libre: nodo C. Con los valores de $\mathbf{F}_{CB}$ y $\mathbf{F}_{CE}$, calculados previamente, se pueden determinar las reacciones $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ considerando el equilibrio de este nodo. Como dichas reacciones ya se determinaron a partir del equilibrio de toda la armadura, se obtendrán dos verificaciones de los cálculos realizados. También se pueden usar los valores calculados de todas las fuerzas que actúan sobre el nodo (fuerzas en los elementos y reacciones) y comprobar que éste se encuentra en equilibrio:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = -5\,250 + \tfrac{3}{5}(8\,750) = -5\,250 + 5\,250 = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = -7\,000 + \tfrac{4}{5}(8\,750) = -7\,000 + 7\,000 = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a utilizar el *método de los nodos* para determinar las fuerzas en los elementos de una *armadura simple*, esto es, en una armadura que se puede construir a partir de una armadura triangular básica a la que se agregan dos nuevos elementos a la vez conectados a un nuevo nodo.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. ***Dibujar un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura*** y utilizarlo para determinar las reacciones en los apoyos.

2. ***Localizar un nodo que conecte sólo dos elementos y dibujar un diagrama de cuerpo libre de su perno.*** Este diagrama de cuerpo libre sirve para determinar la fuerza desconocida en cada uno de los elementos. Si sólo están involucradas tres fuerzas (las dos fuerzas desconocidas y una fuerza conocida), probablemente se encontrará que es más conveniente dibujar y resolver el triángulo de fuerzas correspondiente. Si están involucradas más de tres fuerzas, se deben escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio para el perno, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, suponiendo que los elementos están en tensión. Una respuesta positiva significa que el elemento está en tensión y una respuesta negativa se refiere a que el elemento está en compresión. Una vez que se han encontrado las fuerzas, se deben introducir sus valores en un croquis de la armadura, con una T para indicar tensión y una C para indicar compresión.

3. ***Después, se debe localizar un nodo en el cual sólo las fuerzas en dos de los elementos que se conectan a éste aún son desconocidas.*** Se debe dibujar el diagrama de cuerpo libre del perno y utilizarlo como se indicó en el punto anterior para determinar las dos fuerzas desconocidas.

4. ***Se debe repetir este procedimiento hasta que las fuerzas en todos los elementos de la armadura hayan sido determinadas.*** Como previamente se usaron las tres ecuaciones de equilibrio asociadas con el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura para determinar las reacciones en los apoyos, se tendrán tres ecuaciones adicionales. Estas ecuaciones sirven para comprobar que los cálculos se realizaron en forma correcta.

5. ***Es importante señalar que la selección del primer nodo no es única.*** Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos de la armadura, se selecciona cualquiera de los nodos como punto de partida para el análisis. En el problema resuelto 6.1 se comenzó en el nodo A y se procedió, de manera consecutiva, con los nodos D, B, E y C; sin embargo, también se pudo haber comenzado en el nodo C y proceder después con los nodos E, B, D y A. Por otra parte, una vez que se ha seleccionado el primer nodo, en algunos casos se puede llegar a un punto en el análisis a partir del cual ya no es posible continuar. En ese caso se debe comenzar de nuevo a partir de otro nodo para terminar la solución del problema.

Tenga en mente que el análisis de una *armadura simple* siempre se puede realizar mediante el método de los nodos. También recuerde que es útil bosquejar la solución *antes* de iniciar con cualquier cálculo.

Problemas

6.1 a 6.8 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en cada elemento de las armaduras que se muestran en las figuras. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

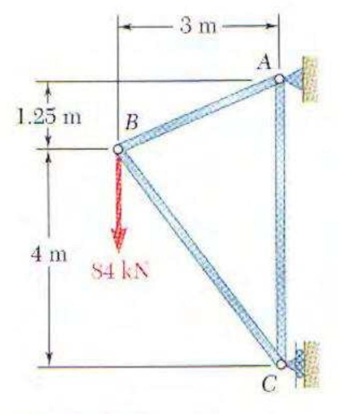


Figura P6.1

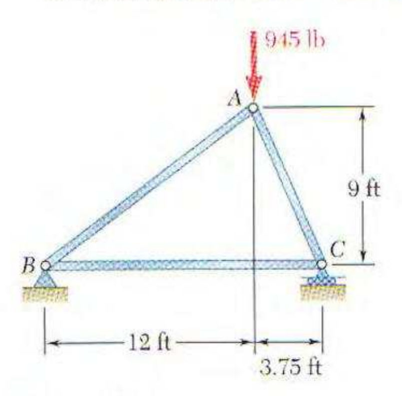


Figura P6.2

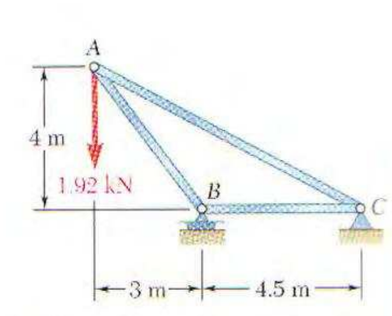


Figura P6.3

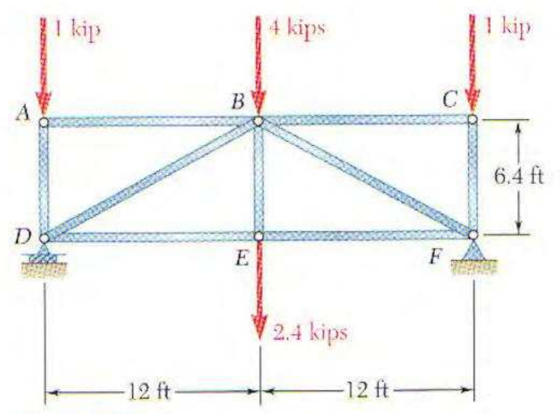


Figura *P6.4*

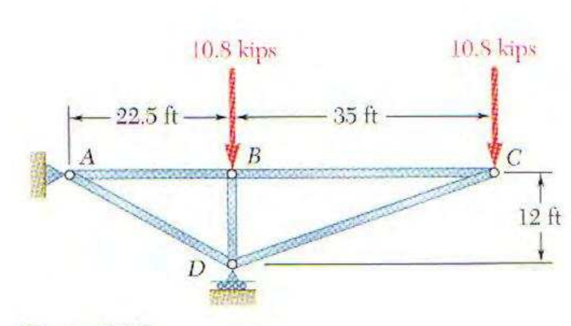


Figura P6.5

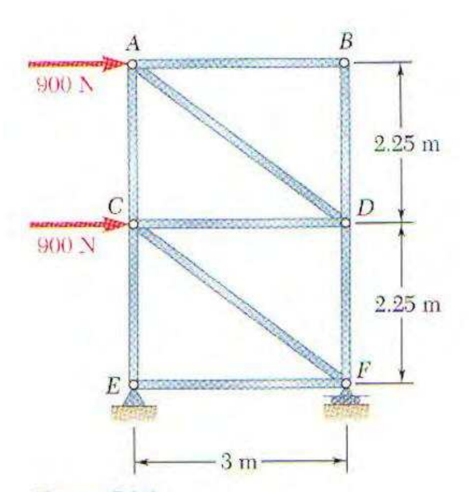


Figura P6.6

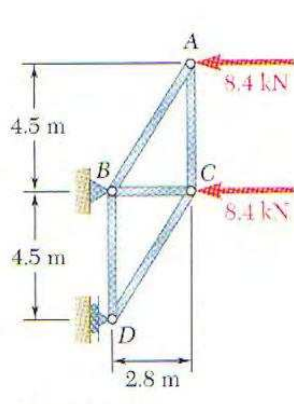


Figura P6.7

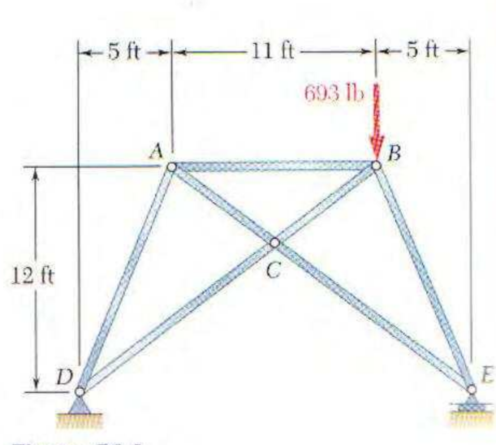


Figura *P6.8*

6.9 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Pratt para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

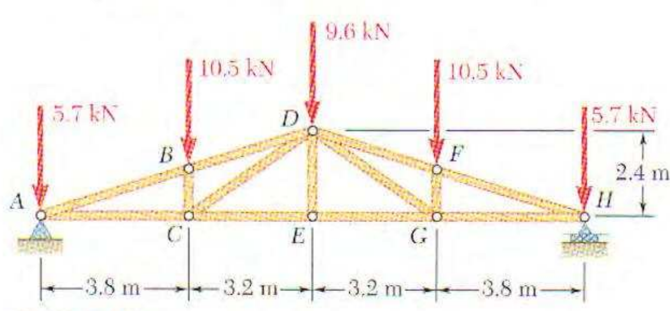


Figura P6.9

6.10 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura para ventilador de techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

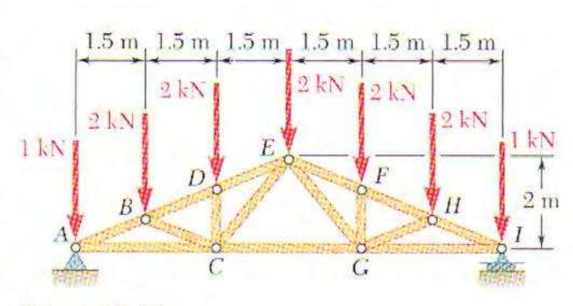


Figura P6.10

6.11 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Howe para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

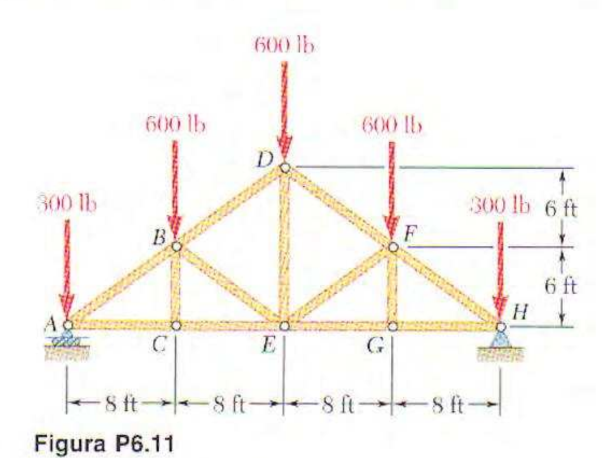
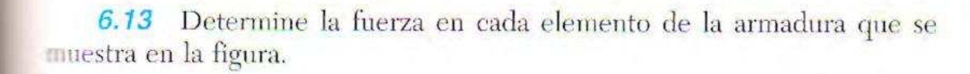


Figura P6.11

6.12 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Gambrel para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



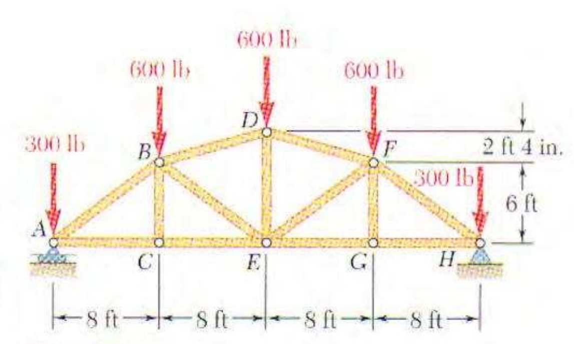


Figura P6.12

6.13 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura.

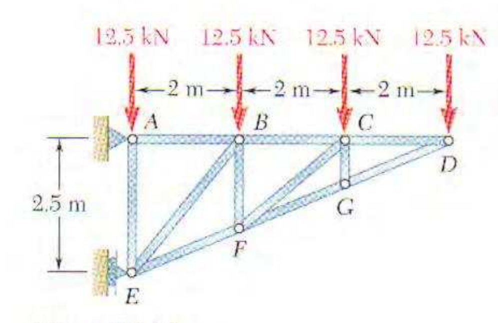


Figura *P6.13*

6.14 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

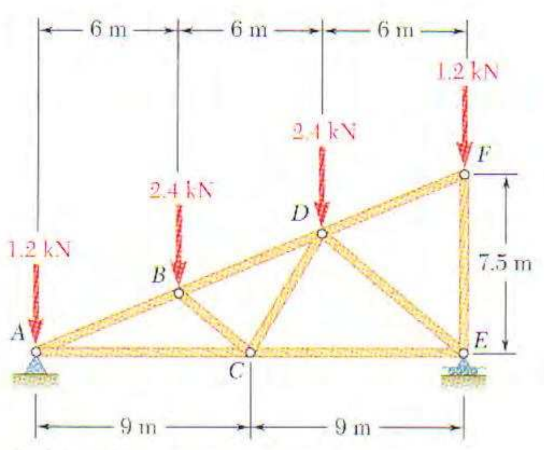


Figura *P6.14*

6.15 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Warren para puente que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

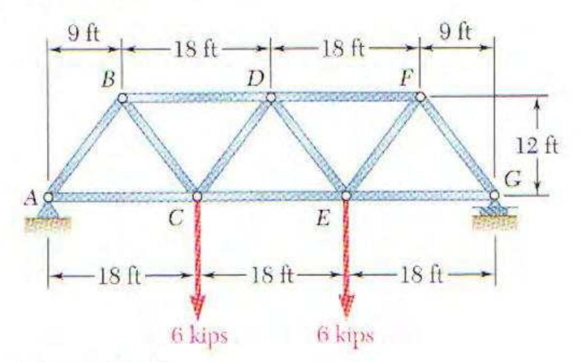


Figura P6.15

6.16 Retome el problema 6.15, y ahora suponga que se elimina la carga aplicada en E.

6.17 En la armadura Howe invertida para techo que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento DE y en cada uno de los elementos localizados a la izquierda de DE. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.18 En la armadura Howe invertida para techo que se muestra en la figura, determine la fuerza en cada uno de los elementos localizados a la derecha del elemento DE. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

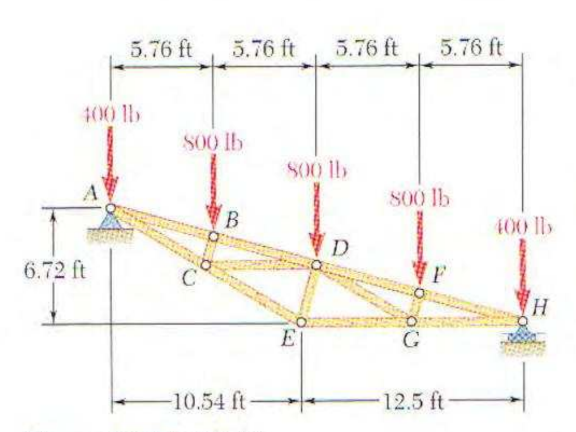


Figura *P6.17* y *P6.18*

6.19 En la armadura de tijeras para techo que se muestra en la figura, determine la fuerza en cada uno de los elementos localizados a la izquierda del elemento FG. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.20 En la armadura de tijeras para techo que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento FG y en cada uno de los elementos localizados a la derecha de FG. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

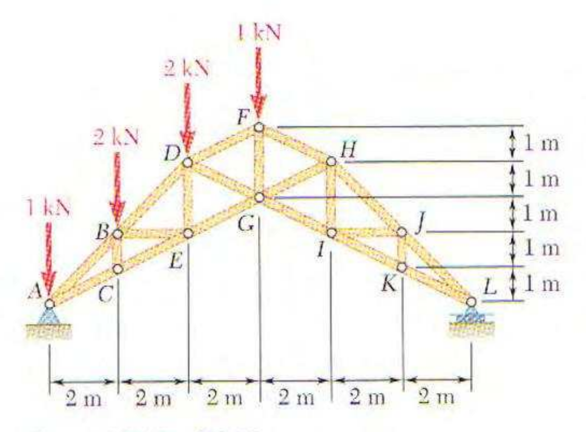


Figura P6.19 y P6.20

6.21 En la armadura para techo de estudio que se muestra en la figura, determine la fuerza en cada uno de los elementos localizados a la izquierda de la línea FGH. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

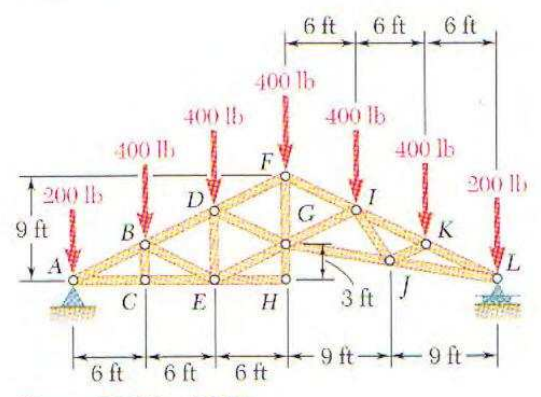


Figura P6.21 y P6.22

6.22 En la armadura para techo de estudio que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento FG y en cada uno de los elementos localizados a la derecha de FG. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.23 En la armadura abovedada para techo que se muestra en la figura, determine la fuerza en cada uno de los elementos que conectan los nodos del A al F. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.24 La porción de la armadura mostrada representa la parte superior de una torre para líneas de transmisión de energía eléctrica. Para las cargas mostradas, determine la fuerza en cada uno de los elementos localizados por encima de HJ. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

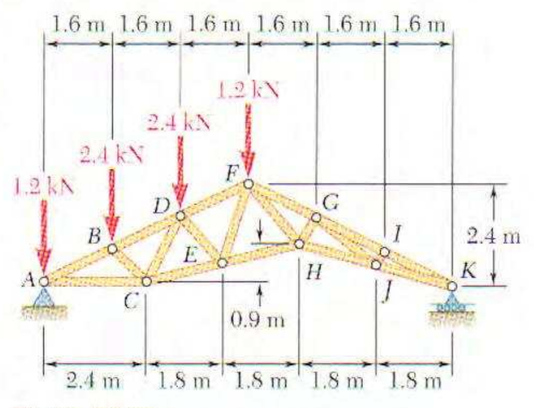


Figura P6.23

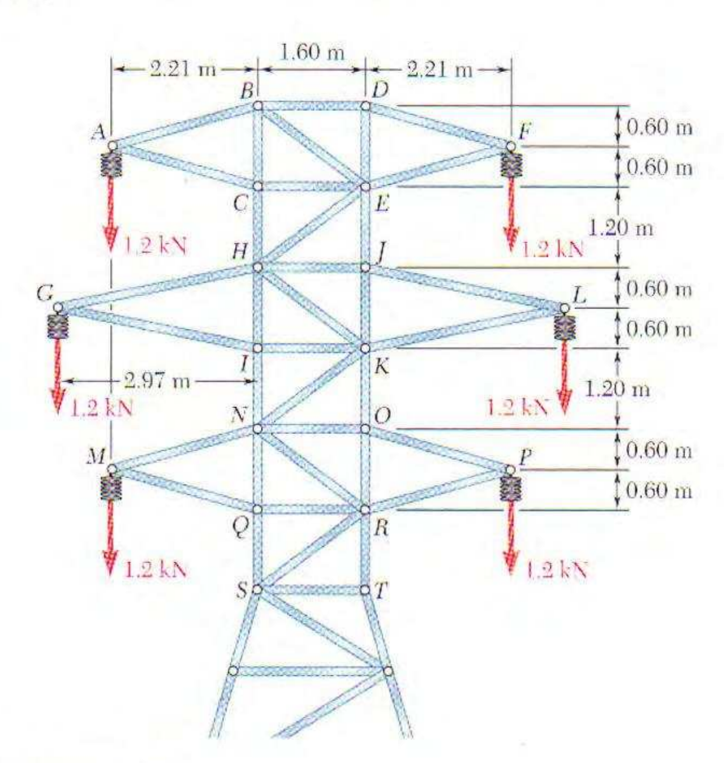


Figura P6.24

6.25 Para la torre y las cargas del problema 6.24, ahora se sabe que $F_{CH} = F_{EJ} = 1.2$ kN C y $F_{EH} = 0$, determine la fuerza en el elemento HJ y en cada uno de los elementos localizados entre HJ y NO. Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.26 Retome el problema 6.24, y ahora suponga que los cables que cuelgan del lado derecho de la torre se caen al suelo.

6.27 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

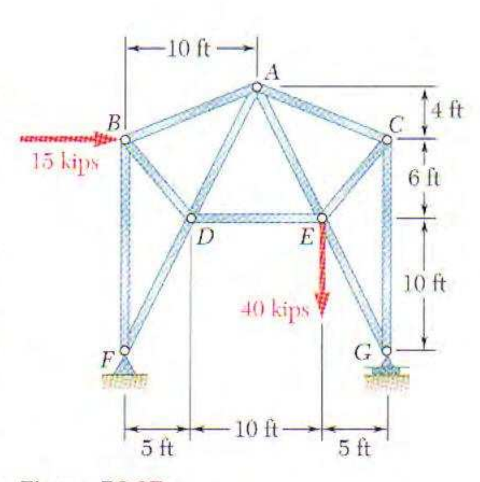


Figura P6.27

6.28 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

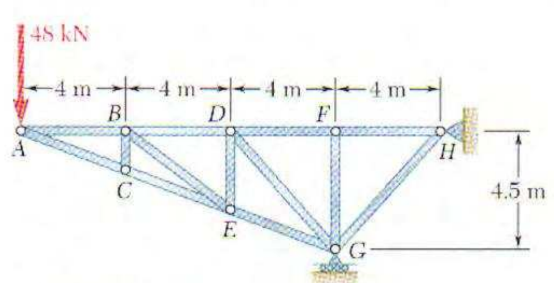


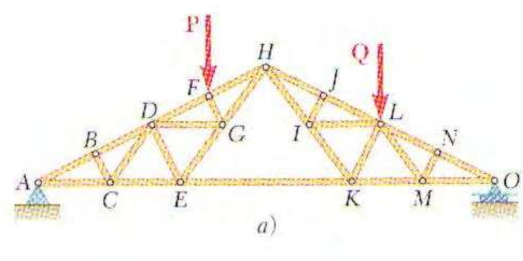
Figura P6.28

6.29 Determine si las armaduras de los problemas 6.31*a*), 6.32*a*) y 6.33*a*) son armaduras simples.)

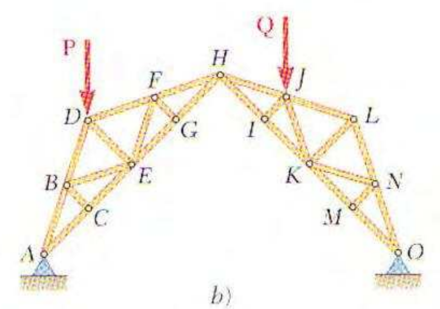
6.30 Determine si las armaduras de los problemas 6.31*b*), 6.32*b* y 6.33*b*) son armaduras simples.

6.31 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza cero en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.

6.32 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza cero en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.

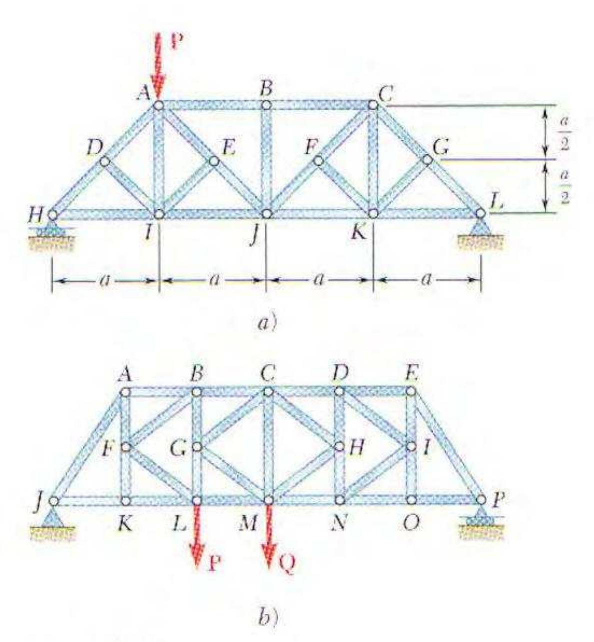


a)



b)

Figura P6.31

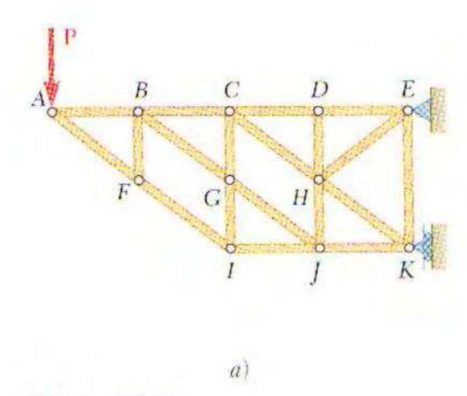


a)

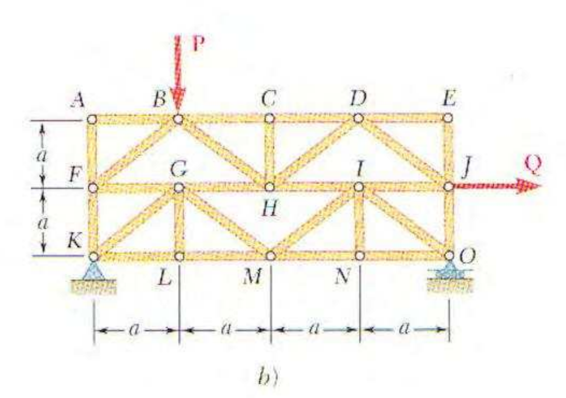
b)

Figura P6.32

6.33 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza cero en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.



a)



b)

Figura P6.33

6.34 Determine los elementos de fuerza cero en la armadura *a*) del problema 6.23, *b*) del problema 6.28.

***6.35** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante un eslabón corto en A, dos eslabones cortos en B y una rótula D. Determine la fuerza en cada uno de los elementos para la carga dada.

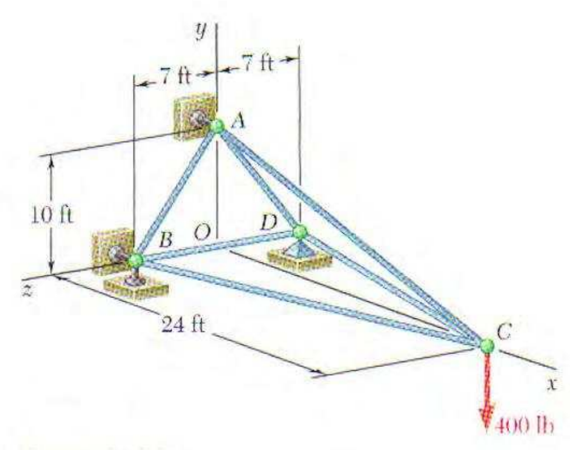


Figura P6.35

***6.36** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en B, un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D. Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $\mathbf{P} = (-2\,184 \text{ N})\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q} = 0$.

***6.37** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en B, un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D. Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{Q} = (2\,968 \text{ N})\mathbf{i}$.

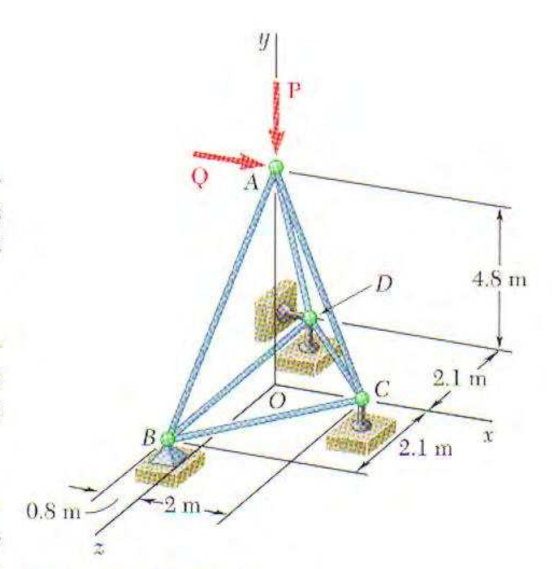


Figura P6.36 y P6.37

***6.38** La armadura que se muestra en la figura consta de nueve elementos y se sostiene mediante una rótula en A, dos eslabones cortos en B y un eslabón corto en C. Para la carga dada, determine la fuerza en cada uno de los elementos.

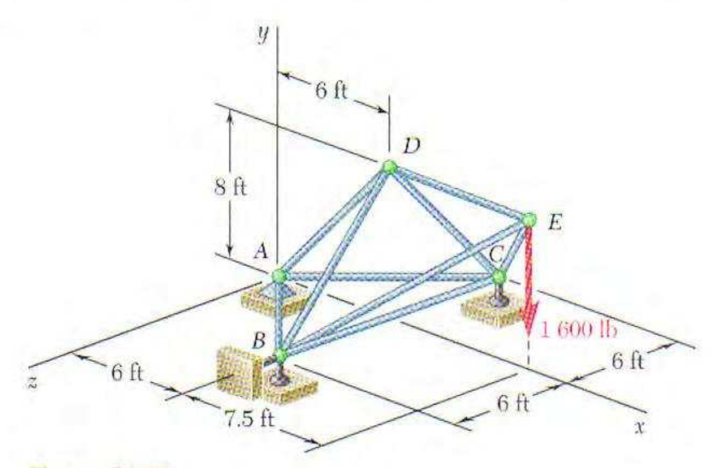


Figura P6.38

***6.39** La armadura que se muestra en la figura consta de nueve elementos y se sostiene mediante una rótula en B, un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D. *a*) Verifique que es una armadura simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. *b*) Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $\mathbf{P} = (-1\,200 \text{ N})\mathbf{j}$ y $\mathbf{Q} = 0$.

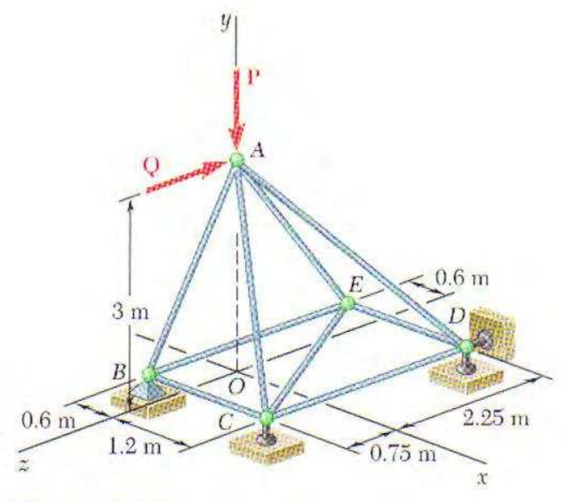


Figura P6.39

***6.40** Retome el problema 6.39 para $\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{Q} = (-900 \text{ N})\mathbf{k}$.

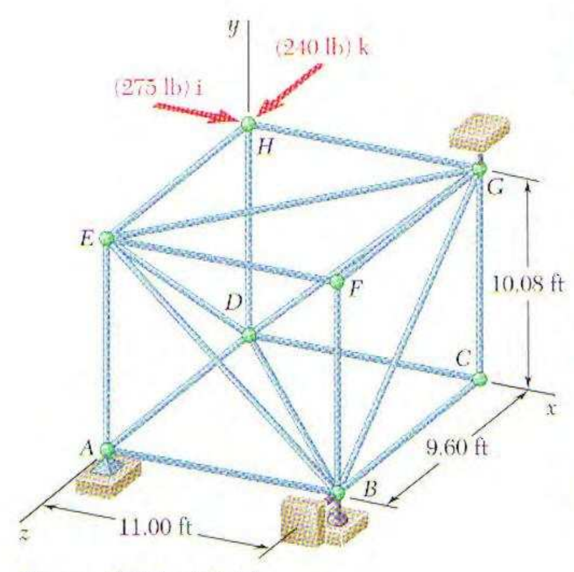


Figura *P6.41* y *P6.42*

6.41 La armadura que se muestra en la figura consta de 18 elementos y se sostiene mediante una rótula en *A*, dos eslabones cortos en *B* y un eslabón corto en *G*. *a*) Verifique que la armadura es simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. *b*) Para las cargas aplicadas determine la fuerza en cada uno de los seis elementos que se unen en el nodo *E*.

6.42 La armadura que se muestra en la figura consta de 18 elementos y se sostiene mediante una rótula en *A*, dos eslabones cortos en *B* y un eslabón corto en *G*. *a*) Verifique que la armadura es simple, que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. *b*) Para las cargas aplicadas determine la fuerza en cada uno de los seis elementos que se unen en el nodo *G*.

6.7. ANÁLISIS DE ARMADURAS POR EL MÉTODO DE SECCIONES

El método de los nodos es el más eficiente cuando se deben determinar las fuerzas en todos los elementos de una armadura. Sin embargo, si sólo se desea encontrar la fuerza en un elemento o en un número muy reducido de elementos, el método de secciones es el más eficiente.

Suponga que se desea determinar la fuerza en el elemento *BD* de la armadura que se muestra en la figura 6.16*a*. Para llevar a cabo esta tarea, se debe determinar la fuerza con la cual el elemento *BD* actúa sobre el nodo *B* o sobre el nodo *D*. Si se utilizara el método de los nodos, se seleccionaría al nodo *B* o al nodo *D* como el cuerpo libre. Sin embargo, también se selecciona como cuerpo libre a una porción más grande de la armadura, compuesta por varios nodos y elementos, siempre y cuando la fuerza deseada sea una de las fuerzas externas que actúan sobre dicha porción. Además, si se selecciona la porción de la armadura de manera que solamente se tenga un total de tres fuerzas desconocidas actuando sobre la misma, la fuerza deseada se puede obtener al resolver las ecuaciones de equilibrio para la porción de la armadura en cuestión. En la práctica, la porción de la armadura que debe utilizarse se obtiene *pasando una sección* a través de tres elementos de la armadura, de los cuales uno debe ser el elemento deseado, esto es, dicha porción se obtiene dibujando una línea que divida a la armadura en dos partes completamente separadas pero que no interseque a más de tres elementos. Cualquiera de las dos porciones de la armadura que se obtenga después de que los elementos intersecados han sido removidos puede utilizarse como el cuerpo libre.[†]

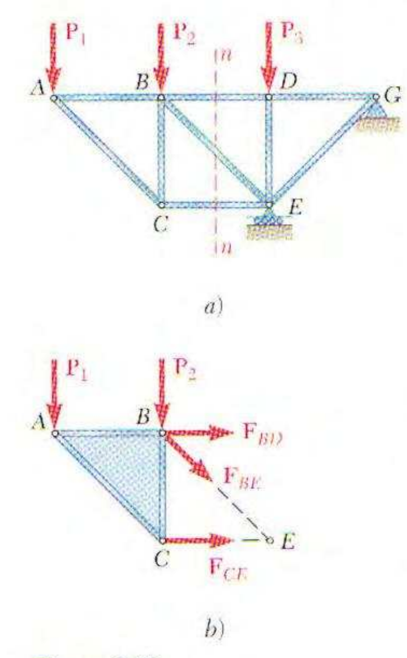


Figura 6.16

En la figura 6.16*a* se ha pasado la sección *nn* a través de los elementos *BD*, *BE* y *CE* y se ha seleccionado la porción *ABC* de la armadura como el cuerpo libre (figura 6.16*b*). Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que están aplicadas en los puntos *A* y *B* y las tres fuerzas desconocidas $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{CE}$. Como no se sabe si los elementos removidos estaban en tensión o compresión, de manera arbitraria se dibujaron las tres fuerzas alejándose del cuerpo libre como si los elementos estuvieran en tensión.

[†]En el análisis de ciertas armaduras, se pasan secciones que intersectan a más de tres elementos; entonces se pueden determinar las fuerzas en uno, o posiblemente en dos, de los elementos intersectados si se pueden encontrar ecuaciones de equilibrio que involucren únicamente a una incógnita (véanse los problemas 6.61 a 6.64).

El hecho de que el cuerpo rígido ABC está en equilibrio se puede expresar con tres ecuaciones, las cuales pueden resolverse para encontrar tres fuerzas desconocidas. Si sólo se desea determinar la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$, sólo se necesita escribir una ecuación, siempre y cuando dicha ecuación no contenga a las otras incógnitas. Por tanto, la ecuación $\Sigma M_E = 0$ proporciona el valor de la magnitud F_{BD} de la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$ (figura 6.16*b*). Un signo positivo en el resultado indicará que la suposición original en relación con el sentido de $\mathbf{F}_{BD}$ fue correcta y que el elemento BD está en tensión; un signo negativo indicará que la suposición original fue incorrecta y que BD está en compresión.

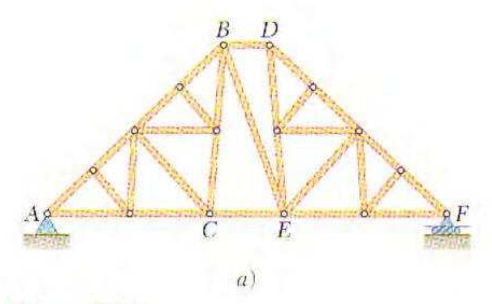
Por otra parte, si sólo se desea encontrar la fuerza $\mathbf{F}_{CE}$, se debe escribir una ecuación que no involucre a $\mathbf{F}_{BD}$ o a $\mathbf{F}_{BE}$; en este caso, la ecuación apropiada es $\Sigma M_B = 0$. Un signo positivo para la magnitud F_{CE} de la fuerza deseada muestra que la suposición hecha fue correcta, esto es, que el elemento está en tensión y un signo negativo indica que la suposición fue incorrecta, esto es, que el elemento está en compresión.

Si sólo se desea encontrar la fuerza $\mathbf{F}_{BE}$, la ecuación apropiada es $\Sigma F_y = 0$. De nuevo, a partir del signo del resultado se determina si el elemento está en tensión o en compresión.

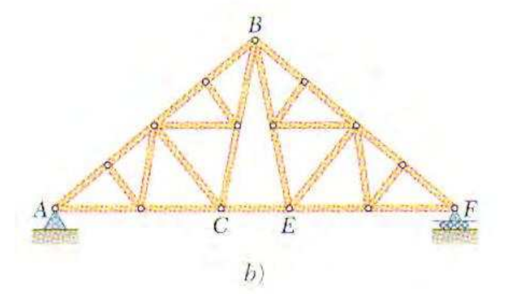
Cuando se determina únicamente la fuerza de un solo elemento, no se tiene disponible una forma independiente de comprobar los cálculos realizados. Sin embargo, cuando se han determinado todas las fuerzas desconocidas que actúan sobre el cuerpo libre, se pueden verificar los cálculos escribiendo una ecuación adicional. Por ejemplo, si $\mathbf{F}_{BD}$, $\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{CE}$ se determinan de la manera señalada en los párrafos anteriores, los cálculos pueden comprobarse verificando que $\Sigma F_x = 0$.

*6.8. ARMADURAS FORMADAS POR VARIAS ARMADURAS SIMPLES

Considere dos armaduras simples ABC y DEF. Si estas armaduras están conectadas por tres barras BD, BE y CE, como se muestra en la figura 6.17*a*, entonces formarán en conjunto una armadura rígida $ABDF$. Las armaduras ABC y DEF también se pueden combinar en una sola armadura rígida uniendo los nodos B y D en un solo nodo B y conectando los nodos C y E por medio de una barra CE (figura 6.17*b*). La armadura que se obtiene de esta forma se conoce como una *armadura Fink*. Se debe señalar que las armaduras de la figura 6.17*a* y *b* *no* son armaduras simples; éstas no se pueden construir a partir de una armadura triangular a la que se agregan sucesivamente pares de elementos en la forma descrita en la sección 6.3. Sin embargo, estas armaduras son rígidas, como se verifica al comparar los sistemas de conexiones empleados para mantener juntas las armaduras simples ABC y DEF (tres barras en la figura 6.17*a* y un perno y una barra en la figura 6.17*b*) con los sistemas de apoyos presentados en las secciones 4.4 y 4.5. Las armaduras que están he-



a)



b)

Figura 6.17

chas a partir de varias armaduras simples conectadas rígidamente se conocen como *armaduras compuestas*.

En una armadura compuesta, el número de elementos m y el número de nodos n aún están relacionados por la fórmula $m = 2n - 3$. Esto puede corroborarse observando que, si una armadura compuesta está apoyada por un perno sin fricción y un rodillo (involucrando así tres reacciones desconocidas), el número total de incógnitas es $m + 3$ y dicho número debe ser igual al número $2n$ de ecuaciones que se obtienen al expresar que los n pernos están en equilibrio; por tanto se concluye que $m = 2n - 3$. Las armaduras compuestas que están apoyadas por un perno y un rodillo, o por un sistema equivalente de apoyos, son *estáticamente determinadas*, *rígidas* y *completamente restringidas*. Esto se refiere a que todas las reacciones desconocidas y las fuerzas en todos los elementos pueden determinarse mediante los métodos de la estática y que la armadura no se colapsará ni se moverá. Sin embargo, no todas las fuerzas en los elementos se pueden determinar por el método de los nodos, a menos que se resuelva un gran número de ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, en el caso de la armadura compuesta de la figura 6.17*a*, es más eficiente pasar una sección a través de los elementos BD, BE y CE para determinar las fuerzas en los mismos.

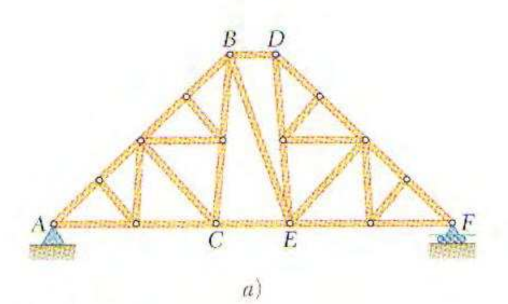


Figura 6.17 (*repetida*)

Ahora suponga que las armaduras simples ABC y DEF están conectadas por *cuatro* barras BD, BE, CD y CE (figura 6.18). Ahora, el número de elementos m es mayor que $2n - 3$; por tanto, resulta una *armadura hiperestática* y se dice que uno de los cuatro elementos BD, BE, CD o CE es *redundante*. Si la armadura está apoyada por un perno en A y por un rodillo en F, el número total de incógnitas es $m + 3$. Como $m > 2n - 3$, ahora el número $m + 3$ de incógnitas es mayor que el número $2n$ de ecuaciones independientes que se tienen disponibles; en consecuencia, la armadura es *estáticamente indeterminada*.

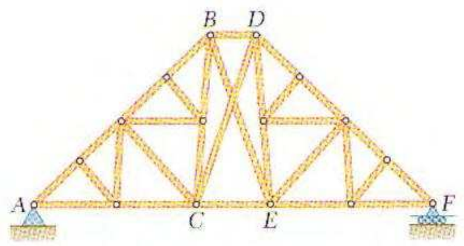
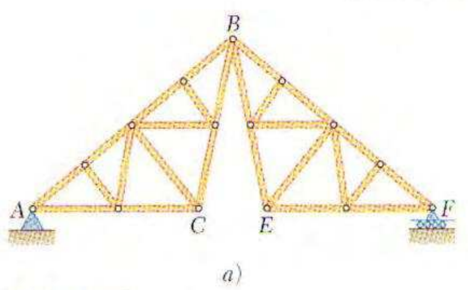


Figura 6.18

Por último, supóngase que las dos armaduras simples ABC y DEF están unidas por un perno, como se muestra en la figura 6.19*a*. El número de elementos m es menor que $2n - 3$. Si la armadura está apoyada por un perno en A y un rodillo en F, el número total de incógnitas es $m + 3$. Como $m < 2n - 3$, ahora el número $m + 3$ de incógnitas es menor que el número $2n$ de ecuaciones de equilibrio que se deben cumplir; por tanto, la armadura *no es rígida* y se colapsará bajo su propio peso. Sin embargo, si se usan dos pernos para apoyarla, la armadura se vuelve *rígida* y no se colapsará (figura 6.19*b*). Ahora se observa que el número total de incógnitas es $m + 4$ y es igual al número $2n$ de ecuaciones. En términos más generales, si las reacciones en los apoyos involucran r incógnitas, la condición para que una armadura compuesta sea estáticamente determinada, rígida y por completo restringida es $m + r = 2n$. Sin embargo, aunque esta condición es necesaria, no es suficiente para el equilibrio de una estructura que deja de ser rígida cuando se separa de sus apoyos (véase sección 6.11).



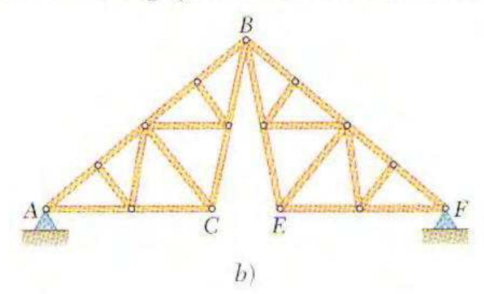
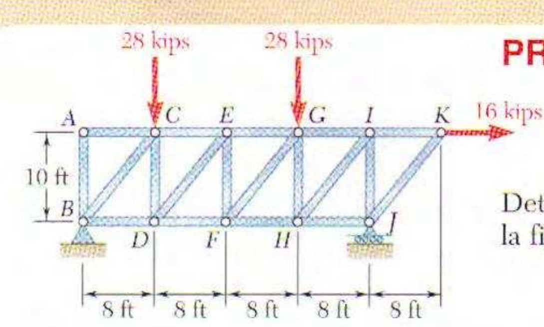
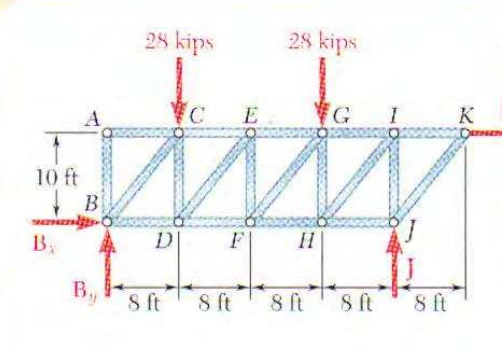


Figura 6.19



PROBLEMA RESUELTO 6.2

Determine la fuerza en los elementos EF y GI de la armadura mostrada en la figura.



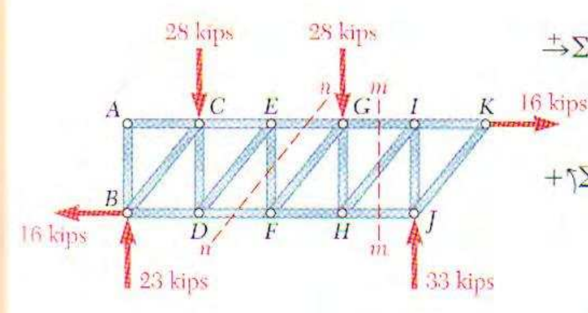
SOLUCIÓN

Cuerpo libre: armadura completa. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura; las fuerzas externas que actúan sobre este cuerpo libre consisten en las cargas aplicadas y las reacciones en B y J. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio.

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$:

$$-(28 \text{ kips})(8 \text{ ft}) - (28 \text{ kips})(24 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) + J(32 \text{ ft}) = 0$$

$$J = +33 \text{ kips} \qquad \mathbf{J} = 33 \text{ kips}\uparrow$$



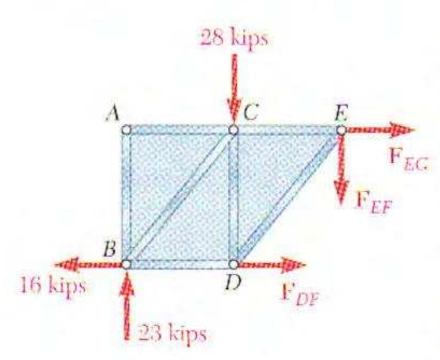
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\quad B_x + 16 \text{ kips} = 0$

$$B_x = -16 \text{ kips} \qquad \mathbf{B}_x = 16 \text{ kips}\leftarrow$$

$+\circlearrowleft \Sigma M_J = 0$:

$$(28 \text{ kips})(24 \text{ ft}) + (28 \text{ kips})(8 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) - B_y(32 \text{ ft}) = 0$$

$$B_y = +23 \text{ kips} \qquad \mathbf{B}_y = 23 \text{ kips}\uparrow$$



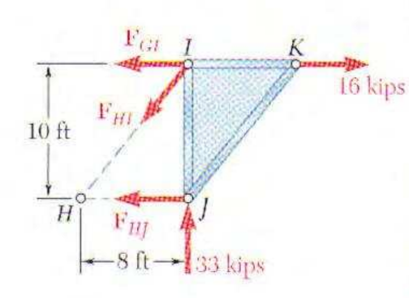
Fuerza en el elemento EF. Se pasa la sección nn a través de la armadura de manera que sólo interseque al elemento EF y a otros dos elementos adicionales. Después de que se han removido los elementos intersecados, la porción del lado izquierdo de la armadura se selecciona como el cuerpo libre. Se observa que están involucradas tres incógnitas; para eliminar las dos fuerzas horizontales, se escribe

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad +23 \text{ kips} - 28 \text{ kips} - F_{EF} = 0$

$$F_{EF} = -5 \text{ kips}$$

El sentido de $\mathbf{F}_{EF}$ se seleccionó suponiendo que el elemento EF está en tensión; el signo negativo obtenido indica que en realidad el elemento está en compresión.

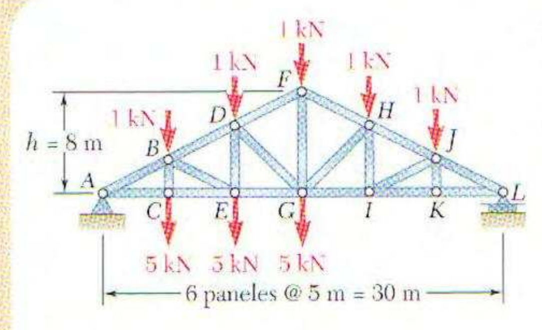
$$F_{EF} = 5 \text{ kips } C \quad ◀$$



Fuerza en el elemento GI. Se pasa la sección mm a través de la armadura de manera que sólo interseque al elemento GI y a otros dos elementos adicionales. Después de que se han removido los elementos intersecados, se selecciona la porción del lado derecho de la armadura como el cuerpo libre. Otra vez están involucradas tres fuerzas desconocidas; para eliminar las dos fuerzas que pasan a través del punto H se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0$: $\quad (33 \text{ kips})(8 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) + F_{GI}(10 \text{ ft}) = 0$

$$F_{GI} = -10.4 \text{ kips} \qquad F_{GI} = 10.4 \text{ kips } C \quad ◀$$



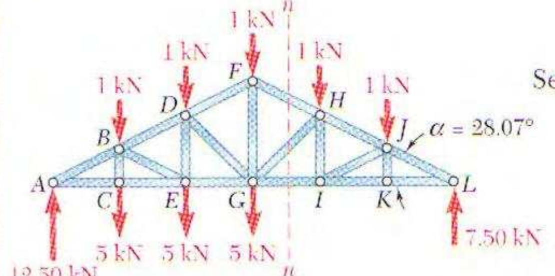
PROBLEMA RESUELTO 6.3

Determine la fuerza en los elementos *FH*, *GH* y *GI* de la armadura para techo mostrada en la figura.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: armadura completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la armadura se encuentran las reacciones en *A* y *L*:

$$\mathbf{A} = 12.50 \text{ kN}\uparrow \qquad \mathbf{L} = 7.50 \text{ kN}\uparrow$$



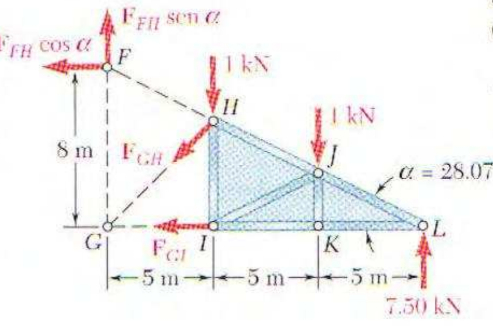
Se observa que

$$\tan \alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0.5333 \qquad \alpha = 28.07°$$

Fuerza en el elemento *GI*. Se pasa la sección *nn* a través de la armadura, como se muestra en la figura. Con el uso de la porción *HLI* de la armadura como el cuerpo libre, se obtiene el valor de F_{GI} al escribir

$$+\circlearrowleft\Sigma M_H = 0: \qquad (7.50 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) - F_{GI}(5.33 \text{ m}) = 0$$
$$F_{GI} = +13.13 \text{ kN} \qquad F_{GI} = 13.13 \text{ kN } T \blacktriangleleft$$

Fuerza en el elemento *FH*. El valor de F_{FH} se obtiene a partir de la ecuación $\Sigma M_G = 0$. Se mueve $\mathbf{F}_{FH}$ a lo largo de su línea de acción hasta que actúe en el punto *F*, donde se descompone en sus componentes *x* y *y*. Ahora, el momento de $\mathbf{F}_{FH}$ con respecto al punto *G* es igual a $(F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m})$.



$$+\circlearrowleft\Sigma M_G = 0:$$
$$(7.50 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m}) = 0$$
$$F_{FH} = -13.81 \text{ kN} \qquad F_{FH} = 13.81 \text{ kN } C \blacktriangleleft$$

Fuerza en el elemento *GH*. Primero se observa que

$$\tan \beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{2}{3}(8 \text{ m})} = 0.9375 \qquad \beta = 43.15°$$

Entonces, el valor de F_{GH} se determina descomponiendo la fuerza $\mathbf{F}_{GH}$ en sus componentes *x* y *y* en el punto *G* y al resolver la ecuación $\Sigma M_L = 0$.

$$+\circlearrowleft\Sigma M_L = 0: \qquad (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{GH} \cos \beta)(15 \text{ m}) = 0$$
$$F_{GH} = -1.371 \text{ kN} \qquad F_{GH} = 1.371 \text{ kN } C \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El *método de los nodos* es el mejor método cuando se desean determinar las fuerzas *en todos los elementos* de una armadura simple. Sin embargo, el método de secciones descrito en esta sección es más eficiente cuando se desea encontrar la fuerza *en un solo elemento* o las fuerzas *en pocos elementos* de una armadura simple. El método de secciones también debe emplearse cuando la armadura *no es una armadura simple*.

A. *Para determinar la fuerza en un elemento dado de una armadura* por el método de secciones, se deben seguir los siguientes pasos:

1. *Dibujar un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura* y utilizar dicho diagrama para determinar las reacciones en los apoyos.

2. *Pasar una sección a través de tres elementos de la armadura,* de los cuales debe ser el elemento de interés. Después de que se han removido estos elementos, se obtendrán dos porciones separadas de la armadura.

3. *Seleccionar una de las dos porciones de la armadura que se han obtenido y dibujar su diagrama de cuerpo libre.* Dicho diagrama debe incluir tanto a las fuerzas externas aplicadas sobre la porción seleccionada, como a las fuerzas ejercidas sobre esta última por los elementos intersecados antes de que dichos elementos fueran removidos.

4. *Ahora se pueden escribir tres ecuaciones de equilibrio,* las cuales se pueden resolver para encontrar las fuerzas en los tres elementos intersecados.

5. *Una alternativa consiste en escribir una sola ecuación,* la cual pueda resolverse para la fuerza en el elemento de interés. Para esto, primero se debe observar si las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre por los otros dos elementos son paralelas o si sus líneas de acción se intersecan.

a) Si las fuerzas son paralelas, éstas se pueden eliminar escribiendo una ecuación de equilibrio que involucre *componentes en una dirección perpendicular* a la de estas dos fuerzas.

b) Si sus líneas de acción se intersecan en un punto H, estas fuerzas pueden eliminarse escribiendo una ecuación de equilibrio que involucre *momentos con respecto a H*.

6. *Se debe recordar que la sección que se utilice debe intersecar sólo a tres elementos.* Esto se debe a que las ecuaciones de equilibrio en el paso 4 sólo se resuelven para tres incógnitas. Sin embargo, se puede pasar una sección a través de más de tres elementos con el fin de encontrar la fuerza en uno de los mismos, siempre y cuando se pueda escribir una ecuación de equilibrio que contenga sólo a dicha fuerza como incógnita. Este tipo de situación especial se encontrará en los problemas del 6.61 a 6.64.

(*continúa*)

B. En relación con las armaduras que están completamente restringidas y determinadas:

1. Se debe señalar que cualquier armadura simple que está simplemente apoyada es una armadura completamente restringida y determinada.

2. Para determinar si cualquier otra armadura es completamente restringida y determinada o no, primero se debe contar el número m de sus elementos, el número n de sus nodos y el número r de las componentes de reacción en sus apoyos. Entonces, se debe comparar la suma $m + r$, que representa el número de incógnitas, con el producto $2n$, que representa el número de ecuaciones de equilibrio independientes que se tienen disponibles.

a) ***Si*** $m + r < 2n$, hay menos incógnitas que ecuaciones. Por tanto, algunas de las ecuaciones no se cumplen; la armadura sólo está *parcialmente restringida.*

b) ***Si*** $m + r > 2n$, hay más incógnitas que ecuaciones. Por tanto, no se pueden determinar algunas de las incógnitas; la armadura es *indeterminada.*

c) ***Si*** $m + r = 2n$, hay tantas incógnitas como ecuaciones. Sin embargo, esto no significa que pueden determinarse todas las incógnitas y cumplirse todas las ecuaciones. Para establecer si la armadura es *completa* o *impropiamente restringida* se debe tratar de determinar las reacciones en sus apoyos y las fuerzas en sus elementos. Si todas se encuentran, la armadura es *completamente restringida y determinada.*

Problemas

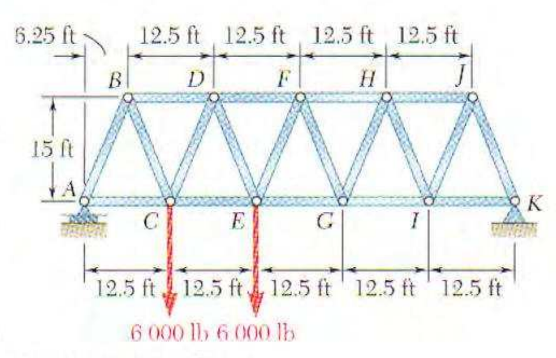


Figura P6.43 y P6.44

6.43 Una armadura Warren para puentes se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *CE*, *DE* y *DF*.

6.44 Una armadura Warren para puentes se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *EG*, *FG* y *FH*.

6.45 Determine la fuerza en los elementos *BD* y *DE* de la armadura que se muestra en la figura.

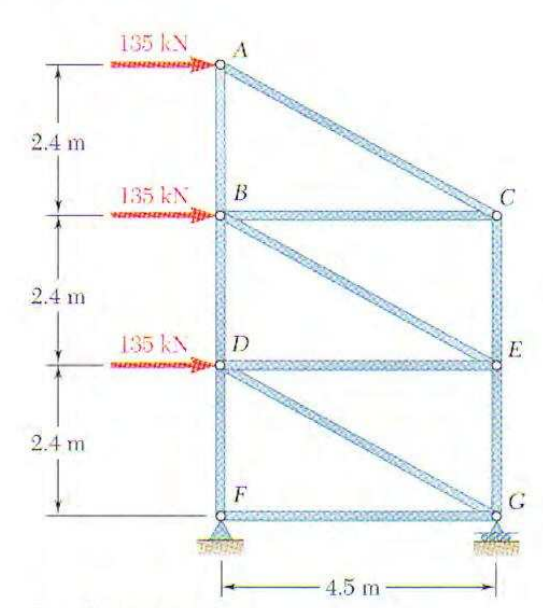


Figura P6.45 y P6.46

6.46 Determine la fuerza en los elementos *DG* y *EG* de la armadura que se muestra en la figura.

6.47 Una armadura para piso se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *CF*, *EF* y *EG*.

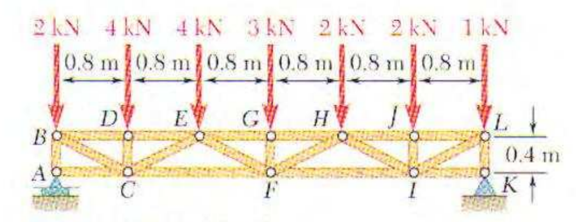


Figura *P6.47* y *P6.48*

6.48 Una armadura para piso se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *FI*, *HI* y *HJ*.

6.49 Una armadura de tiro plano para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *CE*, *DE* y *DF*.

6.50 Una armadura de tiro plano para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *EG*, *GH* y *HJ*.

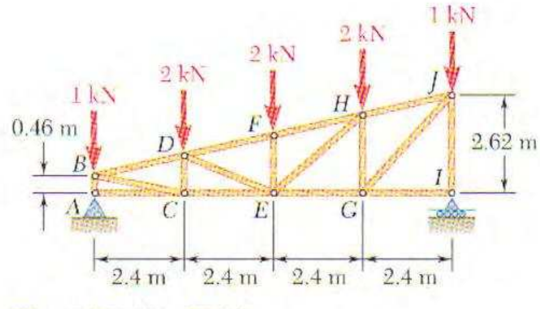


Figura P6.49 y P6.50

6.51 Una armadura Howe tipo tijera para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *DF*, *DG* y *EG*.

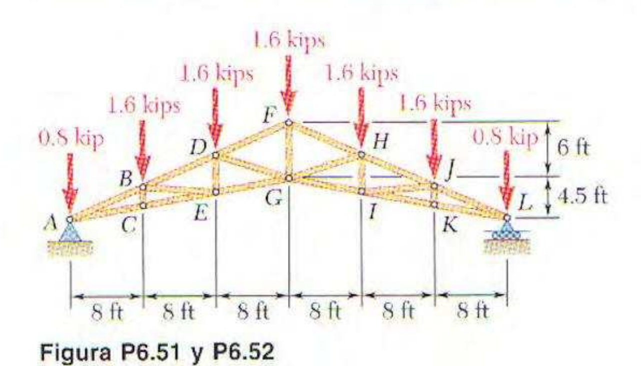


Figura P6.51 y P6.52

6.52 Una armadura Howe tipo tijera para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *GI*, *HI* y *HJ*.

6.53 Una armadura Pratt para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *CD*, *DE* y *DF*.

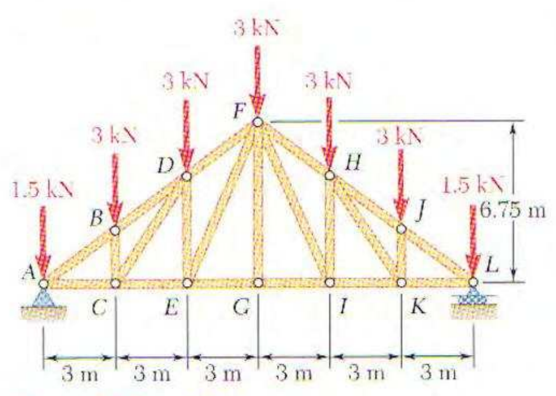


Figura P6.53 y P6.54

6.54 Una armadura Pratt para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *FH*, *FI* y *GI*.

6.55 Determine la fuerza en los elementos *AD*, *CD* y *CE* de la armadura que se muestra en la figura.

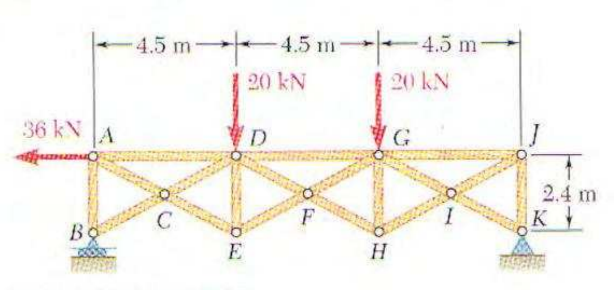


Figura P6.55 y P6.56

6.56 Determine la fuerza en los elementos *DG*, *FG* y *FH* de la armadura que se muestra en la figura.

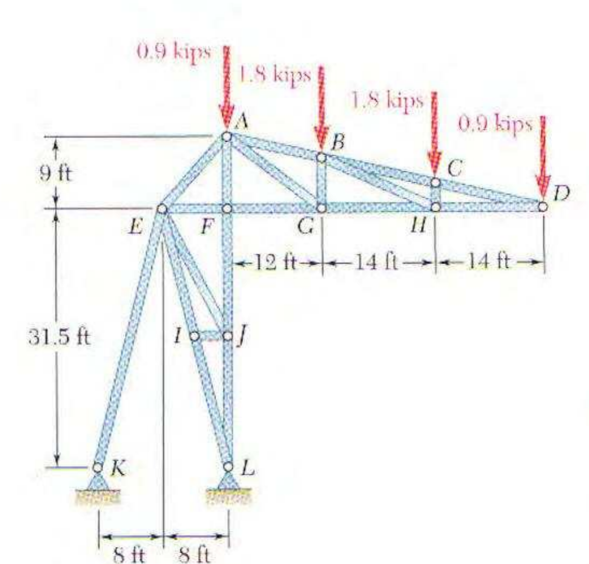


Figura P6.57 y P6.58

6.57 Una armadura para techo de estadio se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *AB*, *AG* y *FG*.

6.58 Una armadura para techo de estadio se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *AE*, *EF* y *FJ*.

6.59 Una armadura polinesia, o de dos tiros, para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *DF*, *EF* y *EG*.

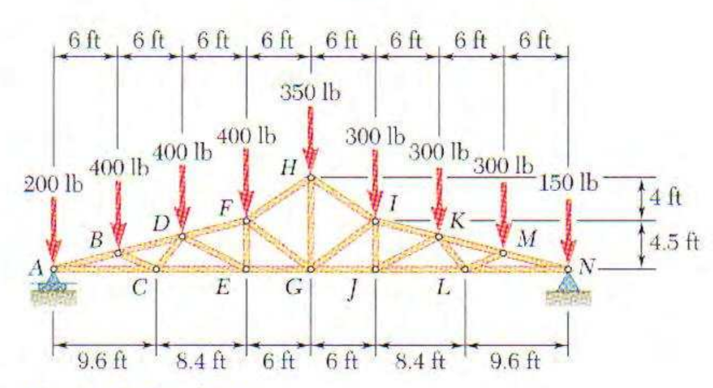


Figura *P6.59* y *P6.60*

6.60 Una armadura polinesia, o de dos tiros, para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos *HI*, *GI* y *GJ*.

6.61 Determine la fuerza en los elementos *AF* y *EJ* de la armadura que se muestra en la figura, cuando $P = Q = 1.2$ kN. (*Sugerencia:* Use la sección *aa*.)

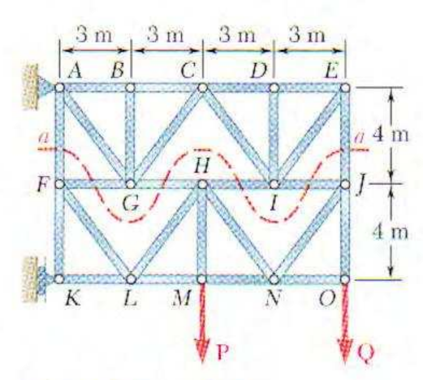


Figura P6.61 y P6.62

6.62 Determine la fuerza en los elementos *AF* y *EJ* de la armadura que se muestra en la figura, cuando $P = 1.2$ kN y $Q = 0$. (*Sugerencia:* Use la sección *aa*.)

6.63 Determine la fuerza en los elementos *EH* y *GI* de la armadura que se muestra en la figura. (*Sugerencia:* Use la sección *aa*.)

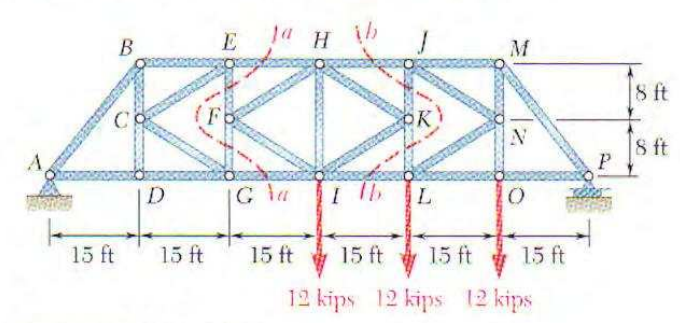


Figura *P6.63* y *P6.64*

6.64 Determine la fuerza en los elementos *HJ* e *IL* de la armadura que se muestra en la figura. (*Sugerencia:* Use la sección *bb*.)

6.65 y 6.66 Los elementos diagonales en los paneles centrales de la torre de transmisión que se muestra en la figura son muy delgados y sólo pueden actuar en tensión; a tales elementos se les conoce como *contravientos*. Para las cargas dadas, determine *a*) cuál de los dos contravientos mencionados actúa, *b*) la fuerza en ese contraviento.

6.65 Contravientos *CJ* y *HE*.

6.66 Contravientos *IO* y *KN*.

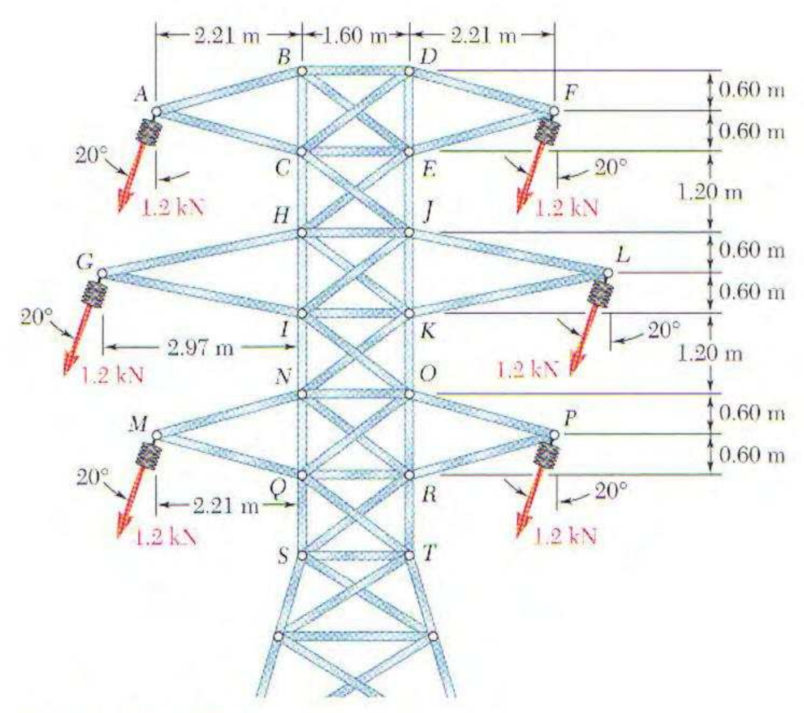


Figura P6.65 y P6.66

4.8 kips 4.8 kips 4.8 kips 2.4 kips 2.4 kips

11 ft 11 ft 11 ft 11 ft

A B C D E F G H 9.6 ft

Figura P6.67

4.8 kips 4.8 kips 4.8 kips 2.4 kips 2.4 kips

11 ft 11 ft 11 ft 11 ft

A B C D E F G H 9.6 ft

Figura P6.68

6.67 y 6.68 Los elementos diagonales en los paneles centrales de las armaduras que se muestran en las figuras son muy delgados y sólo pueden actuar en tensión; a tales elementos se les conoce como *contravientos*. Determine las fuerzas en los contravientos que actúan bajo las cargas dadas.

6.69 Clasifique cada una de las estructuras mostradas en la figura como completa, parcial o impropiamente restringida; si la estructura está completamente restringida, clasifíquela como estáticamente determinada o indeterminada. (Todos los elementos pueden actuar tanto en tensión como en compresión.)

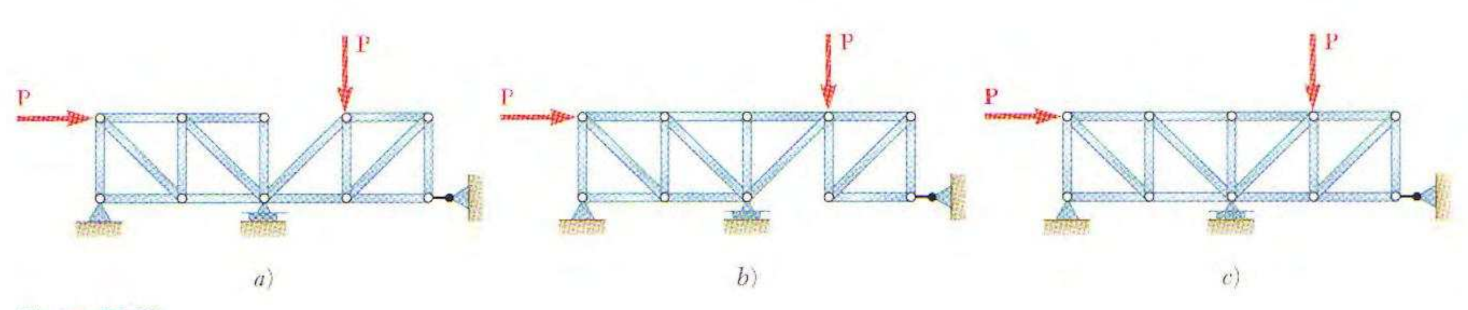


Figura P6.69

6.70 a 6.74 Clasifique cada una de las estructuras mostradas en las figuras como completa, parcial o impropiamente restringida; si la estructura está completamente restringida, clasifíquela como estáticamente determinada o indeterminada. (Todos los elementos pueden actuar tanto en tensión como en compresión.)

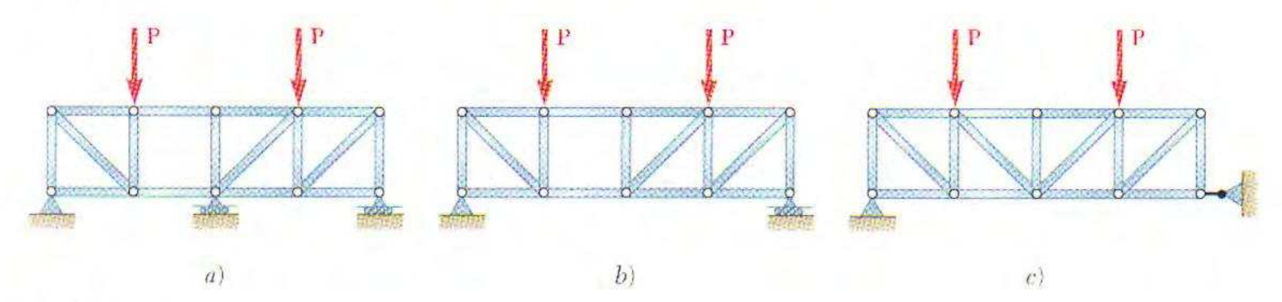


Figura P6.70

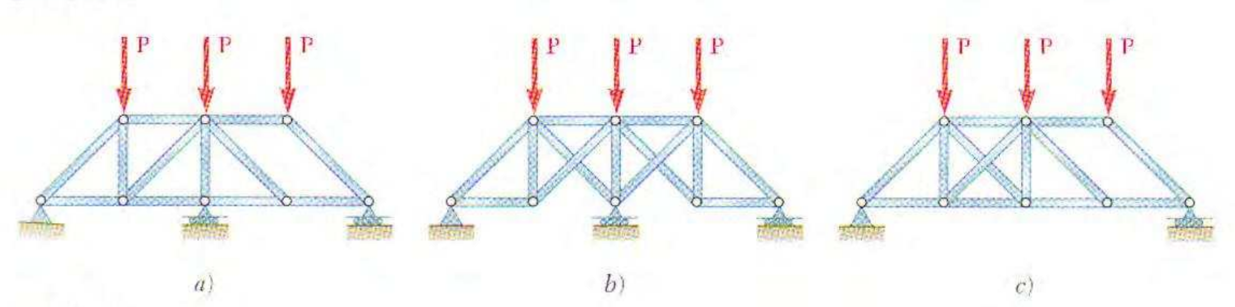


Figura P6.71

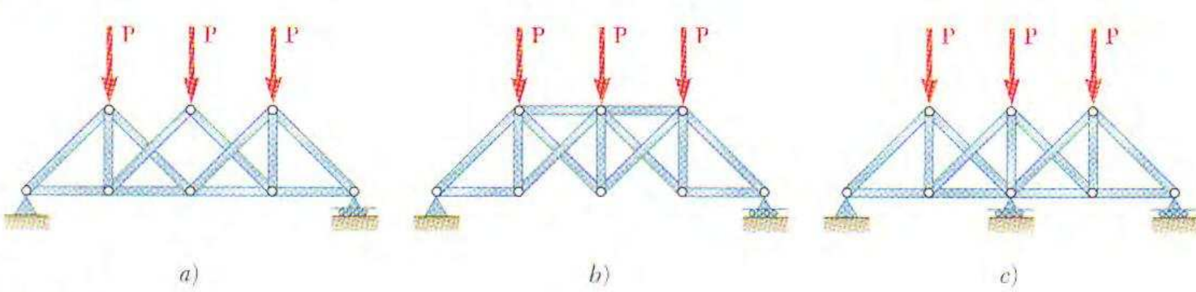


Figura P6.72

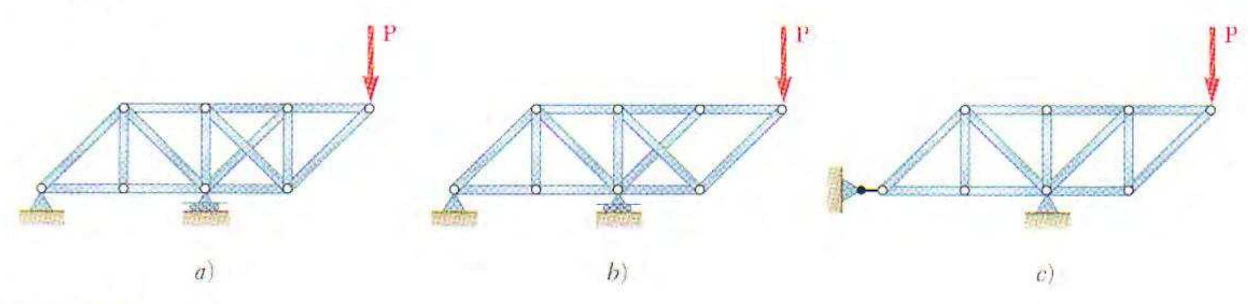


Figura *P6.73*

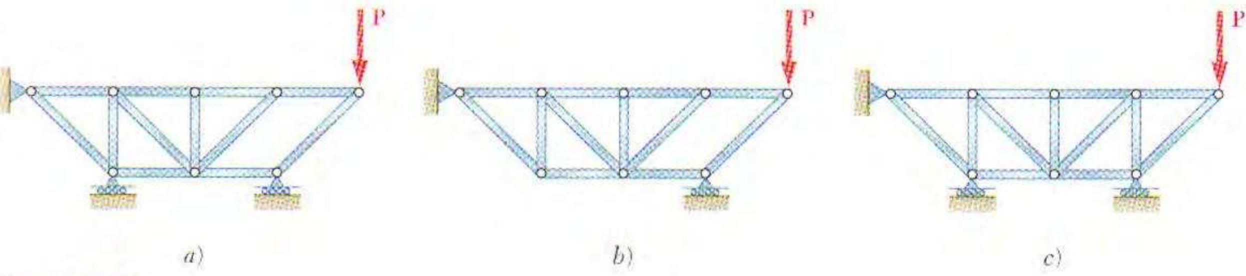


Figura *P6.74*

ARMAZONES Y MÁQUINAS

6.9. ESTRUCTURAS QUE CONTIENEN ELEMENTOS SUJETOS A FUERZAS MÚLTIPLES

Bajo la denominación de armaduras, bastidores o armazones se consideran estructuras totalmente constituidas por pernos y elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas. Se sabía que las fuerzas que actuaban sobre los elementos estaban dirigidas a lo largo de los mismos. Ahora se considerarán estructuras en las cuales por lo menos uno de los elementos es un elemento *sujeto a la acción de fuerzas múltiples*, esto es, un elemento sobre el que actúan tres o más fuerzas. En general, dichas fuerzas no estarán dirigidas a lo largo de los elementos sobre los cuales actúan; su dirección es desconocida y, por tanto, se deben representar por dos componentes desconocidas.

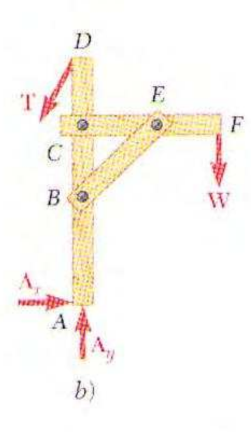
Los armazones y las máquinas son estructuras que contienen elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Los *armazones* están diseñados para soportar cargas y son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las *máquinas* están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas; éstas pueden o no ser estacionarias y siempre tendrán partes móviles.

6.10. ANÁLISIS DE UN ARMAZÓN

Como un primer ejemplo del análisis de un armazón, se retomará el ejemplo de una grúa que soporta determinada carga W que ya fue descrito en la sección 6.1 (figura 6.20*a*). El diagrama de cuerpo libre para la estructura completa se muestra en la figura 6.20*b*. Este diagrama se puede utilizar para determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura. Primero, al sumar momentos con respecto a A, se determina la fuerza $\mathbf{T}$ ejercida por el cable; entonces, si se suman componentes x y y se determinan las componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ de la reacción en el perno A.

Con el fin de determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes del armazón, éste se debe desensamblar y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen (figura 6.20*c*). Primero se deben considerar los elementos sometidos a la acción de dos fuerzas. En este armazón, el elemento BE es el único sobre el que actúan dos fuerzas. Las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos de este elemento deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 4.6). Por tanto, dichas fuerzas están dirigidas a lo largo de BE y se representarán, respectivamente, por $\mathbf{F}_{BE}$ y $-\mathbf{F}_{BE}$. De modo arbitrario, se supondrá que su sentido es como se muestra en la figura 6.20*c*; después, el signo obtenido para la magnitud común F_{BE} de estas dos fuerzas confirmará o negará esta suposición.

En seguida se consideran los elementos sometidos a la acción de varias fuerzas, los elementos sobre los que actúan tres o más fuerzas. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida en B por el elemento BE sobre el elemento AD debe ser igual y opuesta a la fuerza $\mathbf{F}_{BE}$ ejercida por AD sobre BE. En forma similar, la fuerza ejercida en E por el elemento BE sobre el elemento CF debe ser igual y opuesta a la fuerza $-\mathbf{F}_{BE}$ ejercida por CF sobre BE. Por tanto, las fuerzas que el elemento sometido a la acción de dos fuerzas BE ejerce sobre AD y CF son iguales, respectivamente, a $-\mathbf{F}_{BE}$ y $\mathbf{F}_{BE}$; estas fuer-



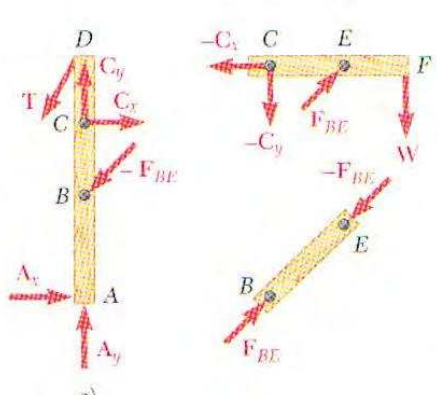


Figura 6.20

zas tienen la misma magnitud F_{BE} y sentidos opuestos y deben estar dirigidas como se muestra en la figura 6.20*c*.

Dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas están conectados en *C*. Como no se conocen ni la magnitud ni la dirección de las fuerzas que actúan en *C*, dichas fuerzas se representarán por sus componentes *x* y *y*. Las componentes $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$ de la fuerza que actúa sobre el elemento *AD* serán dirigidas de manera arbitraria hacia la derecha y hacia arriba. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas ejercidas por el elemento *CF* sobre *AD* y las fuerzas ejercidas por el elemento *AD* sobre *CF* son iguales y opuestas, las componentes de la fuerza que actúa sobre el elemento *CF* *deben* estar dirigidas hacia la izquierda y hacia abajo; dichas componentes se representarán, respectivamente, por $-\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_y$. Si la fuerza $\mathbf{C}_x$ en realidad está dirigida hacia la derecha y la fuerza $-\mathbf{C}_x$ hacia la izquierda se determinará después, a partir del signo de su magnitud común C_x, un signo positivo indicará que la suposición hecha fue correcta y un signo negativo indicará que la suposición fue incorrecta. Los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples muestran las fuerzas externas que actúan en *A*, *D* y *F*.†

Ahora se pueden determinar las fuerzas internas considerando el diagrama de cuerpo libre de cualquiera de los dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas. Por ejemplo, seleccionando el diagrama de cuerpo libre correspondiente al elemento *CF*, se escriben las ecuaciones $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma M_E = 0$ y $\Sigma F_x = 0$, las cuales proporcionan, respectivamente, los valores de las magnitudes F_{BE}, C_y y C_x. Estos valores se pueden comprobar verificando que el elemento *AD* también se encuentra en equilibrio.

Se debe señalar que en la figura 6.20 se supuso que los pernos formaban una parte integral de uno de los dos elementos que conectaban dichos pernos y, por tanto, no fue necesario dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Esta suposición siempre se puede utilizar para simplificar el análisis de los armazones y las máquinas. Sin embargo, cuando un perno conecta a tres o más elementos, o cuando un perno conecta a un apoyo y a dos o más elementos o cuando se aplica una carga en un perno debe tomarse una decisión clara con relación al elemento seleccionado al cual se supondrá que pertenece el perno. (Si son elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples se debe unir el perno a uno de dichos elementos.) Entonces, deben identificarse las diversas fuerzas ejercidas sobre el perno. Esto se ilustra en el problema resuelto 6.6.

6.11. ARMAZONES QUE DEJAN DE SER RÍGIDOS CUANDO SE SEPARAN DE SUS SOPORTES

La grúa analizada en la sección 6.10 estaba construida de manera que podía mantener la misma forma sin la ayuda de sus apoyos; por tanto, se

†No es necesario utilizar un signo menos para distinguir a la fuerza ejercida por un elemento sobre otro de fuerza igual y opuesta ejercida por el segundo elemento sobre el primero, puesto que ambas fuerzas pertenecen a diferentes diagramas de cuerpo libre y, por tanto, no pueden confundirse fácilmente. En los problemas resueltos se usa el mismo símbolo para representar a fuerzas iguales y opuestas que están aplicadas sobre distintos cuerpos libres. Se debe señalar que, bajo estas circunstancias, el signo obtenido para una componente de fuerza dada no relaciona directamente el sentido de dicha componente con el sentido del eje coordenado correspondiente. En lugar de esto, un signo positivo indica que *el sentido supuesto para esa componente en el diagrama de cuerpo libre* es correcto y un signo negativo indica que dicho sentido es incorrecto.

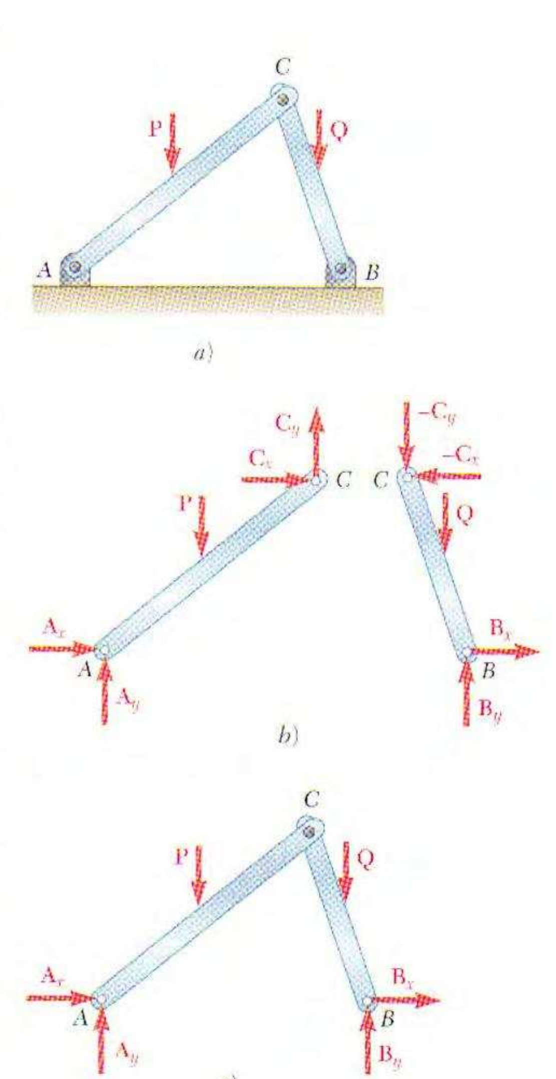


Figura 6.21

consideró a la grúa como un cuerpo rígido. Sin embargo, muchos armazones o estructuras se colapsarían si se separan de sus apoyos; en consecuencia, dichos armazones no pueden considerarse como cuerpos rígidos. Por ejemplo, considere el armazón mostrado en la figura 6.21*a*, el cual consta de dos elementos *AC* y *CB* que soportan, respectivamente, a las cargas **P** y **Q** que actúan en los puntos medios de dichos elementos; los elementos están soportados por pernos en *A* y *B* y están conectados por medio de un perno en *C*. Este armazón no mantendrá su forma si se separa de sus apoyos; por tanto, se debe considerar que está hecho de *dos partes rígidas distintas AC* y *CB*.

Las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$ (con respecto a cualquier punto dado) expresan las condiciones para el *equilibrio de un cuerpo rígido* (capítulo 4); por tanto, deben utilizarse en conjunto con los diagramas de cuerpo libre correspondientes a cuerpos rígidos, es decir, los diagramas de cuerpo libre para los elementos *AC* y *CB* (figura 6.21*b*). Como los dos elementos en cuestión están sujetos a la acción de fuerzas *múltiples*, y se emplean pernos en los apoyos y en la conexión, cada una de las reacciones en *A* y *B* y las fuerzas en *C* se deben representar por medio de dos componentes. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las componentes de la fuerza ejercida por *CB* sobre *AC* y las componentes de la fuerza ejercida por *AC* sobre *CB* estarán representadas por vectores que tienen la misma magnitud y sentidos opuestos; por tanto, si el primer par de componentes está constituido por $\mathbf{C}_x$ y $\mathbf{C}_y$, el segundo estará representado por $-\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_y$. Se observa que actúan cuatro componentes de fuerzas desconocidas sobre el cuerpo libre *AC*, mientras que sólo pueden emplearse tres ecuaciones independientes para expresar que dicho cuerpo está en equilibrio; de manera similar, cuatro incógnitas están asociadas con el cuerpo libre *CB*, pero sólo se tienen tres ecuaciones independientes. Sin embargo, sólo están involucradas seis incógnitas diferentes en el análisis de los dos elementos y, en conjunto, están disponibles seis ecuaciones para expresar que ambos elementos están en equilibrio. Escribiendo $\Sigma M_A = 0$ para el cuerpo libre *AC* y $\Sigma M_B = 0$ para el cuerpo libre *CB*, se obtienen dos ecuaciones simultáneas que pueden resolverse para la magnitud común C_x de las componentes $\mathbf{C}_x$ y $-\mathbf{C}_x$ y para la magnitud común C_y de las componentes $\mathbf{C}_y$ y $-\mathbf{C}_y$. En seguida se escribe $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para cada uno de los dos cuerpos libres con el fin de obtener, sucesivamente, las magnitudes A_x, A_y, B_x y B_y.

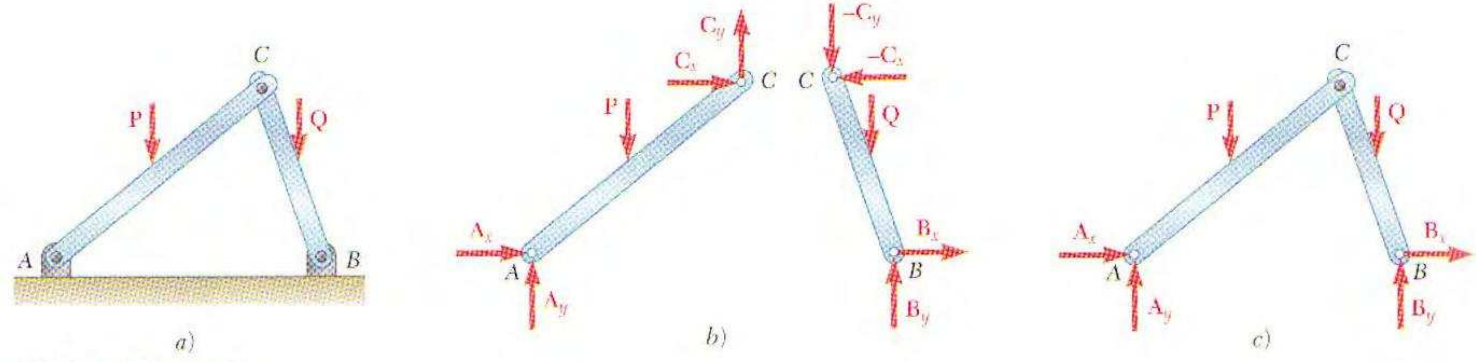


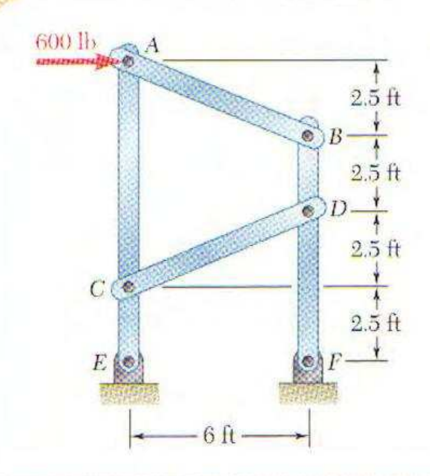
Figura 6.21 (repetida)

Puesto que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AC satisfacen las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M = 0$ (con respecto a cualquier punto dado) y debido a que dichas ecuaciones también se satisfacen por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CB, ahora se puede observar que las tres ecuaciones de equilibrio también deben cumplirse cuando se consideran simultáneamente las fuerzas que actúan sobre los dos cuerpos libres. Como las fuerzas internas en C se cancelan entre sí, se concluye que las fuerzas externas mostradas en el diagrama de cuerpo libre para el propio armazón ACB (figura 6.21c) deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio, a pesar de que el armazón en análisis no es un cuerpo rígido. Dichas ecuaciones se utilizan para determinar algunas de las componentes de las reacciones en A y B. Sin embargo, también se concluye que *no se pueden determinar por completo las reacciones a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo*. Por tanto, es necesario desensamblar el armazón y considerar los diagramas de cuerpo libre de las partes que lo constituyen (figura 6.21b), aun cuando sólo se deseen determinar las reacciones externas. Lo anterior se debe a que las ecuaciones de equilibrio obtenidas para el cuerpo libre ACB *son condiciones necesarias, pero no suficientes*, para el equilibrio de una estructura que no es rígida.

El método de solución descrito en el segundo párrafo de la presente sección involucró ecuaciones simultáneas. A continuación se presenta un método más eficiente, el cual utiliza tanto al cuerpo libre ACB como a los cuerpos libres AC y CB. Si se escribe $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ para el cuerpo libre ACB, se obtienen B_y y A_y. Escribiendo $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el cuerpo libre AC se obtienen, sucesivamente, A_x, C_x y C_y. Por último, al escribir $\Sigma F_x = 0$ para ACB, se obtiene B_x.

Se señaló con anterioridad que el análisis del armazón de la figura 6.21 involucra seis componentes de fuerzas desconocidas y seis ecuaciones de equilibrio independientes. (Las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo se obtuvieron a partir de las seis ecuaciones originales y, por tanto, no son independientes.) Además, se corroboró que en realidad se podían determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones. Por tanto, el armazón considerado es *estáticamente determinado y rígido*.[†] En general, para determinar si una estructura es estáticamente determinada y rígida, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen y contar el número de reacciones y de fuerzas internas que están involucradas. También se debe determinar el número de ecuaciones de equilibrio independientes (excluyendo las ecuaciones que expresan el equilibrio de la estructura completa o de grupos de partes componentes que ya se han analizado). Si hay más incógnitas que ecuaciones, la estructura es *estáticamente indeterminada*. Si hay menos incógnitas que ecuaciones, la estructura *no es rígida*. Si hay tantas incógnitas como ecuaciones y *si se pueden determinar todas las incógnitas y satisfacer todas las ecuaciones* bajo condiciones generales de carga, la estructura *es estáticamente determinada y rígida*. Sin embargo, si debido a un *arreglo impropio* de los elementos y apoyos no se pueden determinar todas las incógnitas ni satisfacer todas las ecuaciones, la estructura es *estáticamente indeterminada y no es rígida*.

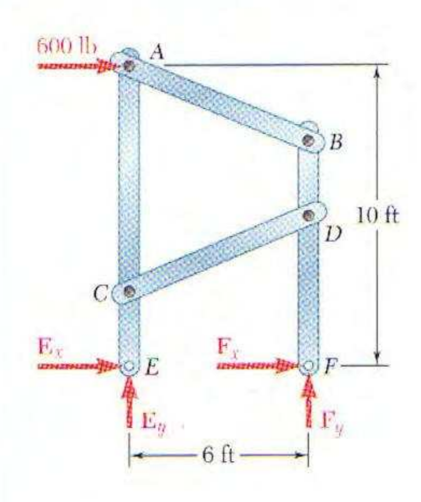
[†] La palabra *rígido* se usa para indicar que el armazón mantendrá su forma mientras permanezca unido a sus apoyos.



PROBLEMA RESUELTO 6.6

Una fuerza horizontal de 600 lb se aplica sobre el perno A del armazón mostrado en la figura; determine las fuerzas que actúan sobre los dos elementos verticales del armazón.

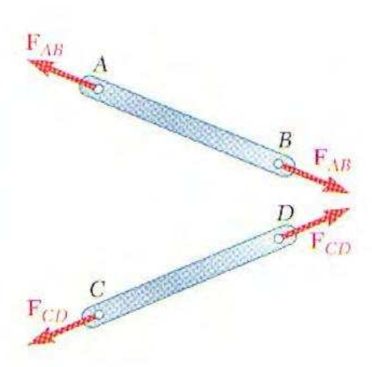
SOLUCIÓN



Cuerpo libre: armazón completo. Se selecciona al armazón completo en cuerpo libre; a pesar de que las reacciones involucran a cuatro incógnitas, se pueden determinar $\mathbf{E}_y$ y $\mathbf{F}_y$ escribiendo

$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \quad -(600 \text{ lb})(10 \text{ ft}) + F_y(6 \text{ ft}) = 0$$
$$F_y = +1\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{F}_y = 1\,000 \text{ lb}\uparrow \blacktriangleleft$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad E_y + F_y = 0$$
$$E_y = -1\,000 \text{ lb} \qquad \mathbf{E}_y = 1\,000 \text{ lb}\downarrow \blacktriangleleft$$

Elementos. Las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo no son suficientes para determinar $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{F}_x$. Ahora se deben considerar los diagramas de cuerpo libre de los distintos elementos que constituyen al armazón para continuar con la solución del problema. Al desensamblar el armazón, se supondrá que el perno A está unido al elemento sujeto a la acción de varias fuerzas ACE y, por tanto, que la fuerza de 600 lb está aplicada sobre dicho elemento. Además, también se debe señalar que AB y CD son elementos sujetos a dos fuerzas.



Cuerpo libre: elemento ACE

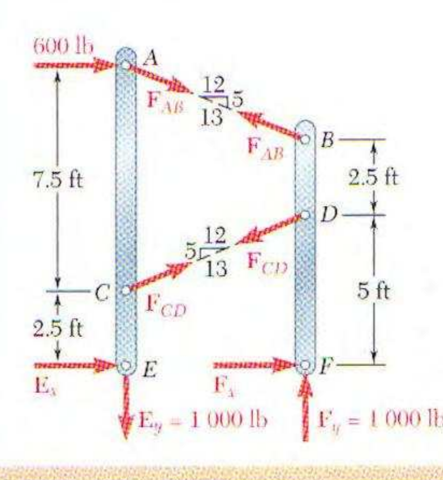
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad -\tfrac{5}{13}F_{AB} + \tfrac{5}{13}F_{CD} - 1\,000 \text{ lb} = 0$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \quad -(600 \text{ lb})(10 \text{ ft}) - (\tfrac{12}{13}F_{AB})(10 \text{ ft}) - (\tfrac{12}{13}F_{CD})(2.5 \text{ ft}) = 0$$

Si se resuelven simultáneamente estas ecuaciones, se encuentra que

$$F_{AB} = -1\,040 \text{ lb} \qquad F_{CD} = +1\,560 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

Los signos obtenidos indican que el sentido supuesto para F_{CD} fue correcto y que el sentido supuesto para F_{AB} fue incorrecto. Ahora, sumando componentes x,

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad 600 \text{ lb} + \tfrac{12}{13}(-1\,040 \text{ lb}) + \tfrac{12}{13}(+1\,560 \text{ lb}) + E_x = 0$$
$$E_x = -1\,080 \text{ lb} \qquad \mathbf{E}_x = 1\,080 \text{ lb}\leftarrow \blacktriangleleft$$



Cuerpo libre: armazón completo. Como ya se ha determinado $\mathbf{E}_x$ se puede regresar al diagrama de cuerpo libre para el armazón completo y escribir

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \quad 600 \text{ lb} - 1\,080 \text{ lb} + F_x = 0$$
$$F_x = +480 \text{ lb} \qquad \mathbf{F}_x = 480 \text{ lb}\rightarrow \blacktriangleleft$$

***Cuerpo libre: elemento BDF* (comprobación).** Se pueden comprobar los cálculos realizados verificando que las fuerzas que actúan sobre el elemento BDF satisfacen la ecuación $\Sigma M_B = 0$.

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = -\left(\tfrac{12}{13}F_{CD}\right)(2.5 \text{ ft}) + (F_x)(7.5 \text{ ft})$$
$$= -\tfrac{12}{13}(1\,560 \text{ lb})(2.5 \text{ ft}) + (480 \text{ lb})(7.5 \text{ ft})$$
$$= -3\,600 \text{ lb}\cdot\text{ft} + 3\,600 \text{ lb}\cdot\text{ft} = 0 \quad \text{(queda comprobado)}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a analizar *armazones que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples*. En los problemas propuestos que aparecen a continuación se pedirá calcular las reacciones externas ejercidas sobre el armazón y las fuerzas internas que mantienen unidos a sus elementos.

Cuando se resuelven problemas que involucran armazones que contienen uno o más elementos sujetos a la acción de fuerzas múltiples, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre del armazón completo. Se usa este diagrama de cuerpo libre para calcular, en la medida de lo posible, las reacciones en los apoyos. (En el problema resuelto 6.6 sólo se pudieron encontrar dos de las cuatro componentes de reacción a partir del diagrama de cuerpo libre del armazón completo.)

2. Desensamblar el armazón y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de sus elementos.

3. Considerar primero a los elementos sujetos a dos fuerzas, se aplican fuerzas iguales y opuestas a cada uno de los elementos sujetos a dos fuerzas en los puntos en que éstos se conectan a otro elemento. Si el elemento sujeto a dos fuerzas es un elemento recto, dichas fuerzas estarán dirigidas a lo largo del eje del elemento. Si en este momento no se puede decidir si un elemento está en tensión o en compresión, se *supone* que el elemento está en tensión y se *dirigen ambas fuerzas hacia fuera del elemento*. Como estas fuerzas tienen la misma magnitud desconocida, a ambas se les da el *mismo nombre* y, para evitar cualquier confusión posterior, *no se usa un signo positivo o un signo negativo*.

4. Después se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Para cada uno de estos elementos, se muestran todas las fuerzas que actúan sobre el mismo, incluyendo *las cargas aplicadas, las reacciones y las fuerzas internas en las conexiones*. Se debe indicar la magnitud y dirección de cualquier reacción o componente de reacción que se encontró anteriormente a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

a) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a un elemento sujeto a dos fuerzas, se debe aplicar al elemento sujeto a fuerzas múltiples una fuerza *igual y opuesta* a la fuerza dibujada en el diagrama de cuerpo libre correspondiente al elemento sujeto a dos fuerzas, *asignándole el mismo nombre*.

b) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples, se usan *componentes horizontales y verticales* para representar a las fuerzas internas que actúan en ese punto, puesto que ni la magnitud ni la dirección de dichas fuerzas es conocida. La dirección que se selecciona para cada una de las dos componentes de fuerza ejercidas sobre el primer

(*continúa*)

elemento sujeto a fuerzas múltiples es arbitraria, pero *se deben aplicar componentes de fuerza iguales y opuestas representadas con el mismo nombre* del otro elemento sujeto a fuerzas múltiples. *No se debe usar un signo positivo o negativo.*

5. ***Ahora se pueden determinar las fuerzas internas,*** al igual que *aquellas reacciones* que aún no se han determinado.

a) ***El diagrama de cuerpo libre*** de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples puede proporcionar *tres ecuaciones de equilibrio.*

b) ***Para simplificar la solución,*** se debe buscar una forma de escribir una ecuación que involucre a una sola incógnita. Si se puede localizar *un punto donde se intersequen todas las componentes de fuerza desconocidas excepto una,* se obtendrá una ecuación con una sola incógnita sumando momentos con respecto a dicho punto. *Si todas las fuerzas desconocidas son paralelas excepto una,* se obtendrá una ecuación con una sola incógnita si se suman componentes de fuerza en una dirección perpendicular a la de las fuerzas paralelas.

c) ***Como la dirección de cada una de las fuerzas desconocidas se seleccionó de manera arbitraria,*** no se puede determinar si la suposición hecha fue correcta hasta que se haya completado la solución. Para llevar a cabo esto, se debe considerar el *signo* del valor encontrado para cada una de las incógnitas; un signo *positivo* significa que la dirección que se seleccionó fue *correcta*; un signo *negativo* significa que la dirección es opuesta a la dirección que se supuso.

6. ***Para ser más efectivo y eficiente*** a medida que se procede con la solución, se deben observar las siguientes reglas:

a) ***Si se puede encontrar una ecuación que involucre a una sola incógnita,*** se debe escribir esa ecuación y *resolverla para esa incógnita*. De inmediato se debe *reemplazar* esa incógnita *por el valor que se encontró* en cualquier lugar que aparezca en los otros diagramas de cuerpo libre. Este proceso se debe repetir buscando ecuaciones de equilibrio que involucren a una sola incógnita hasta que se hayan determinado todas las fuerzas internas y todas las reacciones desconocidas.

b) ***Si no se puede encontrar una ecuación que involucre a una sola incógnita,*** se tendrá que *resolver un par de ecuaciones simultáneas*. Antes de llevar a cabo esto, se debe verificar que se han mostrado los valores de todas las reacciones que se obtuvieron a partir del diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

c) ***El número total de ecuaciones*** de equilibrio para el armazón completo y para los elementos individuales *será mayor que el número de fuerzas y reacciones desconocidas*. Una vez que se han encontrado todas las reacciones y todas las fuerzas internas, se pueden emplear las ecuaciones que no se utilizaron para comprobar la exactitud de los cálculos realizados.

Problemas

6.75 Para el armazón y la carga que se muestran en la figura, determine la fuerza que actúa sobre el elemento ABC *a*) en B, *b*) en C.

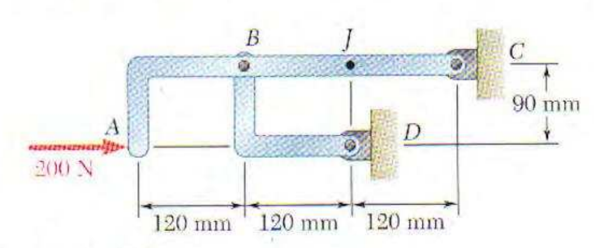


Figura P6.75

6.76 Determine la fuerza que actúa sobre el elemento BD y las componentes de la reacción en C.

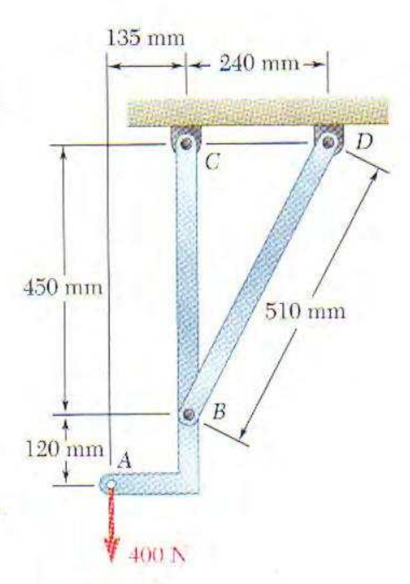


Figura P6.76

6.77 La varilla CD se ajusta a un collarín en D, el cual puede moverse a lo largo de la varilla AB. La varilla AB, está doblada en la forma de un arco circular. Para la posición en la que $\theta = 30°$, determine *a*) la fuerza en la varilla CD y *b*) la reacción en B.

6.78 Retome el problema 6.77 cuando $\theta = 150°$.

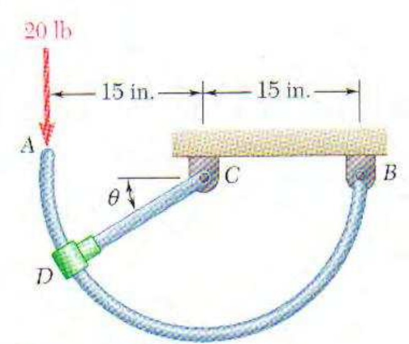


Figura P6.77

6.79 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento $ABCD$ cuando $\theta = 0°$.

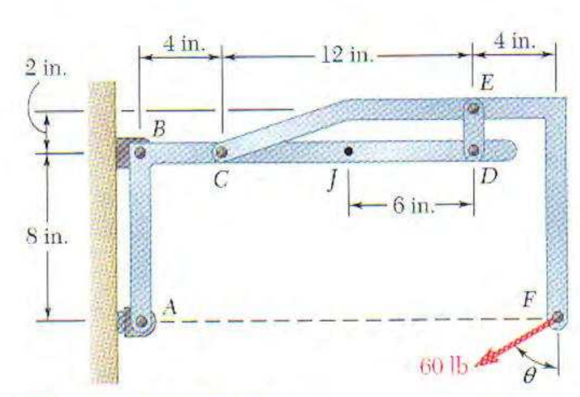


Figura *P6.79* y *P6.80*

6.80 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento $ABCD$ cuando $\theta = 90°$.

6.81 Para el armazón y la carga que se muestran en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento ABC.

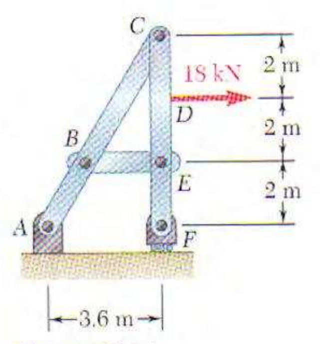


Figura P6.81

6.82 Retome el problema 6.81, y ahora suponga que la carga de 18 kN se reemplaza por un par con el sentido de las manecillas del reloj y magnitud de 72 kN · m, que se aplica al elemento $CDEF$ en el punto D.

6.83 y 6.84 Determine las componentes de las reacciones en A y E si se aplica una fuerza de 750 N dirigida verticalmente hacia abajo *a*) en B, *b*) en D.

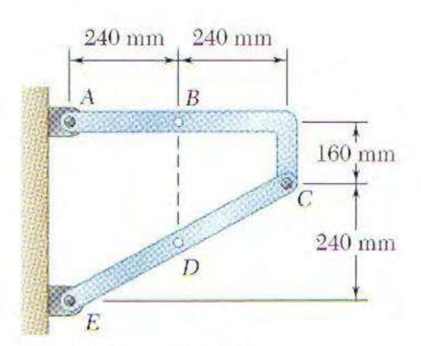


Figura P6.83 y *P6.85*

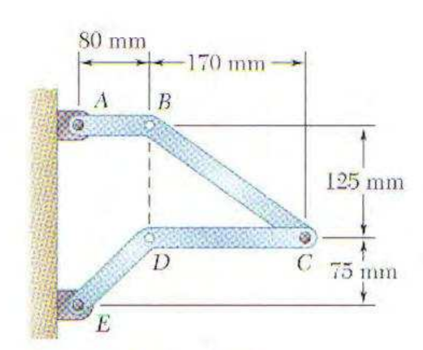


Figura P6.84 y *P6.86*

6.85* y *6.86 Determine las componentes de las reacciones en A y E si el armazón está cargado con un par de 36 N · m de magnitud, que actúa en el sentido de las manecillas del reloj y se aplica *a*) en B, *b*) en D.

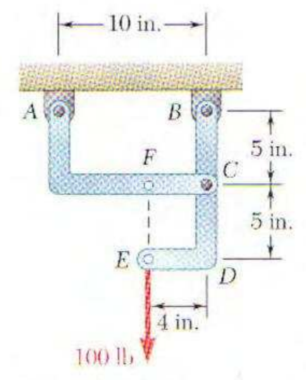


Figura P6.87

6.87 Determine las componentes de las reacciones en A y B, *a*) si se aplica una carga de 500 N como se muestra en la figura, *b*) si la carga de 500 N se mueve a lo largo de su línea de acción y se aplica en F.

6.88 La carga de 48 lb que se muestra en la figura puede moverse a lo largo de su línea de acción y, por tanto, puede aplicarse en A, D o E. Determine las componentes de las reacciones en B y F si la carga de 48 lb se aplica *a*) en A, *b*) en D, *c*) en E.

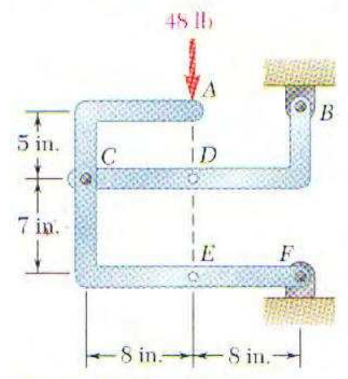


Figura P6.88 y P6.89

6.89 La carga de 48 lb se elimina y ahora se aplica, sucesivamente, en A, D y E un par de 288 lb · in. que actúa en el sentido de las manecillas del reloj. Determine las componentes de las reacciones en B y F si el par se aplica *a*) en A, *b*) en D y *c*) en E.

6.90 *a*) Muestre que cuando un armazón sostiene a una polea en A, la carga equivalente del armazón y de cada una de las partes que lo constituyen puede obtenerse quitando la polea y aplicando en A dos fuerzas iguales y paralelas a las fuerzas que ejerce el cable sobre la polea. *b*) Muestre que si uno de los extremos del cable se fija al armazón en el punto B, también debe aplicarse en B una fuerza de magnitud igual a la tensión en el cable.

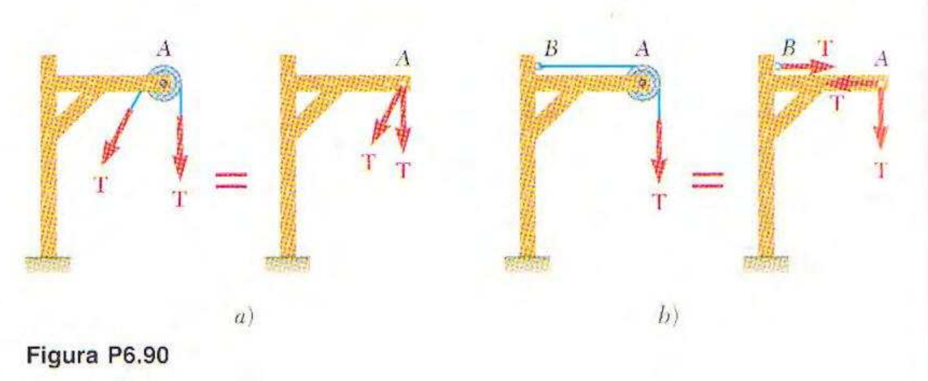


Figura P6.90

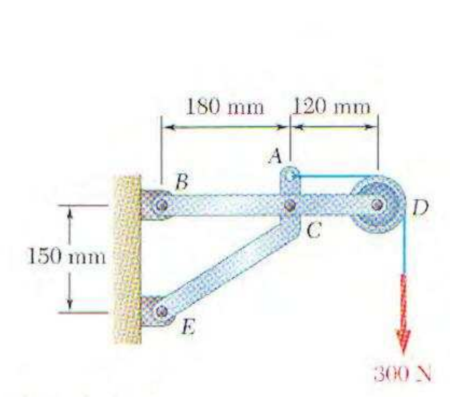


Figura P6.91

6.91 Determine las componentes de las reacciones en B y E si se sabe que el radio de la polea es de 50 mm.

6.92 Determine las componentes de las reacciones en D y E si se sabe que cada polea tiene un radio de 250 mm.

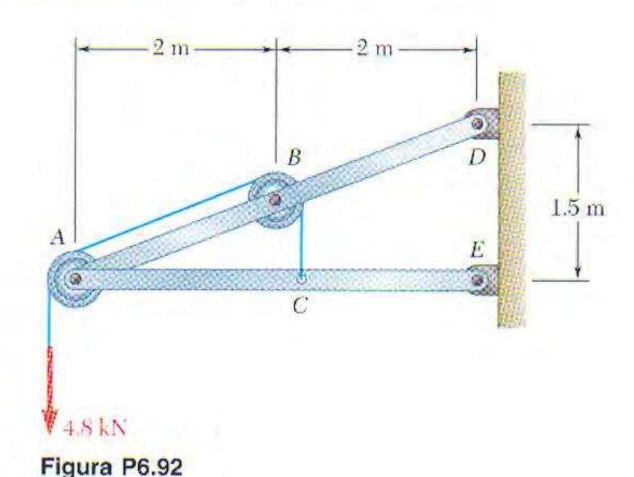


Figura P6.92

6.93 Dos tubos de 9 in. de diámetro (tubo *1* y tubo *2*) se sostienen cada 7.5 ft mediante un armazón pequeño como el que se muestra en la figura. Si el peso combinado de cada tubo y su contenido es de 30 lb/ft y se suponen superficies sin fricción, determine las componentes de las reacciones en A y G.

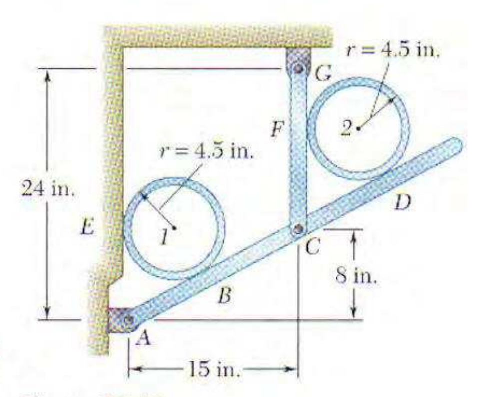


Figura P6.93

6.94 Retome el problema 6.93, y ahora suponga que el tubo *1* se retira y que los armazones sólo sostienen al tubo *2*.

6.95 Un remolque que pesa 2 400 lb está enganchado a una camioneta de 2 900 lb mediante un ancla de rótula en D. Determine *a*) las reacciones en cada una de las seis ruedas cuando la camioneta y el remolque están en reposo, *b*) la carga adicional debida al remolque sobre cada una de las ruedas de la camioneta.

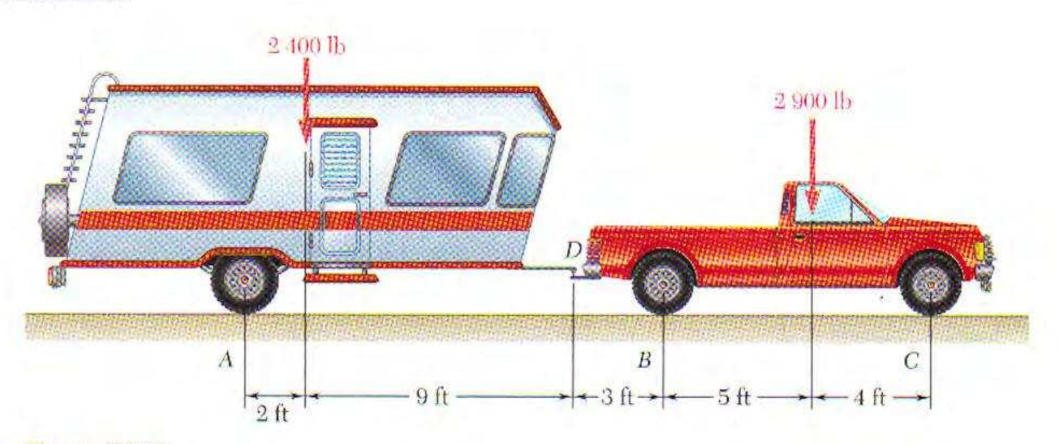


Figura P6.95

6.96 A fin de obtener una mejor distribución de peso sobre las cuatro ruedas de la camioneta del problema 6.95, se utiliza un gancho de compensación como el mostrado en la figura 6.96 para unir el remolque a la camioneta. El gancho consiste en dos resortes de barra (en la figura sólo se muestra uno) que se ajustan a cojinetes dentro de un soporte unido rígidamente a la camioneta. Los resortes también están conectados mediante cadenas al armazón del remolque y ambas cadenas pueden colocarse en tensión por medio de ganchos especialmente diseñados. *a*) Determine la tensión T requerida en cada una de las cadenas si la carga adicional debida al remolque debe estar igualmente distribuida entre las cuatro ruedas de la camioneta. *b*) ¿Cuáles son las reacciones resultantes en cada una de las seis ruedas de la combinación remolque-camioneta?

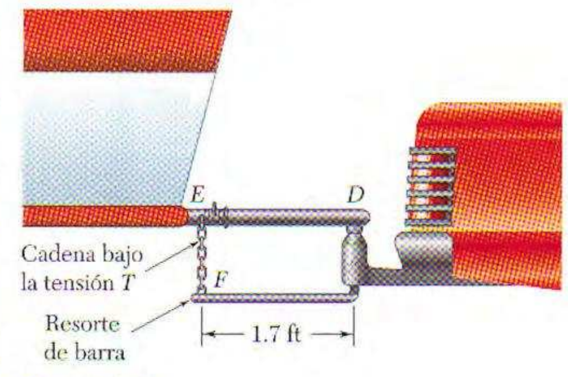


Figura P6.96

6.97 La cabina y la unidad motriz de la retroexcavadora que se muestra en la figura está conectada mediante un perno vertical localizado 2 m detrás de las ruedas de la cabina, y la distancia desde C hasta D es de 1 m. El centro de gravedad de la unidad motriz de 300 kN está localizado en G_m, mientras que los centros de gravedad de la cabina de 100 kN y de la carga de 75 kN se localizan, respectivamente, en G_c y G_l. Si se sabe que el tractor está en reposo sin aplicar sus frenos, determine *a*) las reacciones en cada una de las cuatro ruedas y *b*) las fuerzas ejercidas sobre la unidad motriz en C y en D.

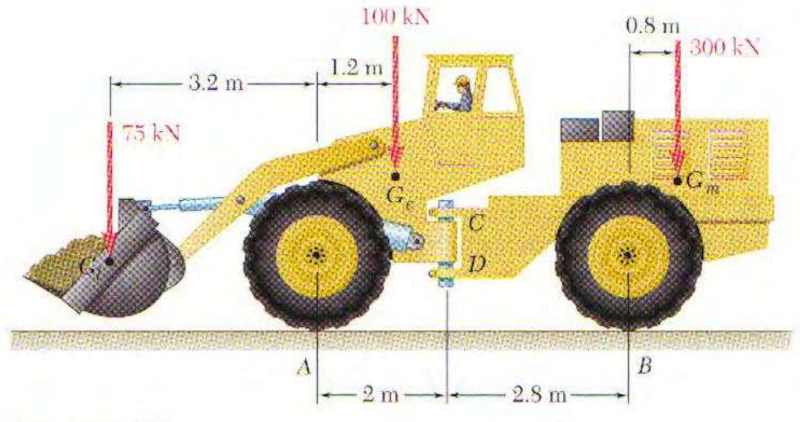


Figura *P6.97*

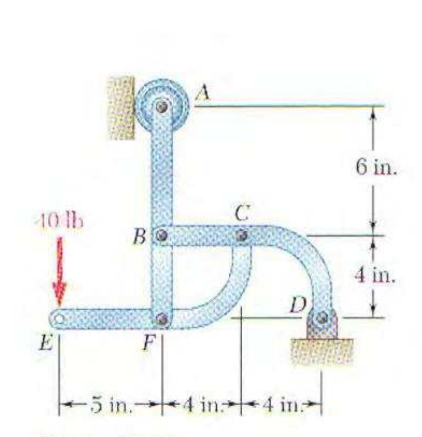


Figura P6.99

6.98 Retome el problema 6.97, y ahora suponga que se elimina la carga de 75 kN.

6.99 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento CFE en C y F.

6.100 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento CDE en C y D.

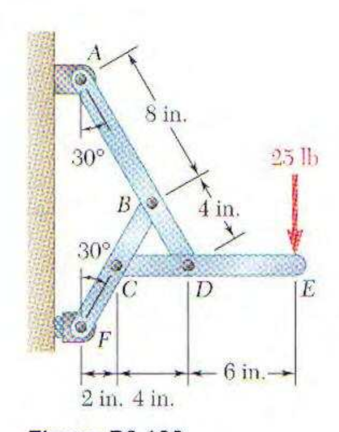


Figura P6.100

6.101 y 6.102 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento ABE.

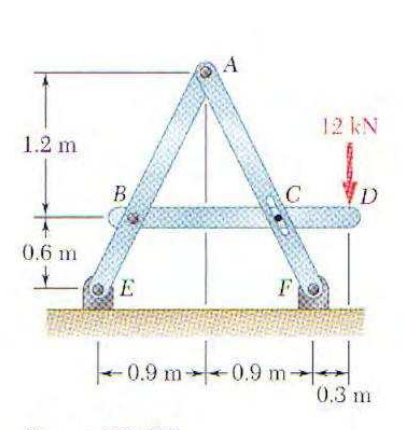


Figura P6.101

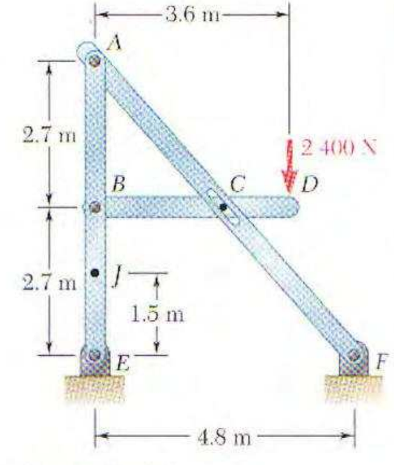


Figura P6.102

6.103 Si se sabe que $P = 15$ lb y $Q = 65$ lb, determine las componentes de las fuerzas ejercidas *a*) sobre el elemento *BCDF* en *C* y *D*, *b*) sobre el elemento *ACEG* en *E*.

6.104 Si se sabe que $P = 25$ lb y $Q = 55$ lb, determine las componentes de las fuerzas ejercidas *a*) sobre el elemento *BCDF* en *C* y *D*, *b*) sobre el elemento *ACEG* en *E*.

Figura P6.103 y P6.104

6.105 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento *DABC* en *B* y *D*.

6.106 Retome el problema 6.105, y ahora suponga que la carga de 6 kN ha sido retirada.

6.107 El eje del arco *ABC* con tres articulaciones es una parábola con vértice en *B*. Si se sabe que $P = 112$ kN y $Q = 140$ kN, determine *a*) las componentes de la reacción en *A* y *b*) las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento *AB* en *B*.

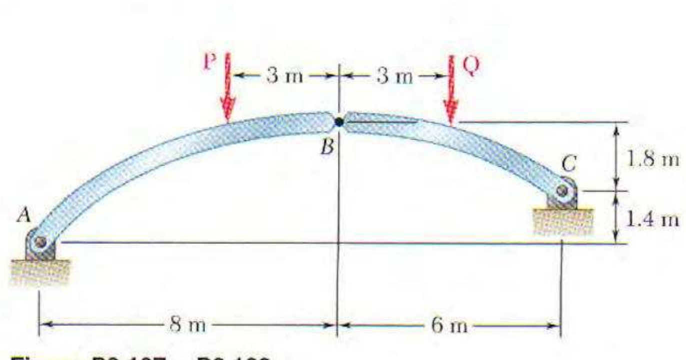


Figura P6.107 y P6.108

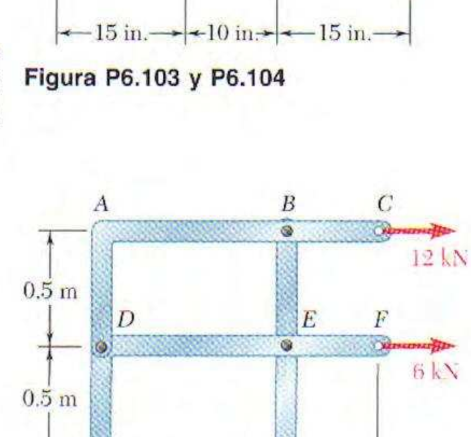


Figura *P6.105*

6.108 El eje del arco *ABC* con tres articulaciones es una parábola con vértice en *B*. Si se sabe que $P = 140$ kN y $Q = 112$ kN, determine *a*) las componentes de la reacción en *A* y *b*) las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento *AB* en *B*.

6.109 Si se sabe que las superficies en *A* y *D* están libres de fricción, determine las fuerzas ejercidas en *B* y *C* sobre el elemento *BCE*.

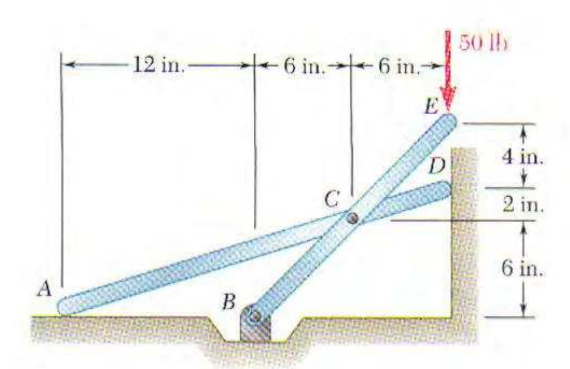


Figura P6.109

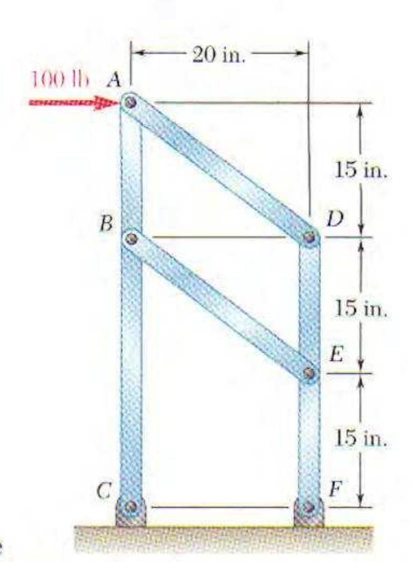


Figura P6.110

6.110 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine *a*) la reacción en *C*, *b*) la fuerza en el elemento *AD*.

6.111, *6.112* y 6.113 Los elementos ABC y CDE están articulados en C y se sostienen mediante cuatro eslabones. Para las cargas mostradas en cada figura, determine la fuerza en cada eslabón.

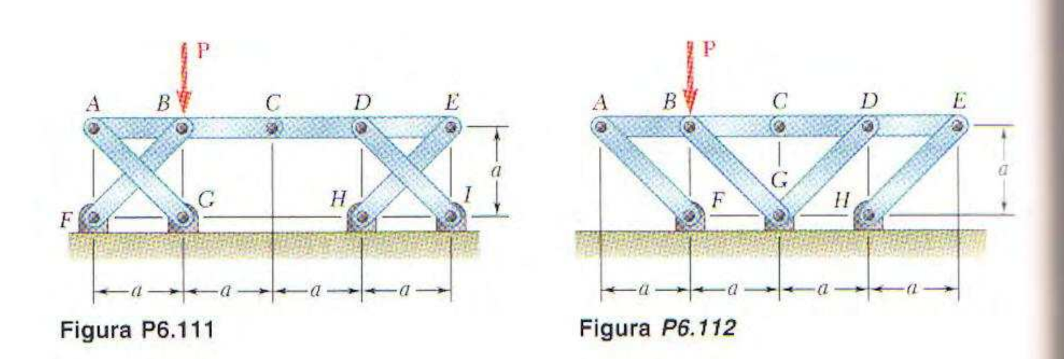


Figura P6.111

Figura *P6.112*

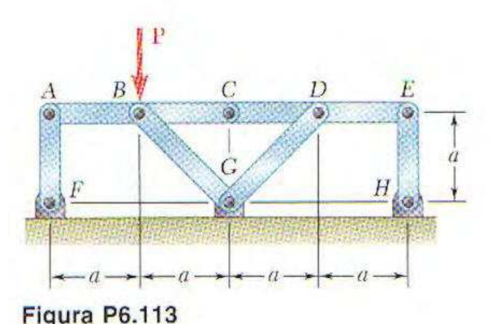


Figura P6.113

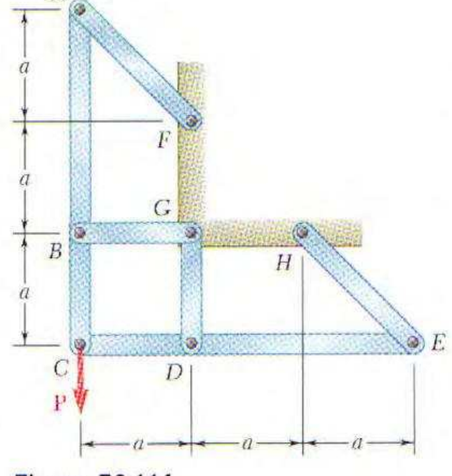


Figura *P6.114*

6.114 Los elementos ABC y CDE están articulados en C y se sostienen mediante los cuatro eslabones AF, BG, DG y EH. Para la carga mostrada determine la fuerza en cada eslabón.

6.115 Retome el problema 6.113, y ahora suponga que la fuerza **P** se sustituye por un par de torsión que actúa en el sentido de las manecillas del reloj con un momento $\mathbf{M}_0$ y se aplica sobre el elemento CDE en D.

6.116 Retome el problema 6.114, y ahora suponga que la fuerza **P** se sustituye por un par de torsión que actúa en el sentido de las manecillas del reloj con un momento $\mathbf{M}_0$ y se aplica sobre el elemento CDE en D.

6.117 Cuatro vigas, cada una de las cuales tiene una longitud de $3a$, se acoplan entre sí mediante clavos simples en A, B, C y D. Cada viga está unida a un apoyo que se encuentra a una distancia a de un extremo de la viga, como se muestra en la figura. Si se supone que en las conexiones sólo se ejercen fuerzas verticales, determine las reacciones verticales en E, F, G y H.

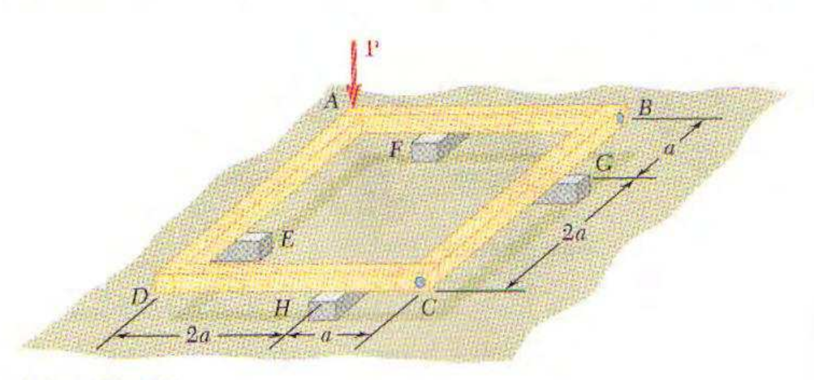


Figura P6.117

6.118 Cuatro vigas de madera, cada una de las cuales tiene una longitud de $2a$, se clavan entre sí en sus puntos medios para formar el sistema de soporte que se muestra en la figura. Si se supone que en las conexiones sólo se ejercen fuerzas verticales, determine las reacciones verticales en A, D, E y H.

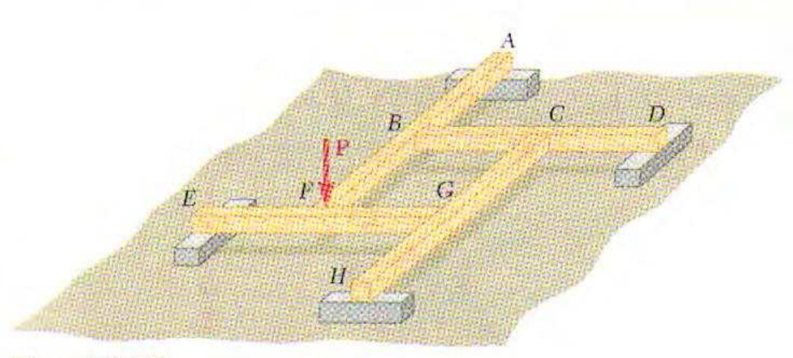
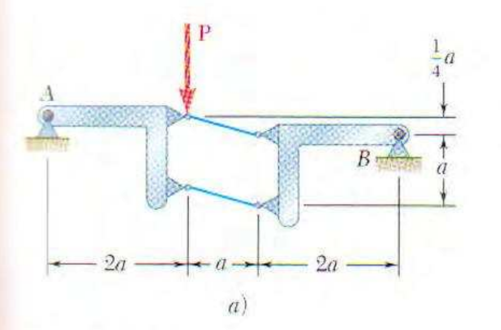
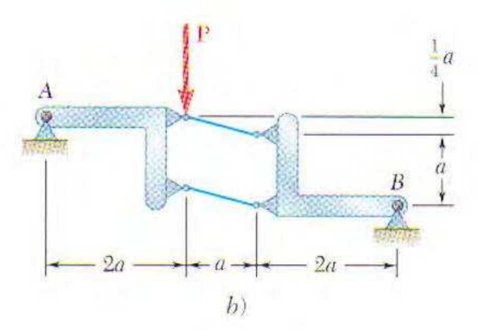


Figura P6.118

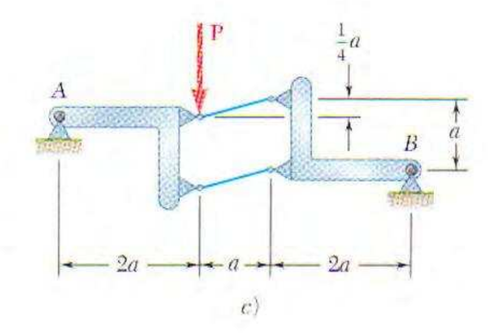
6.119 a 6.121 Cada uno de los armazones que se muestran en las figuras consta de dos elementos en forma de L conectados mediante dos eslabones rígidos. Para cada armazón determine las reacciones en los apoyos e indique si el armazón es rígido o no.



a)

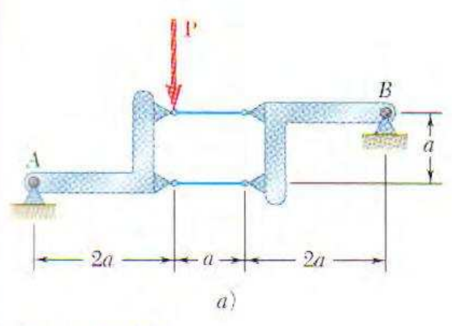


b)

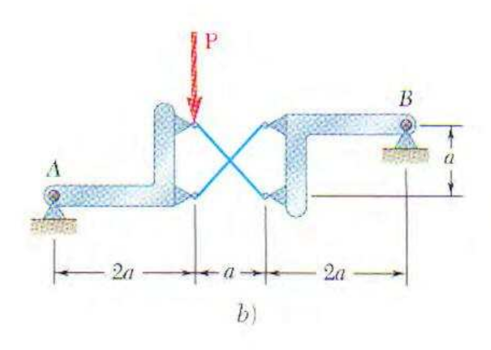


c)

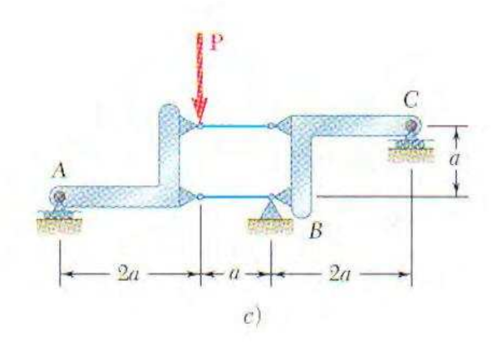
Figura P6.119



a)

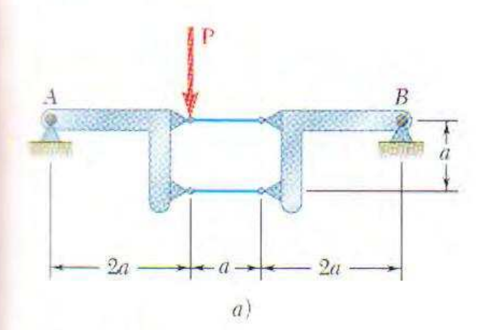


b)

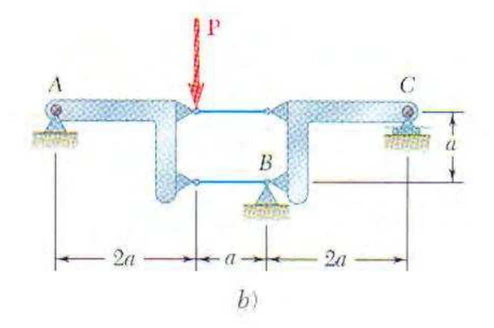


c)

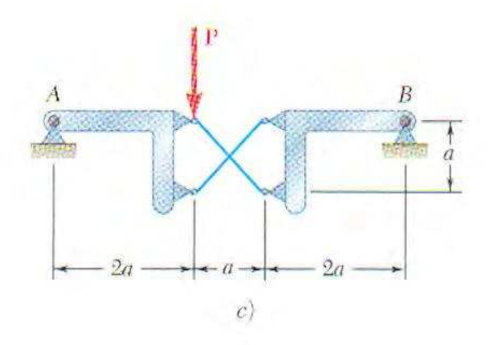
Figura *P6.120*



a)



b)



c)

Figura *P6.121*



Fotografía 6.5 La lámpara que se muestra puede colocarse en muchas posiciones. La fuerza en sus resortes y las fuerzas internas en sus nodos se pueden determinar mediante la consideración de varios cuerpos libres.

6.12. MÁQUINAS

Las máquinas son estructuras diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. No importa si éstas son herramientas simples o incluyen mecanismos complicados, su propósito principal es transformar *fuerzas de entrada* en *fuerzas de salida*. Por ejemplo, considere unas pinzas de corte que se emplean para cortar un alambre (figura 6.22*a*). Si se aplican dos fuerzas iguales y opuestas **P** y −**P** sobre sus mangos, éstas ejercerán dos fuerzas iguales y opuestas **Q** y −**Q** sobre el alambre (figura 6.22*b*).

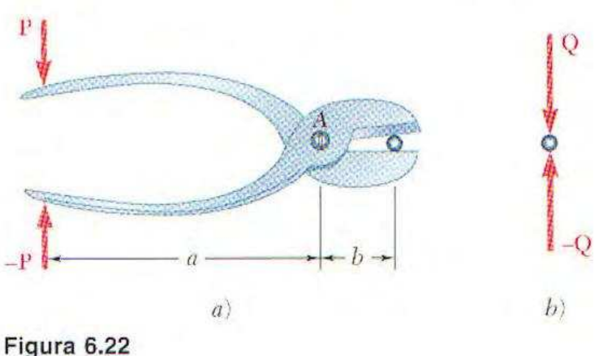


Figura 6.22

Para determinar la magnitud Q de las fuerzas de salida cuando se conoce la magnitud P de las fuerzas de entrada (o a la inversa, para determinar P cuando se conoce Q), se dibuja un diagrama de cuerpo libre de las pinzas *por sí solas*, mostrando las fuerzas de entrada **P** y −**P** y las *reacciones* −**Q** y **Q** que el alambre ejerce sobre las pinzas (figura 6.23).

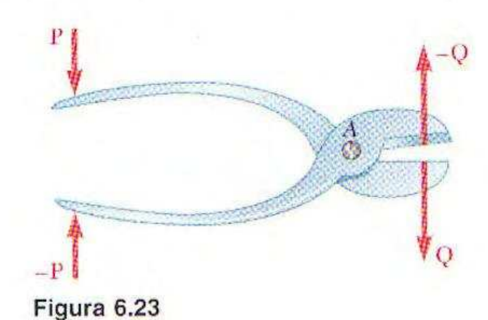


Figura 6.23

Sin embargo, como las pinzas forman una estructura que no es rígida, se debe utilizar una de las partes que la constituyen como un cuerpo libre para poder determinar las fuerzas desconocidas. Por ejemplo, en la figura 6.24*a*, si se toman momentos con respecto a A, se obtiene la relación $Pa = Qb$, la cual define a la magnitud de Q en términos de P o a la magnitud de P en términos de Q. Se puede emplear el mismo diagrama de cuerpo libre para determinar las componentes de la fuerza interna en A; de esta forma, se encuentra que $A_x = 0$ y $A_y = P + Q$.

En el caso de máquinas más complejas, es necesario utilizar varios diagramas de cuerpo libre y, posiblemente, se tendrán que resolver ecuaciones simultáneas que involucren fuerzas múltiples internas. Los cuerpos libres se deben seleccionar de manera que incluyan a las fuerzas de entrada y a las reacciones de las fuerzas de salida, y el número total de componentes de fuerzas desconocidas involucradas no debe ser mayor que el número de ecuaciones independientes que están disponibles. Antes de tratar de resolver un problema, es recomendable conocer si la estructura considerada es determinada o no. Sin embargo, no tiene caso discutir la rigidez de una máquina puesto que ésta incluye partes móviles y, por ende, *no debe* ser rígida.

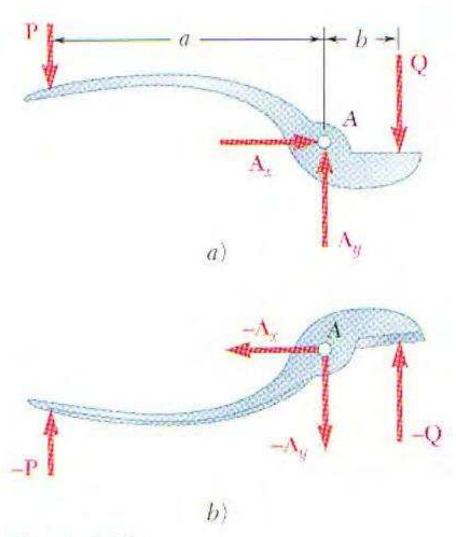
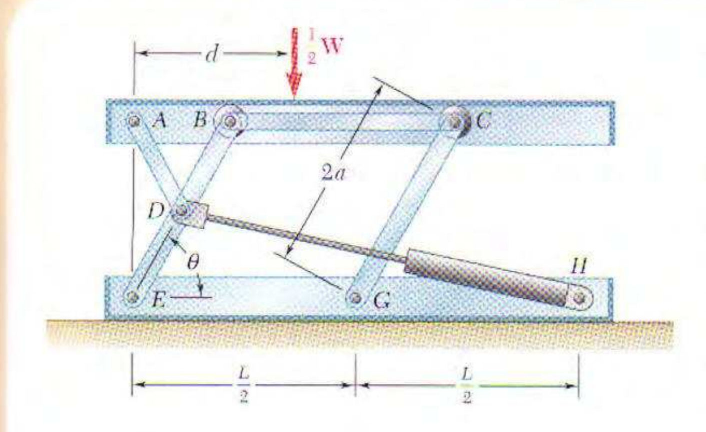
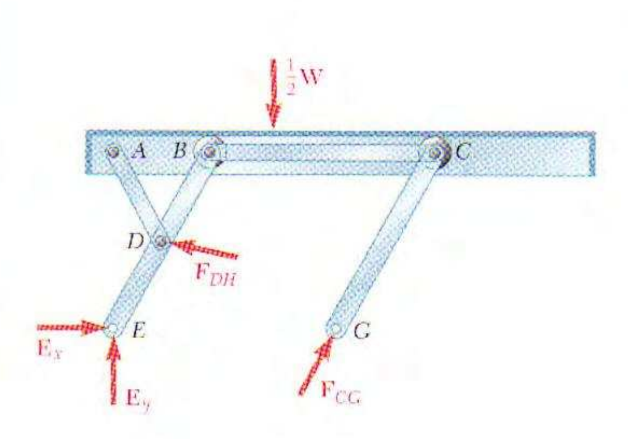


Figura 6.24



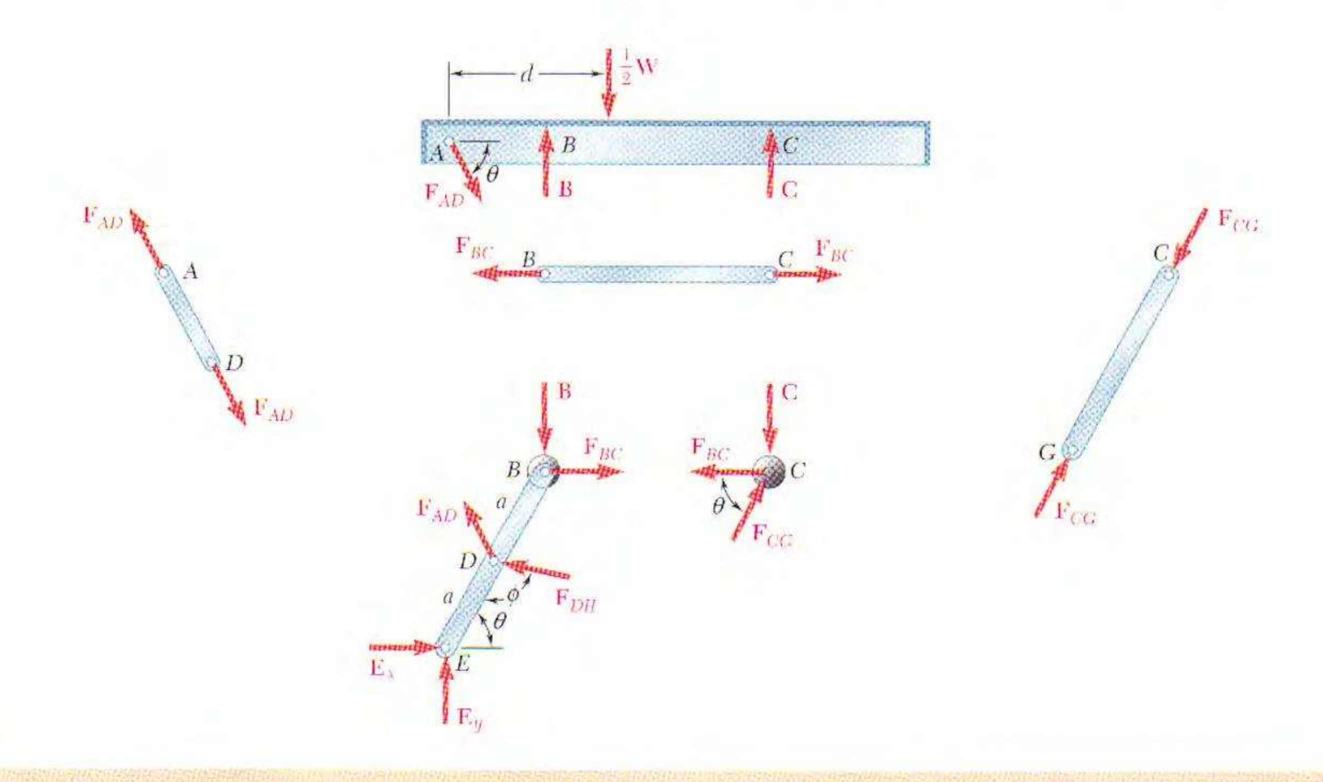
PROBLEMA RESUELTO 6.7

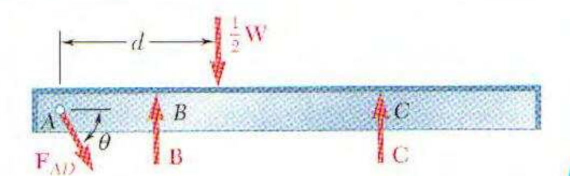
Un elevador hidráulico se emplea para levantar una caja de 1 000 kg. El elevador consta de una plataforma y dos eslabones idénticos sobre los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales. (En la figura sólo se muestra uno de los cilindros y uno de los eslabones.) Cada uno de los elementos EDB y CG tienen una longitud de $2a$ y el elemento AD está sujeto con un perno en el punto medio de EDB. Si la caja se coloca sobre la plataforma de modo que la mitad de su peso sea soportado por el sistema que se muestra, determine la fuerza ejercida por cada cilindro para levantar la caja cuando $\theta = 60°$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. Demuestre que el resultado obtenido es independiente de la distancia d.



SOLUCIÓN

La máquina en consideración consta de la plataforma y del eslabón. Su diagrama de cuerpo libre incluye una fuerza de entrada $\mathbf{F}_{DH}$ ejercida por el cilindro, al peso $\frac{1}{2}\mathbf{W}$, y a reacciones en E y G, cuyas direcciones se muestran en la figura. Como están involucradas más de tres incógnitas, no se utilizará este diagrama de cuerpo libre. Se desensambla el mecanismo y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que lo constituyen. Se observa que AD, BC y CG son elementos sujetos a dos fuerzas. Ya se supuso que el elemento CG está en compresión; ahora se supone que los elementos AD y BC están en tensión y las fuerzas ejercidas sobre éstos se dirigen como se muestra en la figura. Se utilizarán vectores iguales y opuestos para representar las fuerzas ejercidas por los elementos sujetos a dos fuerzas sobre la plataforma, sobre el elemento BDE y sobre el rodillo C.

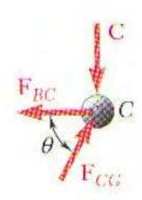


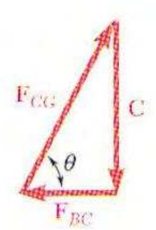


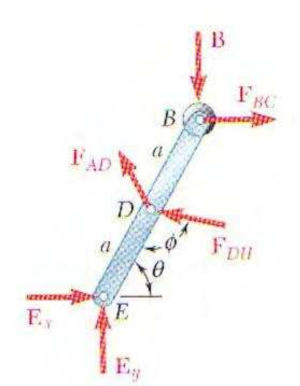
Cuerpo libre: plataforma *ABC*.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0: \qquad F_{AD}\cos\theta = 0 \qquad F_{AD} = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \qquad B + C - \tfrac{1}{2}W = 0 \qquad B + C = \tfrac{1}{2}W \tag{1}$$

Cuerpo libre: rodillo *C*. Se dibuja un triángulo de fuerzas y se obtiene $F_{BC} = C \cot\theta$.







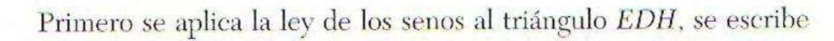
Cuerpo libre: elemento *BDE*. Recordando que $F_{AD} = 0$,

$$+\circlearrowleft\Sigma M_E = 0: \qquad F_{DH}\cos(\phi - 90°)a - B(2a\cos\theta) - F_{BC}(2a \operatorname{sen}\theta) = 0$$
$$F_{DH}a \operatorname{sen}\phi - B(2a\cos\theta) - (C\cot\theta)(2a\operatorname{sen}\theta) = 0$$
$$F_{DH}\operatorname{sen}\phi - 2(B + C)\cos\theta = 0$$

Recordando la ecuación (1), se tiene que

$$F_{DH} = W\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\phi} \tag{2}$$

y se observa que *el resultado obtenido es independiente de d.* ◀



Primero se aplica la ley de los senos al triángulo *EDH*, se escribe

$$\frac{\operatorname{sen}\phi}{EH} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{DH} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{EH}{DH}\operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

Ahora, con la ley de los cosenos se tiene que

$$(DH)^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$
$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20)\cos 60°$$
$$(DH)^2 = 8.49 \qquad DH = 2.91 \text{ m}$$

También se observa que

$$W = mg = (1\,000 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9\,810 \text{ N} = 981 \text{ kN}$$

Sustituyendo en (2) el valor de sen ϕ obtenido en (3) y con los datos numéricos, se escribe

$$F_{DH} = W\frac{DH}{EH}\cot\theta = (9.81 \text{ kN})\frac{2.91 \text{ m}}{3.20 \text{ m}}\cot 60°$$

$$F_{DH} = 5.15 \text{ kN} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección estuvo dedicada al análisis de *máquinas*. Como éstas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas, siempre contienen partes móviles. Sin embargo, las máquinas que se considerarán aquí siempre estarán en reposo y se estará trabajando con el conjunto de *fuerzas requeridas para mantener el equilibrio de la máquina*.

Las fuerzas conocidas que actúan sobre una máquina reciben el nombre de *fuerzas de entrada. Una máquina transforma las fuerzas de entrada en fuerzas de salida,* como las fuerzas de corte aplicadas por las pinzas de la figura 6.22. Las fuerzas de salida se determinan encontrando las fuerzas iguales y opuestas a las fuerzas de salida que se deben aplicar sobre la máquina para mantener su equilibrio.

En la lección previa se analizaron armazones; ahora se utilizará casi el mismo procedimiento para analizar máquinas:

1. *Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la máquina completa* y utilizarlo para determinar tantas fuerzas desconocidas ejercidas sobre la máquina como sea posible.

2. *Desensamblar la máquina y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los elementos que la constituyen.*

3. *Considere primero a los elementos sujetos a dos fuerzas,* se aplican fuerzas iguales y opuestas a cada uno de los elementos sujetos a dos fuerzas en aquellos puntos donde éstos se conectan a otros elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento está en tensión o en compresión, sólo se *supone* que el elemento está en tensión y se *dirigen ambas fuerzas hacia afuera del elemento*. Como estas fuerzas tienen la misma magnitud desconocida, *a ambas se les asigna el mismo nombre*.

4. *Después se consideran los elementos sujetos a fuerzas múltiples.* Para cada uno de estos elementos se deben mostrar todas las fuerzas que actúan sobre el mismo, incluyendo cargas y fuerzas aplicadas, reacciones y fuerzas internas en las conexiones.

a) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a un elemento sujeto a dos fuerzas, se aplica a aquella fuerza *igual y opuesta* a la fuerza dibujada en el diagrama de cuerpo libre de éste, *asignándole el mismo nombre*.

b) Donde un elemento sujeto a fuerzas múltiples está conectado a otro elemento sujeto a fuerzas múltiples, se usan *componentes horizontales y verticales* para representar a las fuerzas internas en dicho punto. Las direcciones que se seleccionan para cada una de las dos componentes de fuerza ejercidas sobre el primer elemento sujeto a fuerzas múltiples son arbitrarias, pero *se deben aplicar componentes de fuerza iguales y opuestas y con el mismo nombre* al otro elemento.

5. *Se pueden escribir ecuaciones de equilibrio* después de que se han terminado los diagramas de cuerpo libre.

a) Para simplificar la solución, siempre que sea posible se deben escribir y resolver ecuaciones de equilibrio que involucren a una sola incógnita.

b) Como la dirección de cada una de las fuerzas desconocidas se seleccionó de manera arbitraria, al final de la solución se debe determinar si la suposición fue correcta o no. Para esto *se considera el signo* del valor encontrado para cada una de las incógnitas. Un signo *positivo* indica que la suposición fue correcta y un signo *negativo* indica que la suposición fue incorrecta.

6. *Por último, se debe verificar la solución* sustituyendo los resultados obtenidos en una ecuación de equilibrio que no se haya utilizado previamente.

Problemas

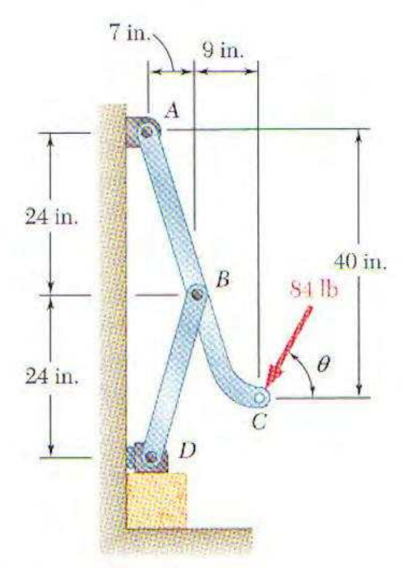


Figura P6.122

6.122 Se aplica una fuerza de 84 lb sobre la prensa de fiador en C. Si se sabe que $\theta = 90°$, determine *a*) la fuerza vertical ejercida sobre el bloque en D, *b*) la fuerza ejercida sobre el elemento ABC en B.

6.123 Retome el problema 6.122 cuando $\theta = 0°$.

6.124 La varilla de control CE pasa a través de un orificio horizontal en el cuerpo del sistema de fiador que se muestra en la figura. Si se sabe que el eslabón BD tiene 250 mm de largo, determine la fuerza **Q** requerida para mantener al sistema en equilibrio cuando $\beta = 20°$.

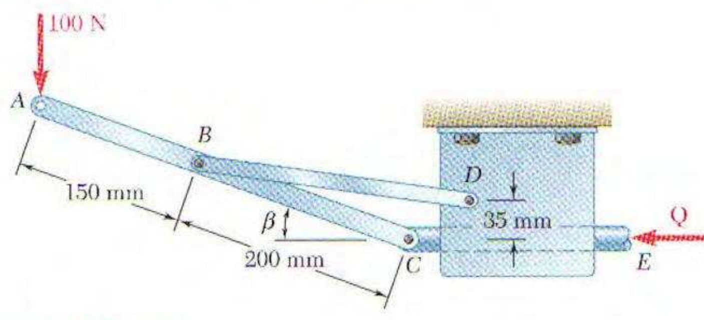


Figura *P6.124*

6.125 Retome el problema 6.124 cuando *a*) $\beta = 0°$, *b*) $\beta = 6°$.

6.126 La prensa que se muestra en la figura se utiliza para grabar un sello pequeño en E. Si se sabe que $P = 250$ N, determine *a*) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre el sello y *b*) la reacción en A.

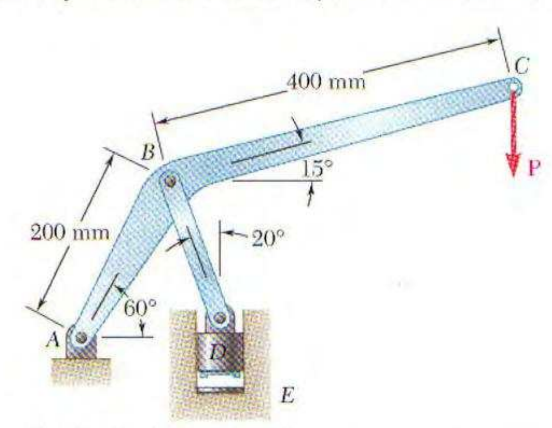


Figura P6.126 y P6.127

6.127 La prensa que se muestra en la figura se utiliza para grabar un sello pequeño en E. Si se sabe que la componente vertical de la fuerza ejercida sobre el sello debe ser de 900 N, determine *a*) la fuerza vertical **P** requerida y *b*) la reacción correspondiente en A.

6.128 En el sistema de suministro mostrado en la figura, el agua a presión ejerce una fuerza hacia abajo de 135 N sobre la conexión vertical en A. Determine la tensión en el eslabón fusible DE y la fuerza ejercida sobre el elemento BCE en B.

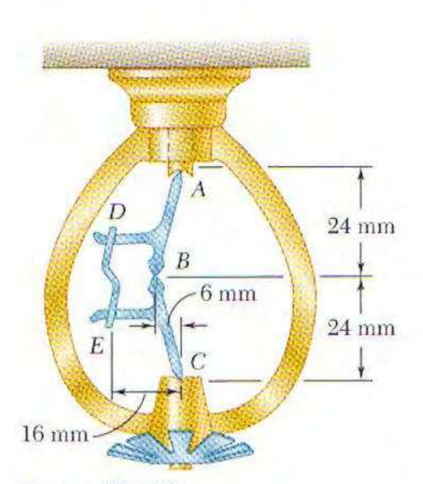


Figura P6.128

6.129 Un par **M** de 1.5 kN · m de magnitud se aplica en la manivela del sistema motriz mostrado en la figura. Para cada una de las dos posiciones mostradas, determine la fuerza **P** necesaria para mantener el equilibrio del sistema.

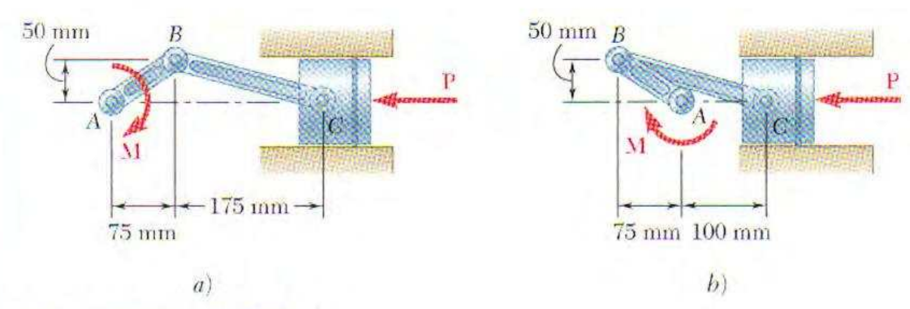


Figura P6.129 y P6.130

6.130 Una fuerza **P** de 16 kN de magnitud se aplica en el pistón del sistema motriz mostrado en la figura. Para cada una de las dos posiciones mostradas, determine el par **M** necesario para mantener el equilibrio del sistema.

6.131 El pasador en B se une al elemento ABC y puede deslizarse libremente a lo largo de una ranura en la placa fija que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando $\theta = 30°$.

6.132 El pasador en B se une al elemento ABC y puede deslizarse libremente a lo largo de una ranura en la placa fija que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando $\theta = 60°$.

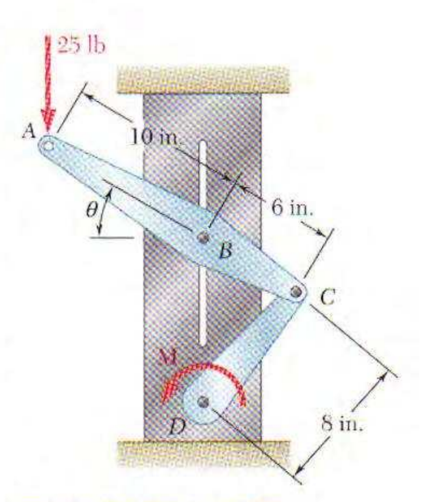


Figura P6.131 y P6.132

6.133 El brazo ABC se conecta mediante pernos a un collar en B y a la manivela CD en C. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 0°$.

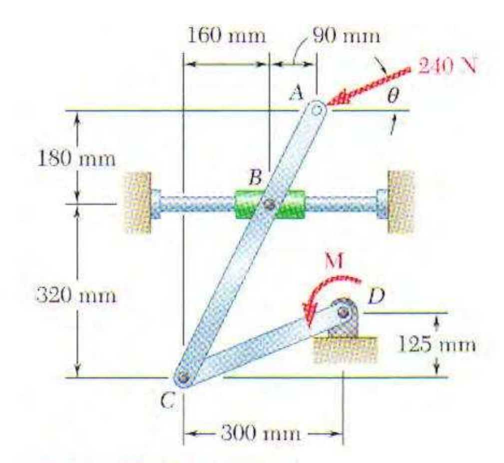


Figura P6.133 y P6.134

6.134 El brazo ABC se conecta mediante pernos a un collar en B y a la manivela CD en C. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 90°$.

6.135 y 6.136 Dos barras se conectan mediante un bloque deslizante como se muestra en las figuras. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par $\mathbf{M}_A$ necesario para mantener al sistema en equilibrio.

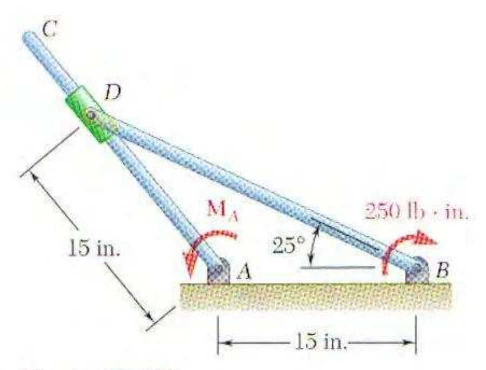


Figura *P6.135*

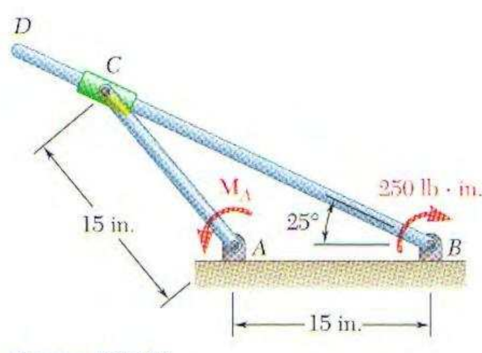


Figura *P6.136*

6.137 y 6.138 La barra CD que está unida al collarín D y pasa a través de un collarín soldado en el extremo B de la palanca AB. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par **M** necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 30°$.

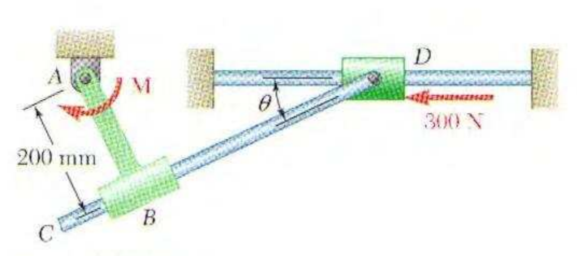


Figura P6.137

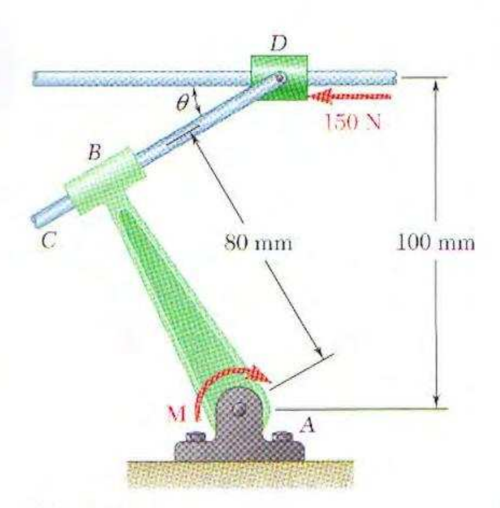


Figura P6.138

6.139 Dos cilindros hidráulicos controlan la posición del brazo robótico ABC. Si se sabe que en la posición mostrada los cilindros están paralelos, determine la fuerza ejercida por cada cilindro cuando $P = 160$ N y $Q = 80$ N.

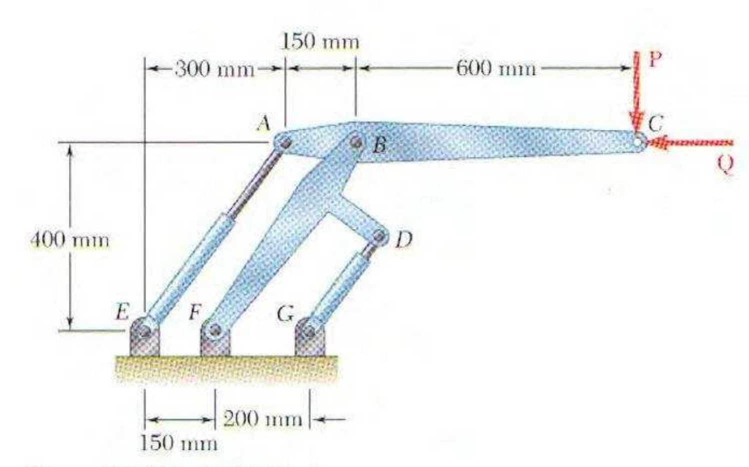


Figura P6.139 y P6.140

6.140 Dos cilindros hidráulicos controlan la posición del brazo robótico ABC. En la posición mostrada los cilindros están paralelos y ambos se encuentran en tensión. Si se sabe que $F_{AE} = 600$ N y $F_{DC} = 50$ N, determine las fuerzas **P** y **Q** que se aplican sobre el brazo ABC en C.

6.141 Un tronco que pesa 800 lb de peso se levanta mediante un par de tenazas como se muestra en la figura. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza DEF en E y en F.

6.142 Un riel de ferrocarril con 39 ft de longitud y 44 lb/ft de peso se levanta mediante las tenazas que se muestran en la figura. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza BDF en D y en F.

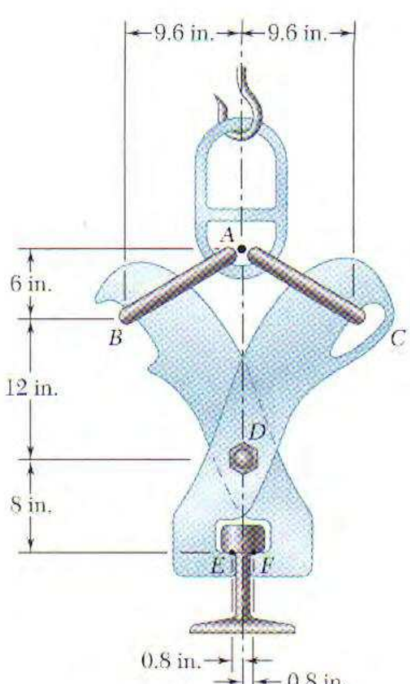
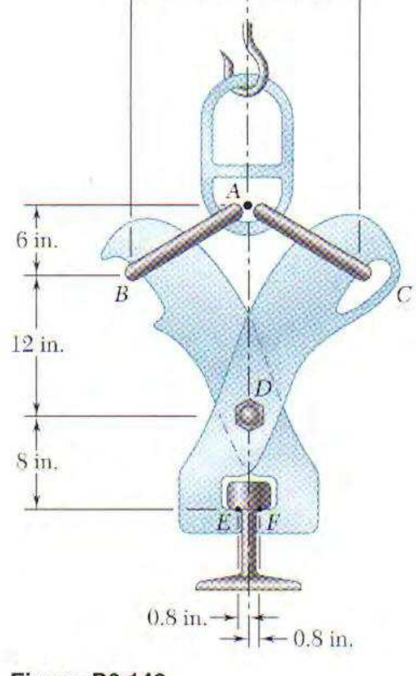



Figura P6.142

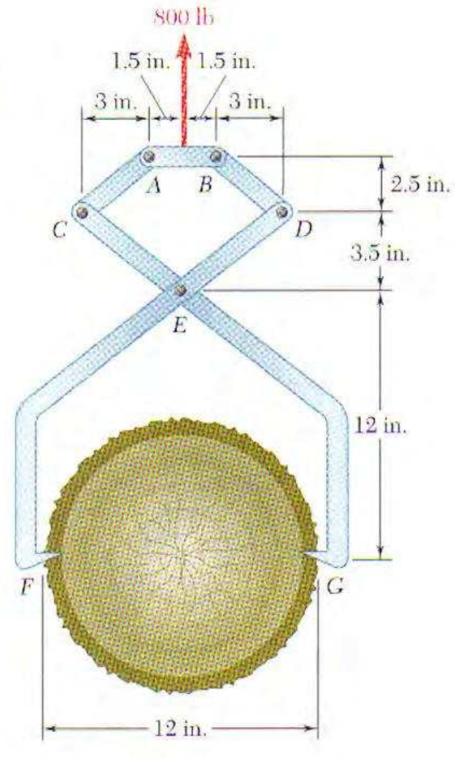


Figura *P6.141*

6.143 Las tenazas que se muestran en la figura se usan para aplicar una fuerza total hacia arriba de 45 kN sobre el tapón de un tubo. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza ADF en D y F.

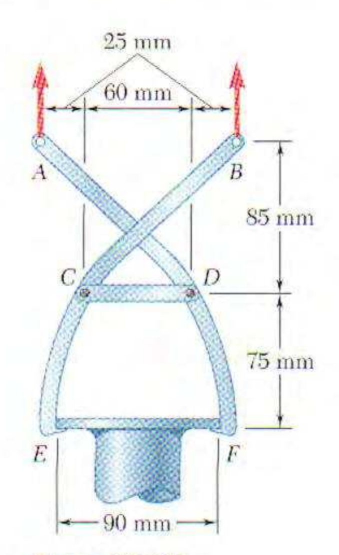


Figura P6.143

6.144 Si el fiador mostrado en la figura se agrega a las tenazas del problema 6.143 y se aplica una sola fuerza vertical en G, determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza ADF en D y en F.

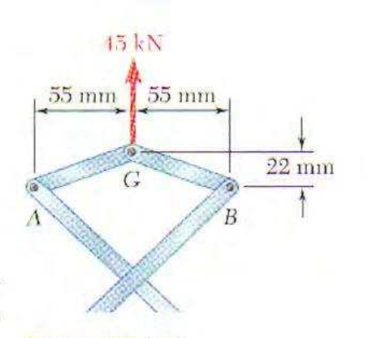


Figura P6.144

6.145 Las pinzas que se muestran en la figura se usan para apretar una varilla de 0.3 in. de diámetro. Si se aplican dos fuerzas de 60 lb sobre los mangos, determine *a*) la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre la varilla, *b*) la fuerza ejercida por el pasador en *A* sobre la porción *AB* de las pinzas.

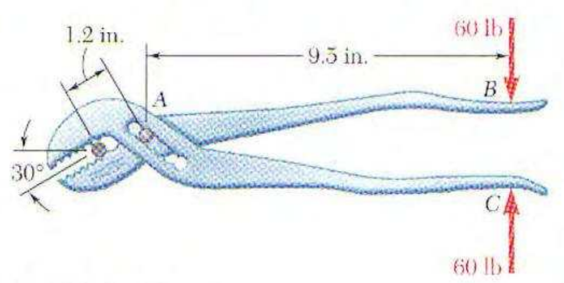


Figura P6.145

6.146 Al usar las pinzas cortadoras para pernos que se muestran en la figura, un trabajador aplica dos fuerzas de 300 N sobre sus mangos. Determine la magnitud de las fuerzas ejercidas por las pinzas cortadoras sobre el perno.

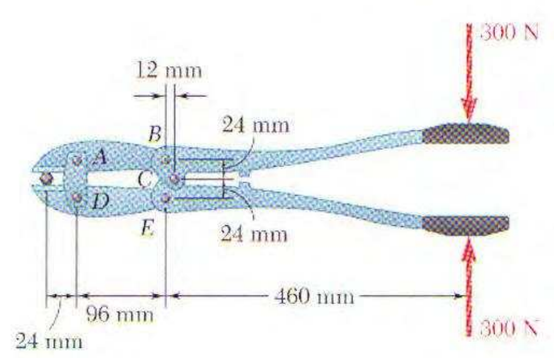


Figura P6.146

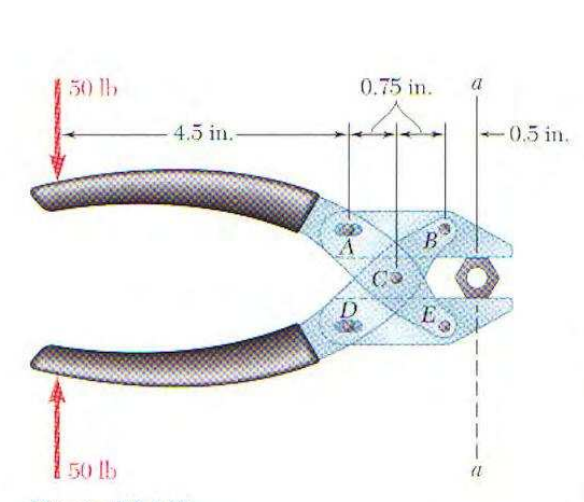


Figura *P6.147*

6.147 Determine la magnitud de las fuerzas de apriete ejercidas sobre la tuerca a lo largo de la línea *aa*, cuando se aplican dos fuerzas de 50 lb sobre los mangos, como se muestra en la figura. Suponga que los pernos *A* y *D* se deslizan libremente en las ranuras de las mandíbulas.

6.148 Determine la magnitud de las fuerzas de apriete generadas cuando dos fuerzas de 300 N se aplican como se muestra en la figura.

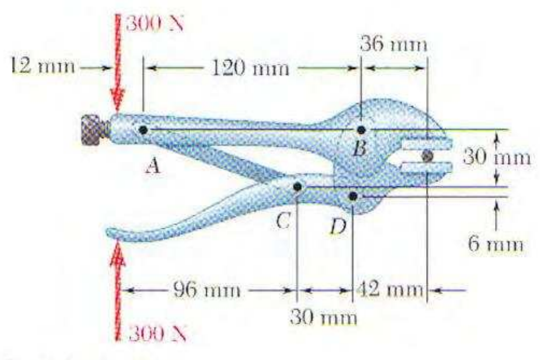


Figura P6.148

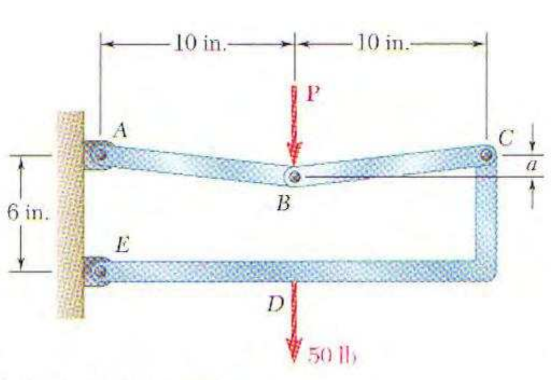
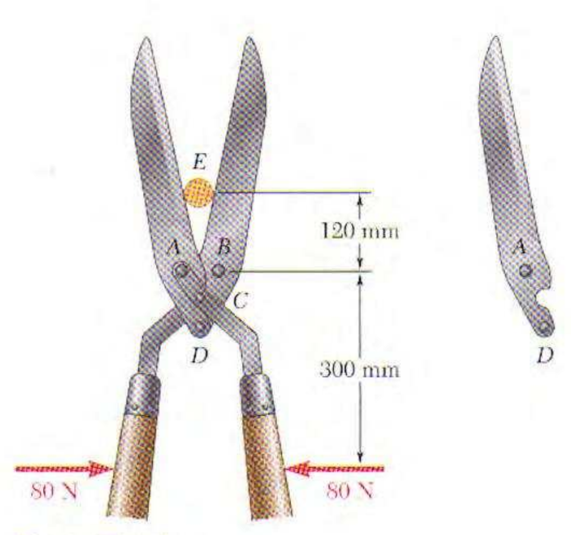


Figura P6.149 y P6.150

6.149 Si se sabe que el armazón mostrado en la figura tiene una desviación $a = 1$ in. en *B*, determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio en la posición mostrada.

6.150 Si se sabe que el armazón mostrado en la figura tiene una desviación $a = 0.5$ in. en *B*, determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio en la posición mostrada.

6.151 Las tijeras para jardín mostradas en la figura constan de dos cuchillas y dos mangos. Los dos mangos están unidos por medio del perno C y las dos cuchillas mediante el perno D. La cuchilla de la izquierda y el mango de la derecha están unidos por medio del perno A y la cuchilla de la derecha y el mango de la izquierda mediante el perno B. Determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre una rama pequeña en E cuando se aplican dos fuerzas de 80 N en los mangos de las tijeras, como se muestra en la figura.



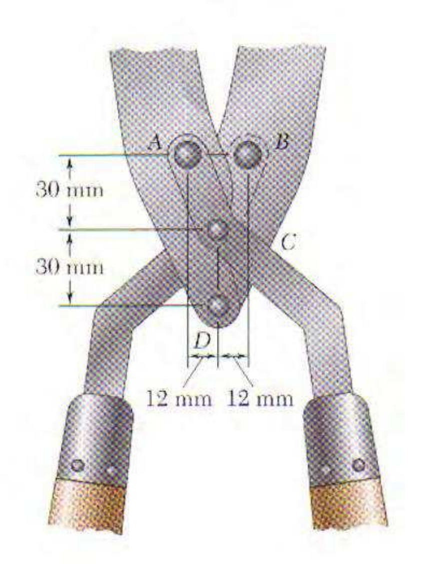


Figura P6.151

6.152 El brazo de extensión telescópica ABC se emplea para levantar una plataforma con trabajadores de la construcción. La masa conjunta de los trabajadores y de la plataforma es de 200 kg y su centro de gravedad compuesto se localiza directamente por encima de C. Para la posición en la cual $\theta = 20°$, determine a) la fuerza ejercida en B por el cilindro hidráulico simple BD y b) la fuerza ejercida sobre el soporte del sistema en A.

6.153 El brazo de extensión telescópica ABC puede descender hasta que el extremo C esté próximo al suelo, de forma que los trabajadores puedan abordar con facilidad la plataforma. Para la posición en la cual $\theta = -20°$, determine a) la fuerza ejercida en B por el cilindro hidráulico simple BD y b) la fuerza ejercida sobre el soporte del sistema en A.

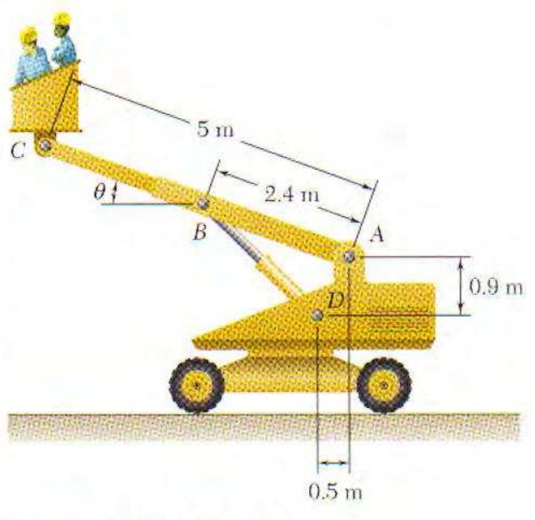


Figura *P6.152* y *P6.153*

6.154 La posición del elemento ABC se controla mediante el cilindro hidráulico CD. Si se sabe que $\theta = 30°$, determine para la carga mostrada, a) la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador C, b) la reacción en B.

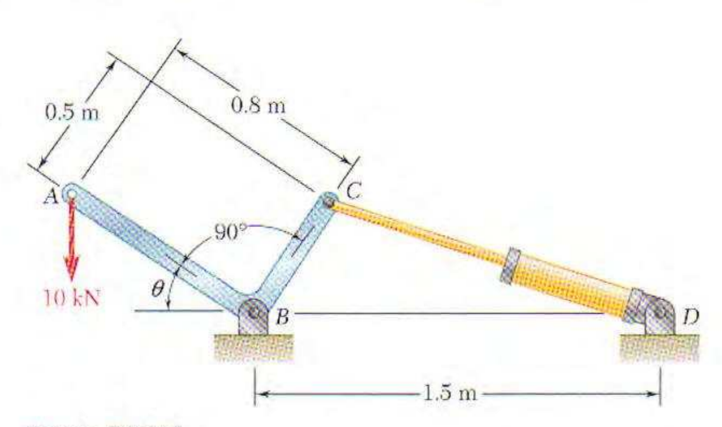


Figura P6.154

6.155 El movimiento del cubo de la retroexcavadora que se muestra en la figura se controla mediante dos brazos y un eslabón articulado en *D*. Los brazos están colocados simétricamente respecto de los planos central, vertical y longitudinal de la retroexcavadora; en la figura sólo se muestra el brazo *AFJ* y su cilindro de control *EF*. El eslabón simple *GHBD* y su cilindro de control *BC* se encuentran localizados en el plano de simetría. Para la posición y la carga mostradas en la figura, determine la fuerza ejercida por *a*) el cilindro *BC* y *b*) el cilindro *EF*.

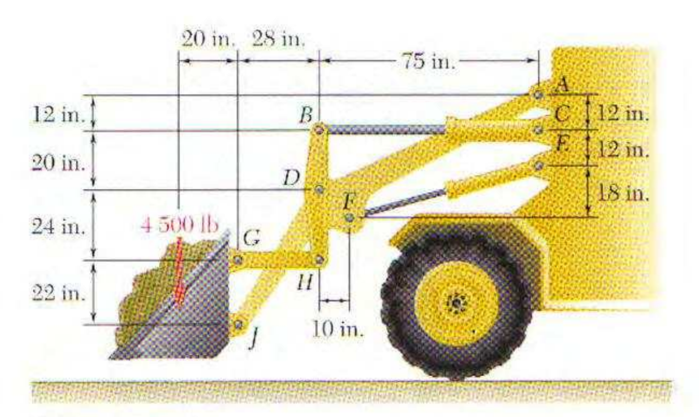


Figura P6.155

6.156 El cubo de la retroexcavadora que se muestra en la figura transporta una carga de 3 200 lb. El movimiento del cubo se controla mediante dos mecanismos idénticos, uno de los cuales se muestra en la figura. Si se sabe que el mecanismo mostrado sostiene la mitad de las 3 200 lb de carga, determine la fuerza ejercida por *a*) el cilindro *CD* y *b*) el cilindro *FH*.

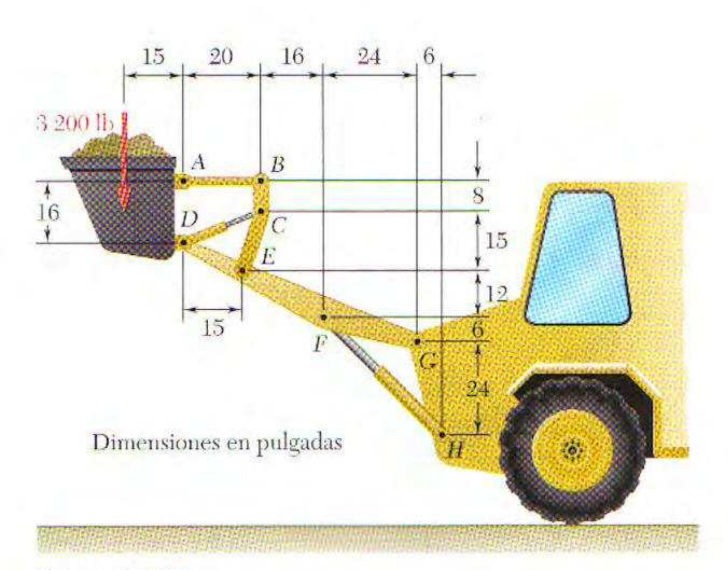


Figura P6.156

6.157 El movimiento del cubo de la retroexcavadora que se muestra en la figura se controla mediante los cilindros hidráulicos *AD*, *CG* y *EF*. Debido a un intento por sacar de su posición una porción de losa, se ejerce una fuerza **P** de 2 kips sobre los dientes del cubo en *J*. Si se sabe que $\theta = 45°$, determine la fuerza ejercida por cada cilindro.

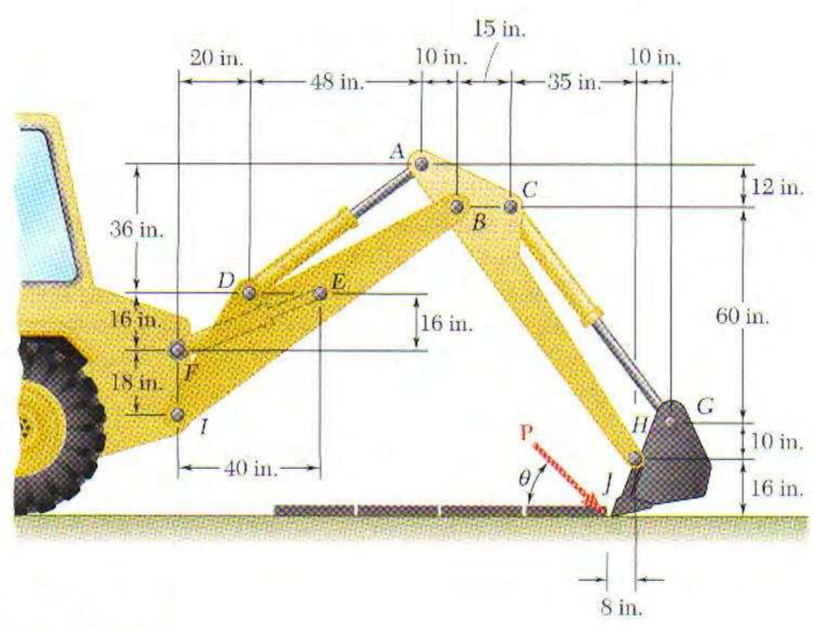


Figura *P6.157*

6.158 Retome el problema 6.157, y ahora suponga que la fuerza **P** de 2 kips actúa en forma horizontal hacia la derecha ($\theta = 0°$).

6.159 Los engranes *D* y *G* mostrados en la figura están rígidamente unidos a los ejes, los cuales se sostienen mediante cojinetes sin fricción. Si $r_D = 90$ mm y $r_G = 30$ mm, determine *a*) el par $\mathbf{M}_0$ que debe aplicarse para mantener el equilibrio y *b*) las reacciones en *A* y *B*.

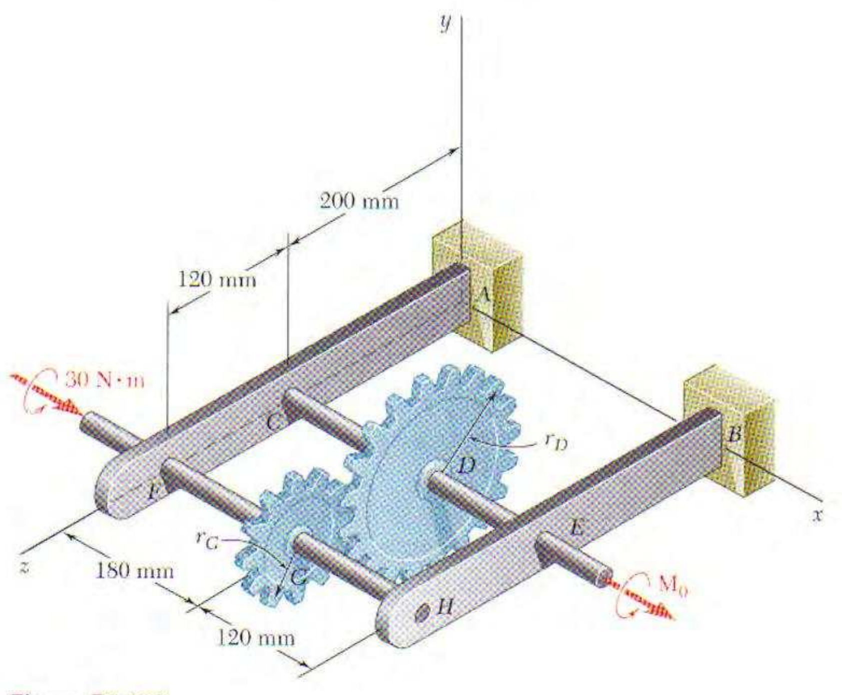


Figura P6.159

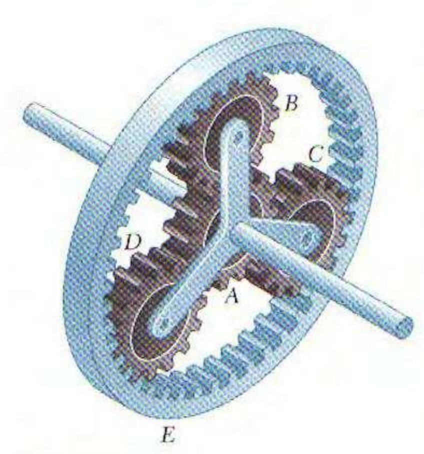


Figura P6.160

6.160 En el sistema de engranes planetarios mostrado en la figura, el radio del engrane central A es $a = 18$ mm, el radio de cada engrane planetario es b y el radio del engrane exterior E es $(a + 2b)$. Se aplica un par de magnitud $M_A = 10$ N · m en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj en el engrane central A, y se aplica un par de magnitud $M_S = 50$ N · m en un sentido contrario al de las manecillas del reloj en el brazo BCD. Si el sistema está en equilibrio, determine *a*) el radio b que deben tener los engranes planetarios y *b*) la magnitud del par M_E que debe aplicarse sobre el engrane exterior E.

***6.161** Dos ejes AC y CF, los cuales están contenidos en el plano vertical xy, se conectan mediante una junta universal en C. Los cojinetes en B y D no ejercen ninguna fuerza axial. Un par con magnitud de 500 lb · in. (el cual actúa en el sentido de las manecillas del reloj cuando se ve desde el eje positivo x) se aplica sobre el eje CF en F. En el instante en que el brazo de la pieza transversal unida al eje CF está en posición horizontal, determine *a*) la magnitud del par que debe aplicarse al eje AC en A para mantener el equilibrio y *b*) las reacciones en B, D y E. (*Sugerencia:* La suma de los pares ejercidos sobre la pieza transversal debe ser igual a cero.)

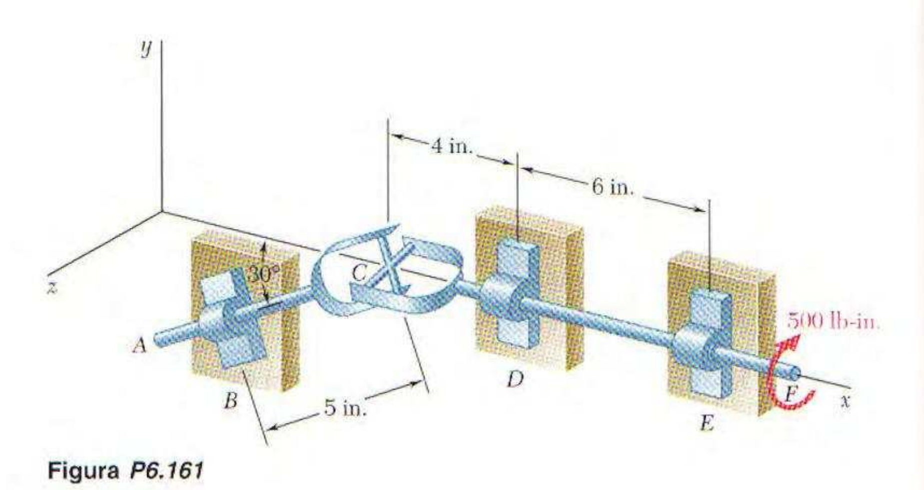


Figura *P6.161*

***6.162** Retome el problema 6.161, y ahora suponga que el brazo de la pieza transversal unida al eje CF está en posición vertical.

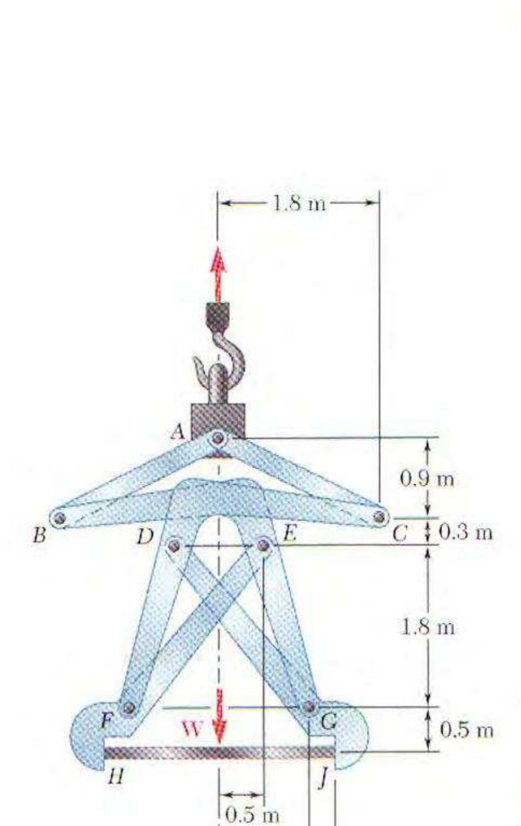


Figura P6.163

***6.163** Las tenazas mecánicas de gran tamaño que se muestran en la figura se emplean para asir una placa gruesa de metal HJ de 7 500 kg. Si se sabe que no existe deslizamiento entre las asideras de las tenazas y la placa en H y J, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento EFH. (*Sugerencia:* Considere la simetría de las tenazas para establecer las relaciones entre las componentes de la fuerza que actúa sobre EFH en E y las componentes de la fuerza que actúa sobre CDF en D.)

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 6

En este capítulo se aprendió a determinar las *fuerzas internas* que mantienen unidas a las distintas partes de una estructura.

Análisis de armaduras

La primera mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de *armaduras*, es decir, el análisis de estructuras constituidas por *elementos rectos que están conectados únicamente en sus extremos*. Como los elementos son delgados e incapaces de soportar cargas laterales, todas las cargas deben estar aplicadas en las uniones o nodos; por tanto, una armadura está constituida por *pernos y por elementos sujetos a dos fuerzas* [sección 6.2].

Armaduras simples

Se dice que una armadura es *rígida* si está diseñada de modo que no se deformará mucho o se colapsará bajo la acción de una carga pequeña. Una armadura triangular constituida por tres elementos conectados en tres nodos es una armadura rígida (figura 6.25*a*). *De la misma forma, también será una armadura rígida la que se* obtiene agregándole a dicha armadura triangular dos nuevos elementos y conectándolos en un nuevo nodo (figura 6.25*b*). Las armaduras que se obtienen repitiendo este procedimiento reciben el nombre de *armaduras simples*. Se puede comprobar que en una armadura simple el número total de elementos es $m = 2n - 3$, donde n es el número total de nodos [sección 6.3].

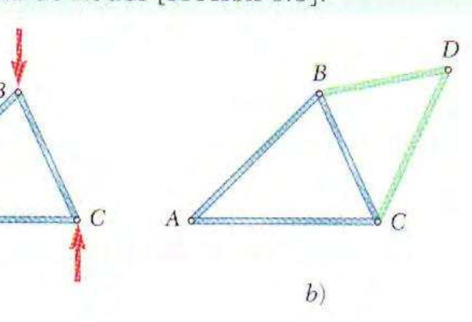


Figura 6.25

Método de los nodos

Por el *método de los nodos* [sección 6.4] se pueden determinar las fuerzas en los distintos elementos de una armadura simple. Primero, se obtienen las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como un cuerpo libre. Después se dibuja el diagrama de cuerpo libre para cada perno, mostrando las fuerzas ejercidas sobre el mismo por los elementos o apoyos que éste conecta. Como los elementos que constituyen a la armadura son elementos rectos sujetos a dos fuerzas, la fuerza ejercida por un elemento sobre el perno está dirigida a lo largo de dicho elemento y, por tanto, sólo se desconoce su magnitud. En el caso de una armadura simple, siempre se pueden dibujar los diagramas de cuerpo libre de los pernos en un orden tal que únicamente se incluyen dos incógnitas en cada diagrama. Estas fuerzas se obtienen a partir de las dos ecuaciones de equilibrio correspondientes o —si sólo están involucradas tres fuerzas— a partir

del triángulo de fuerzas correspondiente. Si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia el perno, dicho elemento está en *compresión*; si la fuerza ejercida por un elemento sobre un perno está dirigida hacia fuera de éste, dicho elemento está en *tensión* [problema resuelto 6.1]. Algunas veces se simplifica el análisis de una armadura si se identifican primero los *nodos que se encuentran bajo condiciones especiales de carga* [sección 6.5]. El método de los nodos también se extiende para el análisis de *armaduras espaciales* o tridimensionales [sección 6.6].

Método de secciones

El *método de secciones* es más eficaz que el método de los nodos cuando únicamente se desea determinar la fuerza en un solo elemento —o en muy pocos elementos— [sección 6.7]. Por ejemplo, para determinar la fuerza en el elemento BD de la armadura de la figura 6.26*a*, se *pasa una sección* a través de los elementos BD, BE y CE, se remueven dichos elementos y se usa la porción ABC de la armadura como un cuerpo libre (figura 6.26*b*). Si se escribe $\Sigma M_E = 0$, se determina la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_{BD}$, la cual representa la fuerza en el elemento BD. Un signo positivo indica que el elemento está en *tensión*; un signo negativo indica que el elemento está en *compresión* [problemas resueltos 6.2 y 6.3].

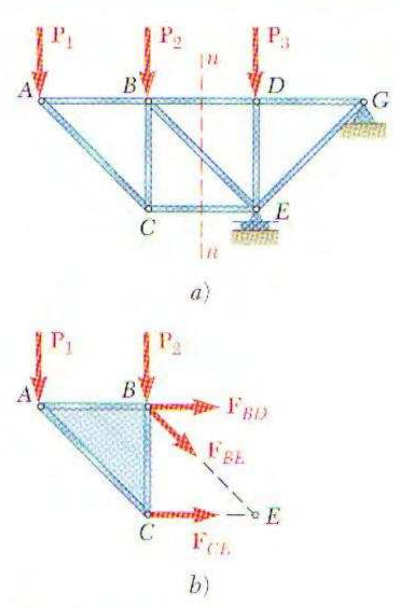


Figura 6.26

Armaduras compuestas

El método de secciones es útil para el análisis de *armaduras compuestas*, esto es, armaduras que no se pueden construir a partir de la armadura triangular básica de la figura 6.25*a*, pero que se obtienen conectando rígidamente varias armaduras simples [sección 6.8]. Si las armaduras simples que constituyen a la armadura compuesta han sido conectadas en forma apropiada (por medio de un perno y un eslabón o por medio de tres eslabones que no son concurrentes ni paralelos) y si la estructura resultante está bien apoyada (por medio de un perno y un rodillo), la armadura compuesta será *estáticamente determinada, rígida y completamente restringida*. Entonces se satisface la siguiente condición necesaria —pero no suficiente—: $m + r = 2n$, donde m es el número de elementos, r es el número de incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos y n es el número de nodos.

Armazones y máquinas

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada al análisis de *armazones y máquinas*. Ambas son estructuras que contienen *elementos sujetos a fuerzas múltiples*, sobre los cuales actúan tres o más fuerzas. Los armazones están diseñados para soportar cargas y usualmente son estructuras estacionarias totalmente restringidas. Las máquinas están diseñadas para transmitir o modificar fuerzas y siempre contienen partes móviles [sección 6.9].

Análisis de un armazón

Para *analizar un armazón*, primero se considera al *armazón completo como un cuerpo libre* y se escriben tres ecuaciones de equilibrio [sección 6.10]. Si el armazón permanece rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran sólo tres incógnitas y se pueden determinar a partir de dichas ecuaciones de equilibrio [problemas resueltos 6.4 y 6.5]. Por otra parte, si el armazón deja de ser rígido cuando se separa de sus apoyos, las reacciones involucran más de tres incógnitas y no pueden determinarse todas las incógnitas a partir de las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo [sección 6.11; problema resuelto 6.6].

Elementos sujetos a fuerzas múltiples

Cuando se *desensambla el armazón* y se identifican los diversos elementos que lo constituyen como elementos sujetos a dos fuerzas o elementos sujetos a fuerzas múltiples, se supone que los pernos forman una parte integral de uno de los elementos que éstos conectan. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples, observando que cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados al mismo elemento sujeto a dos fuerzas, este último actúa sobre los elementos sujetos a fuerzas múltiples con *fuerzas iguales y opuestas de magnitud desconocida pero cuya dirección es conocida*. Cuando dos elementos sujetos a fuerzas múltiples están conectados por un perno, éstos ejercen entre sí *fuerzas iguales y opuestas cuya dirección es desconocida*, las cuales se deben representar por *dos componentes desconocidas*. Entonces se pueden resolver las ecuaciones de equilibrio obtenidas a partir de los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples para determinar las distintas fuerzas internas [problemas resueltos 6.4 y 6.5]. También pueden emplearse las ecuaciones de equilibrio para completar la determinación de las reacciones en los apoyos [problema resuelto 6.6]. De hecho, si el armazón es *estáticamente determinado y rígido*, los diagramas de cuerpo libre de los elementos sujetos a fuerzas múltiples pueden proporcionar un número de ecuaciones igual al número de fuerzas desconocidas (incluyendo las reacciones) [sección 6.11]. Sin embargo, como se sugirió, es conveniente considerar primero el diagrama de cuerpo libre para el armazón completo con el fin de minimizar el número de ecuaciones que se deben resolver de manera simultánea.

Análisis de una máquina

Para *analizar una máquina*, ésta se desensambla y con el mismo procedimiento empleado para un armazón, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos sujetos a fuerzas múltiples. Las ecuaciones de equilibrio correspondientes proporcionan las *fuerzas de salida* ejercidas por la máquina en términos de las *fuerzas de entrada* que se le aplican, así como las *fuerzas internas* en cada una de las conexiones [sección 6.12; problema resuelto 6.7].

Problemas de repaso

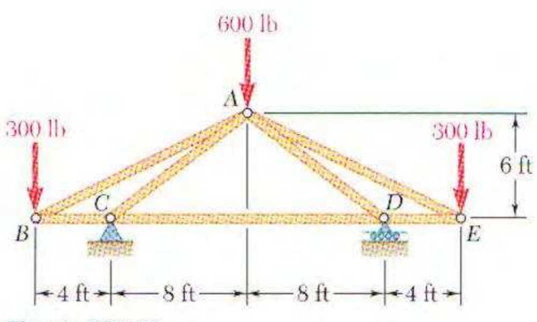


Figura P6.164

6.164 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en ca elemento de la armadura que se muestra en la figura. Establezca si los e mentos están en tensión o en compresión.

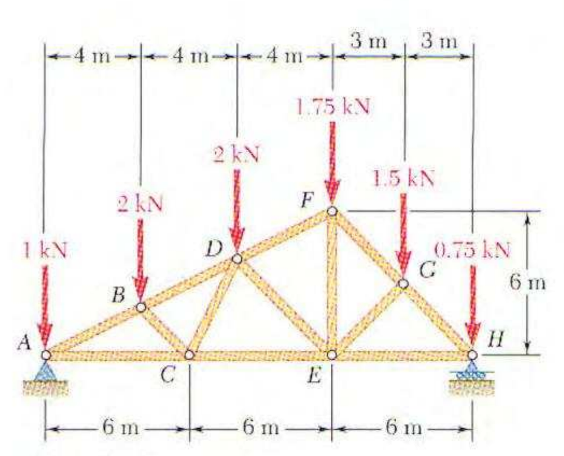


Figura *P6.165*

6.165 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en ca elemento de la armadura de doble tiro para techo que se muestra en la gura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.166 La armadura que se muestra en la figura está diseñada para s tener el techo de un mercado de alimentos. Para las cargas dadas, determ la fuerza en los elementos FG, EG y EH.

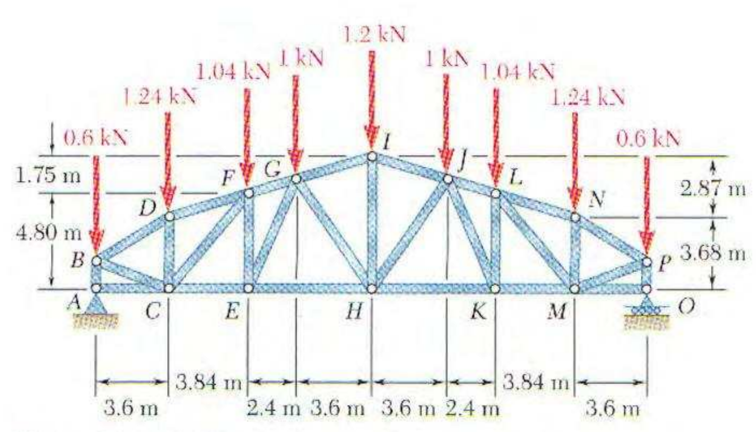


Figura P6.166 y P6.167

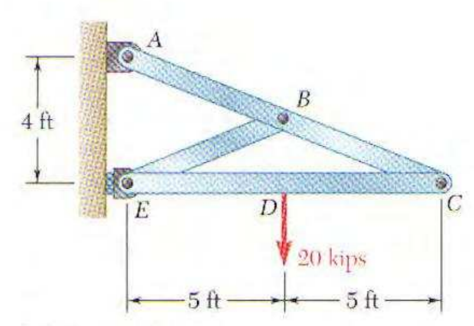


Figura P6.168

6.167 La armadura que se muestra en la figura está diseñada para s tener el techo de un mercado de alimentos. Para las cargas dadas, determi la fuerza en los elementos KM, LM y LN.

6.168 Para el armazón y la carga que se muestran en la figura, det mine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemen ABC.

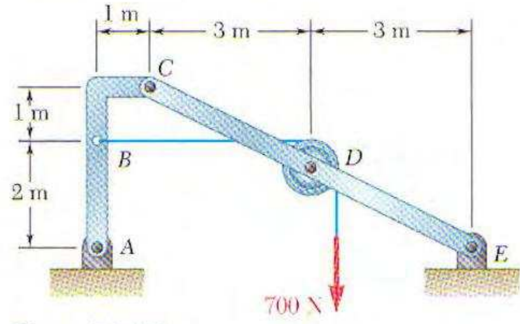


Figura P6.170

6.169 Retome el problema 6.168, y ahora suponga que la carga de kips se remplaza por un par con 100 kip · ft de magnitud, que actúa en sentido de las manecillas del reloj y que se aplica al elemento EDC en punto D.

6.170 Si se sabe que la polea tiene un radio de 0.5 m, determine componentes de las reacciones en A y E.

6.171 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las reacciones en A, B, D y E. Suponga que la superficie en cada apoyo está libre de fricción.

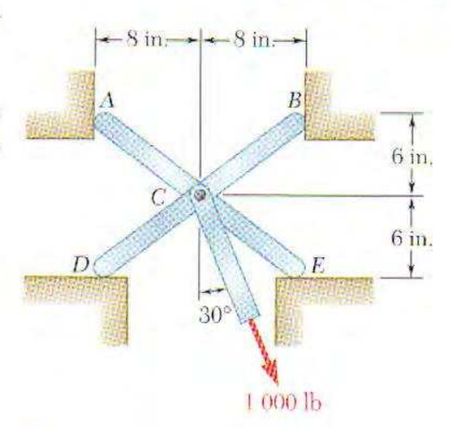


Figura P6.171

6.172 Para el sistema y la carga que se muestran en la figura, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio, *b*) la fuerza correspondiente en el elemento BD y *c*) la reacción correspondiente en C.

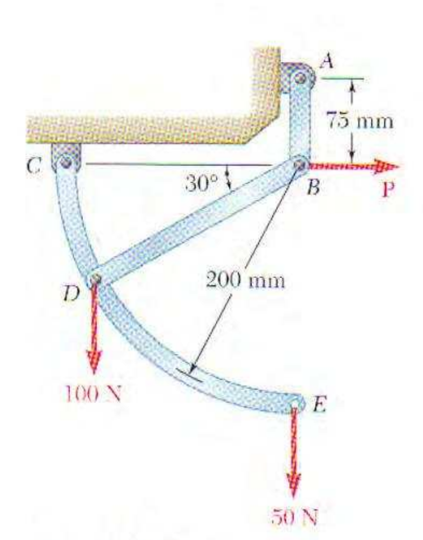


Figura P6.172

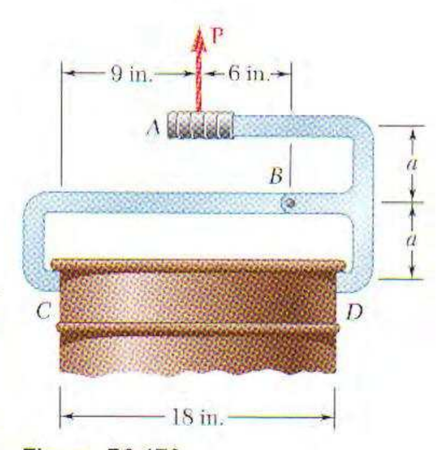


Figura *P6.173*

6.173 Un barril pequeño que tiene un peso de 60 lb se levanta mediante un par de tenazas como se muestra en la figura. Si se sabe que a = 5 in., determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza ABD en B y D.

6.174 Un estante de 20 kg se mantiene en posición horizontal mediante un brazo autoasegurable que consta de dos partes EDC y CDB, articuladas en C y apoyadas una contra la otra en D. Determine la fuerza **P** requerida para aflojar el brazo.

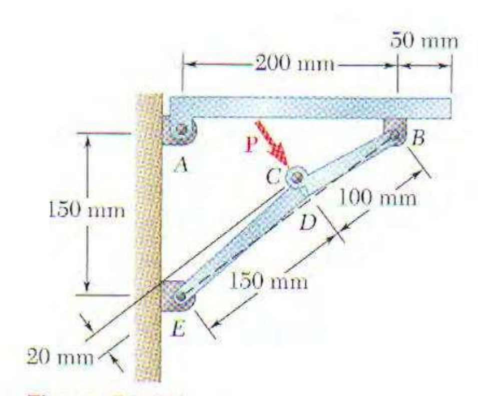


Figura *P6.174*

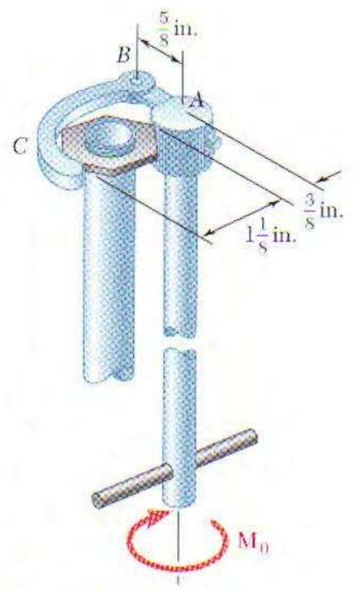


Figura P6.175

6.175 La llave de torsión especial para plomeros que se muestra en la figura es utilizada en áreas confinadas (por ejemplo, bajo un lavabo o tina). Consiste esencialmente en una quijada BC articulada en B a una varilla larga. Si se sabe que las fuerzas ejercidas sobre la tuerca son equivalentes a un par en el sentido de las manecillas del reloj (cuando se ve desde arriba) con magnitud de 135 lb · in., determine *a*) la magnitud de la fuerza ejercida por el pasador B en la quijada BC, *b*) el par $\mathbf{M}_0$ que se aplica a la llave de torsión.

Problemas de computadora

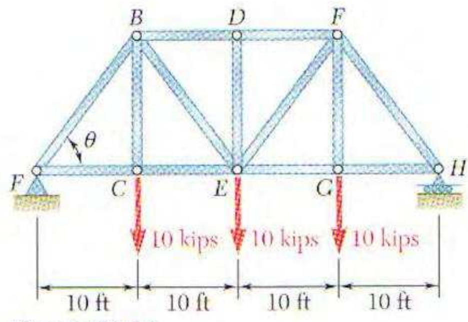


Figura P6.C1

6.C1 Se debe diseñar una armadura Pratt de acero para soportar tres cargas de 10 kips, como se muestra en la figura. La longitud de la armadura debe ser de 40 ft. La altura de la armadura, y por ende el ángulo θ, así como las áreas de las secciones transversales de los diferentes elementos, deben seleccionarse para obtener el diseño más económico. En específico, el área de la sección transversal de cada elemento se debe elegir de manera que el esfuerzo (fuerza dividida entre el área) en ese elemento sea igual a 20 kips/in.^{2} El esfuerzo permisible para el acero utilizado, el peso total del acero y, por tanto, su costo, deben ser tan pequeños como sea posible. *a*) Si se sabe que el peso específico del acero usado es de 0.284 lb/in.^{3}, utilice software para calcular el peso de la armadura y el área de la sección transversal de cada elemento que soporta carga, localizado a la izquierda de DE, para valores de θ que van de 20° a 80° con incrementos de 5°. *b*) Utilice incrementos más pequeños y adecuados para determinar el valor óptimo de θ y los valores correspondientes del peso de la armadura y de las áreas de las secciones transversales de los diferentes elementos. Para sus cálculos no tome en cuenta el peso de ningún elemento de fuerza cero.

6.C2 El piso de un puente se apoya sobre largueros soportados por vigas transversales de piso como se muestra en la figura 6.3. Los extremos de las vigas se unen a los nodos superiores de dos armaduras, una de las cuales se muestra en la figura P6.C2. Como parte del diseño del puente, se desea simular el comportamiento de la armadura cuando pasa un camión de 12 kN sobre el puente. Si se sabe que la distancia entre los ejes del camión es b = 2.25 m y se supone que el peso del camión se distribuye de igual forma sobre sus cuatro ruedas, use software para calcular las fuerzas generadas por el camión en los elementos BH y GH para valores de x desde 0 hasta 17.25 m, con incrementos de 0.75 m. A partir de los resultados obtenidos, determine *a*) la fuerza de tensión máxima en BH, *b*) la fuerza de compresión máxima en BH y *c*) la fuerza de tensión máxima en GH. En cada caso indique el valor correspondiente de x. (*Nota*: Los incrementos se seleccionaron de forma que los valores deseados estuvieran entre aquellos que se van a tabular.)

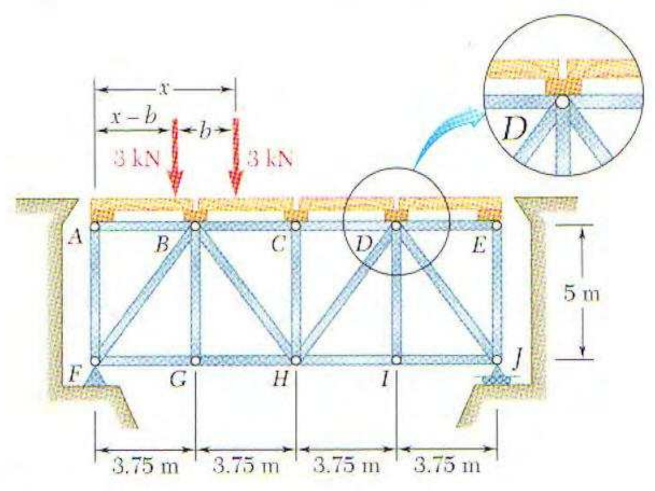


Figura P6.C2

6.C3 Para el mecanismo mostrado en la figura, la posición de la barra AC se controla mediante el brazo BD. Para la carga aplicada utilice software para calcular la reacción en A y el par $\mathbf{M}$, necesario para mantener al sistema en equilibrio, para valores de θ desde –30° hasta 90°, con incrementos de 10°. Como parte del proceso de diseño del mecanismo utilice incrementos más pequeños adecuados para determinar *a*) el valor de θ para el cual M es máxima y el valor correspondiente de M y *b*) el valor de θ para el cual la reacción en A es máxima y la magnitud correspondiente de esta reacción.

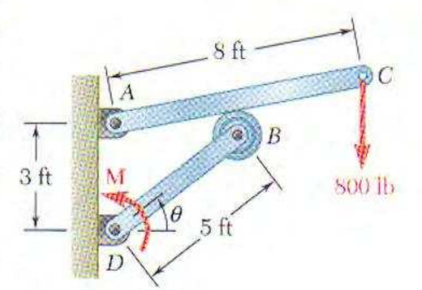


Figura P6.C3

6.C4 El diseño de un sistema robótico necesita del mecanismo de dos barras que se muestra en la figura. Las barras AC y BD se conectan mediante un bloque deslizante en D, como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, use software para calcular el par $\mathbf{M}_A$ necesario para mantener las barras en equilibrio, considerando valores de θ desde 0 hasta 120°, con incrementos de 10°. Para los mismos valores de θ, determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por la barra AC sobre el bloque deslizante.

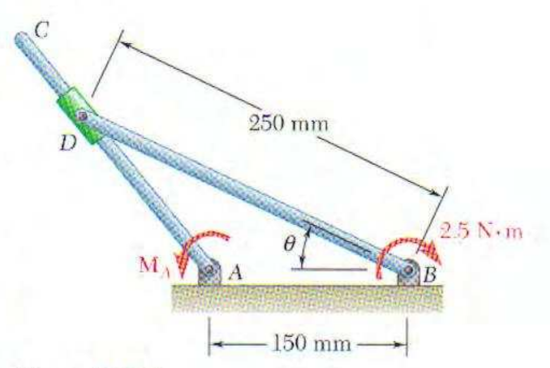


Figura P6.C4

6.C5 Las tijeras podadoras de palanca compuesta que se muestran en la figura, pueden ajustarse mediante el perno A en varias posiciones de trinquete sobre la cuchilla ACE. Si se sabe que la longitud AB es de 0.85 in., utilice software para determinar la magnitud de las fuerzas verticales aplicadas a la pequeña rama para valores de d entre 0.4 in. y 0.6 in., con incrementos de 0.025 in. Como parte del diseño de las tijeras, utilice incrementos más pequeños adecuados para determinar el valor mínimo permisible de d si la fuerza en el eslabón AB no debe exceder 500 lb.

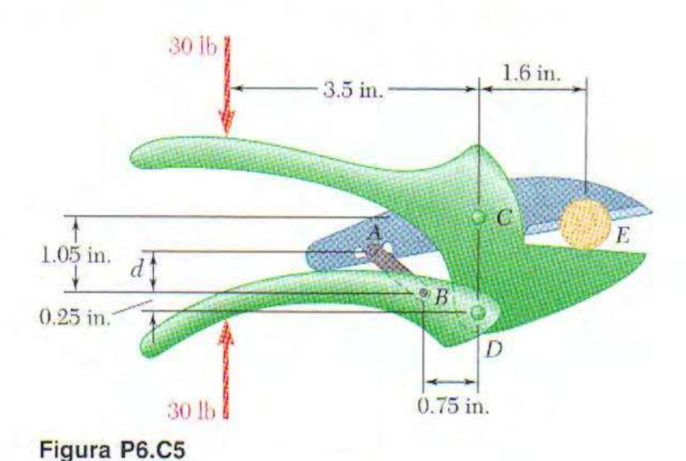


Figura P6.C5

6.C6 La barra CD está unida al collarín D y pasa a través de un collarín soldado en el extremo B de la palanca AB. Como un paso inicial en el diseño de la palanca AB, use software a fin de calcular la magnitud M del par necesario para mantener el equilibrio del sistema, usando valores de θ entre 15° y 90° con incrementos de 5°. Utilice incrementos más pequeños adecuados a fin de determinar el valor de θ para el cual M es mínima y el valor correspondiente de M.

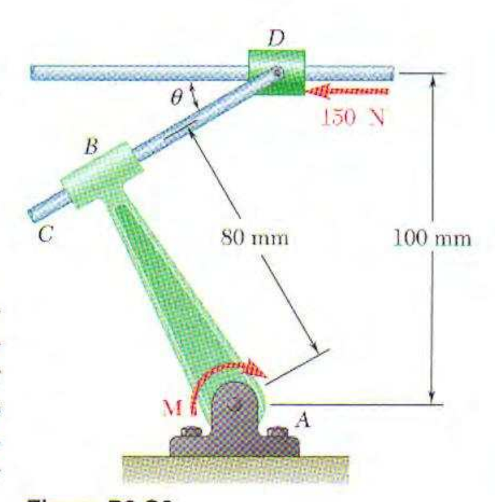
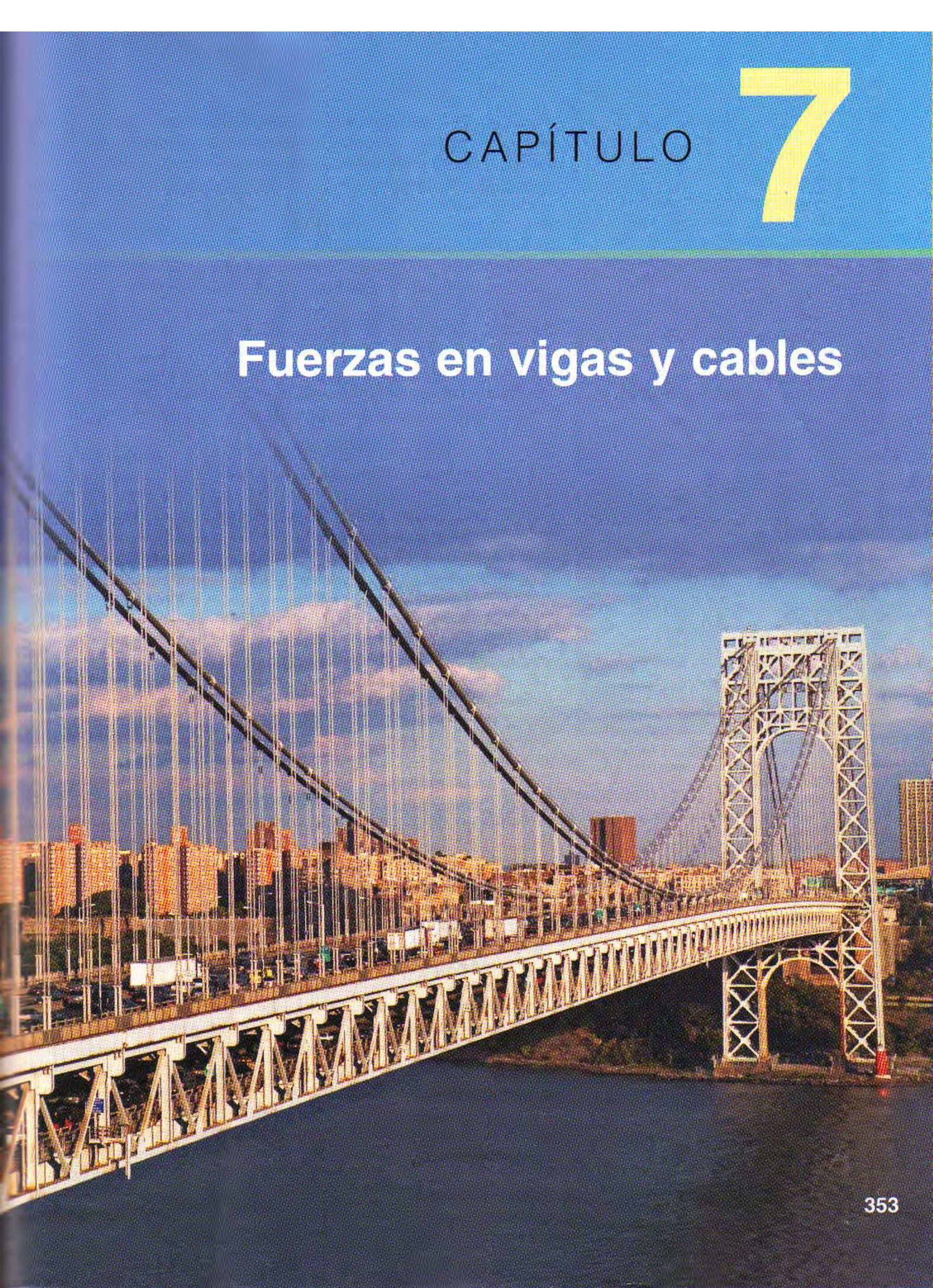


Figura P6.C6



El puente George Washington conecta Manhattan, Nueva York, con Fort Lee, Nueva Jersey. Este puente colgante soporta tráfico en dos niveles sobre carriles que se sostienen mediante un sistema de vigas. Las armaduras se utilizan tanto para conectar estos carriles y completar todo el claro del puente, como para formar las torres. El mismo claro del puente se encuentra sostenido mediante un sistema de cables.



CAPÍTULO 7

Fuerzas en vigas y cables

CAPÍTULO 7 FUERZAS EN VIGAS Y CABLES

*7.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se estudiaron dos problemas básicos que involucraban estructuras: 1) determinación de las fuerzas externas que actúan sobre una estructura (capítulo 4) y 2) determinación de las fuerzas que mantienen unidos a los distintos elementos que constituyen a una estructura (capítulo 6). Ahora se analizará el problema de la determinación de las fuerzas internas que mantienen unidas a las distintas partes de un elemento dado.

Primero se analizarán las fuerzas internas en los elementos de un armazón como la grúa considerada en las secciones 6.1 y 6.10, observando que mientras las fuerzas internas en un elemento recto sometido a la acción de dos fuerzas sólo pueden producir *tensión* o *compresión* en dicho elemento, las fuerzas internas en cualquier otro tipo de elemento usualmente también producen *corte* y *flexión*.

La mayor parte de este capítulo estará dedicada al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería, llamadas:

1. *Vigas*: las cuales usualmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento.
2. *Cables*: son elementos flexibles capaces de soportar sólo tensión y están diseñados para soportar cargas concentradas o distribuidas. Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería, como en puentes colgantes y líneas de transmisión.

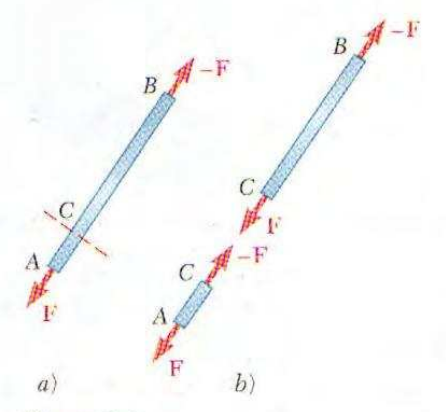


Figura 7.1

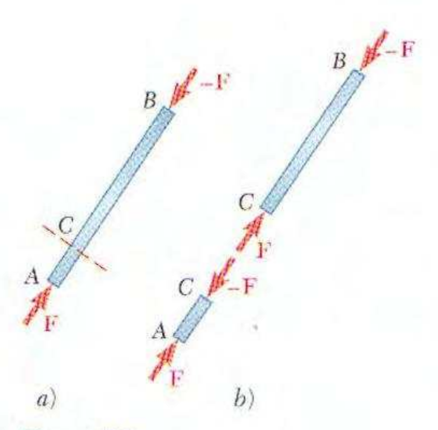


Figura 7.2

*7.2. FUERZAS INTERNAS EN ELEMENTOS

Consideremos el *elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas AB* (figura 7.1*a*). De la sección 4.6, se sabe que las fuerzas **F** y −**F** que actúan en A y B, respectivamente, deben estar dirigidas a lo largo de AB en sentidos opuestos y deben tener la misma magnitud F. Ahora considere que se corta al elemento en C. Para mantener el equilibrio de los cuerpos libres AC y CB obtenidos de esta manera, se debe aplicar sobre AC una fuerza −**F** igual y opuesta a **F**, y sobre CB una fuerza **F** igual y opuesta a −**F** (figura 7.1*b*). Estas nuevas fuerzas están dirigidas a lo largo de AB en sentidos opuestos y tienen la misma magnitud F. Como las dos partes AC y CB estaban en equilibrio antes de que se cortara el elemento, deben haber existido en éste *fuerzas internas* equivalentes a las nuevas fuerzas. Se concluye que en el caso de un elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas, las fuerzas internas que ejercen entre sí las dos partes del elemento son equivalentes a *fuerzas axiales*. La magnitud común F de estas fuerzas no depende de la ubicación de la sección C y recibe el nombre de *fuerza en el elemento AB*. En el caso considerado, el elemento está en tensión y se estirará bajo la acción de fuerzas internas. En el caso representado en la figura 7.2, el elemento está en compresión y disminuirá su longitud bajo la acción de las fuerzas internas.

Ahora, considere un *elemento sujeto a fuerzas múltiples*. Tómese por ejemplo el elemento AD de la grúa analizada en la sección 6.10; esta grúa se muestra nuevamente en la figura 7.3*a* y en la figura 7.3*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento AD. Ahora se corta el elemento AD en J y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las porciones del elemento JD y AJ (figura 7.3*c* y *d*). Si se

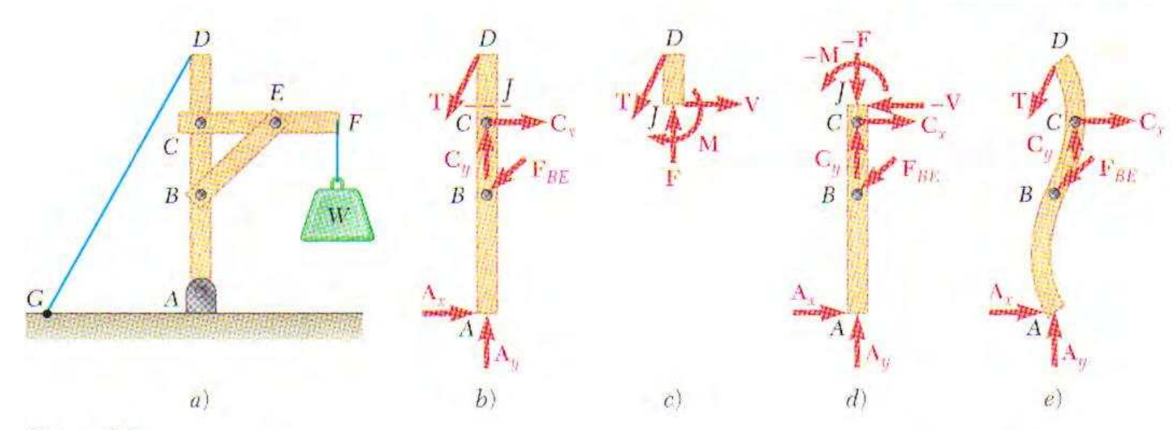


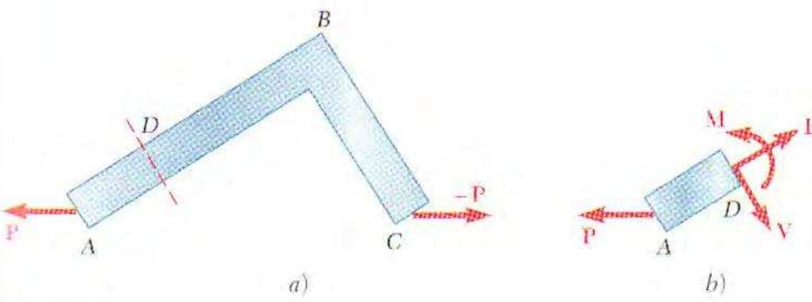
Figura 7.3

considera el cuerpo libre *JD*, se encuentra que se mantendrá su equilibrio si se aplica en *J* una fuerza **F** para balancear la componente vertical de **T**, una fuerza **V** para balancear la componente horizontal de **T** y un par **M** para balancear el momento de **T** con respecto a *J*. De nuevo se concluye que debieron haber existido fuerzas internas en *J* antes de que se cortara el elemento *AD*. Las fuerzas internas que actúan en la parte *JD* del elemento *AD* son equivalentes al sistema fuerza-par que se muestra en la figura 7.3*c*. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas internas que actúan sobre *AJ* deben ser equivalentes a un sistema fuerza-par igual y opuesto, como se muestra en la figura 7.3*d*. Es obvio que la acción de las fuerzas internas en el elemento *AD no se limita a producir tensión o compresión* como en el caso de los elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas; por otro lado, las fuerzas internas *también producen corte y flexión*. La fuerza **F** es una *fuerza axial*; la fuerza **V** recibe el nombre de *fuerza cortante* y el momento **M** del par se conoce como el *momento flector o flexor en J*. Se observa que cuando se determinan las fuerzas internas en un elemento, se debe indicar sobre qué parte del elemento se supone que actúan dichas fuerzas. En la figura 7.3*e* se bosquejan las deformaciones que ocurrirán en el elemento *AD*. El análisis real de estas deformaciones es parte del estudio de la mecánica de materiales.



Fotografía 7.1 El diseño del eje de una sierra circular debe tomar en cuenta las fuerzas internas que resultan de las fuerzas aplicadas a los dientes de la cuchilla. En un punto dado del eje, estas fuerzas internas son equivalentes a un sistema fuerza-par consistente en fuerzas axiales y cortantes y en un par que representa los momentos de corte y de torsión.

Es necesario señalar que en un *elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto*, las fuerzas internas también son equivalentes a un sistema fuerza-par. Esto se muestra en la figura 7.4, donde el elemento sujeto a dos fuerzas *ABC* ha sido cortado en *D*.



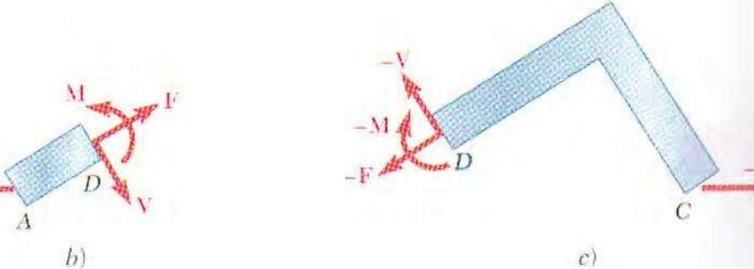
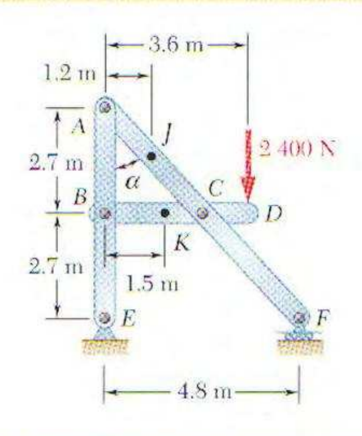
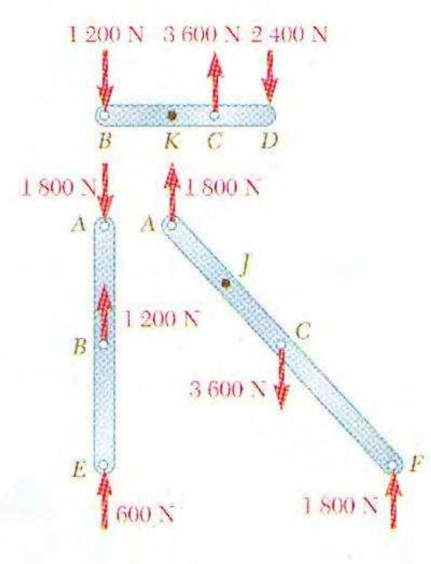


Figura 7.4



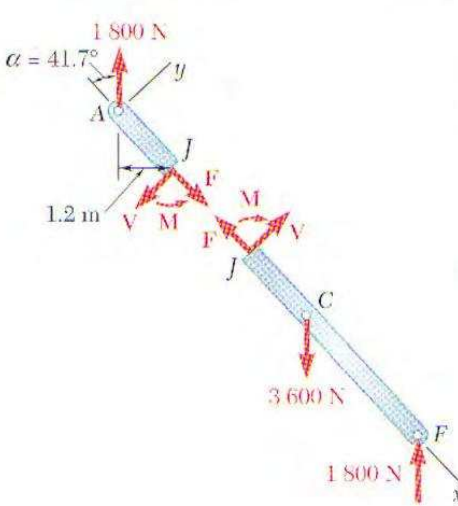
PROBLEMA RESUELTO 7.1

Para el armazón mostrado en la figura, determine las siguientes fuerzas internas: *a*) en el punto *J* del elemento *ACF* y *b*) en el punto *K* del elemento *BCD*. Este armazón ya fue considerado en el problema resuelto 6.5.



SOLUCIÓN

Reacciones y fuerzas en las conexiones. Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos del armazón; esto se llevó a cabo en el problema resuelto 6.5 y los resultados encontrados se repiten a continuación.



***a*) Fuerzas internas en *J*.** Se corta el elemento *ACF* en el punto *J* y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura. Las fuerzas internas en *J* están representadas por un sistema equivalente fuerza-par y se determinan al calcular el equilibrio de cualquiera de las partes en que ha sido dividido el elemento. Si se considera el *diagrama de cuerpo libre AJ*, se escribe

$+\circlearrowleft\Sigma M_J = 0$: $\quad -(1\,800\text{ N})(1.2\text{ m}) + M = 0$

$M = +2\,160\text{ N}\cdot\text{m}$ $\quad\quad \mathbf{M} = 2\,160\text{ N}\cdot\text{m}\circlearrowleft$ ◀

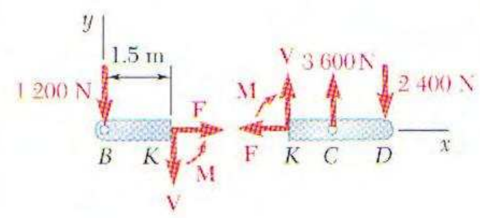
$+\searrow\Sigma F_x = 0$: $\quad F - (1\,800\text{ N})\cos 41.7° = 0$

$F = +1\,344\text{ N}$ $\quad\quad \mathbf{F} = 1\,344\text{ N}\searrow$ ◀

$+\nearrow\Sigma F_y = 0$: $\quad -V + (1\,800\text{ N})\text{ sen } 41.7° = 0$

$V = +1\,197\text{ N}$ $\quad\quad \mathbf{V} = 1\,197\text{ N}\swarrow$ ◀

Por tanto, las fuerzas internas en *J* son equivalentes a un par **M**, a una fuerza axial **F** y a una fuerza cortante **V**. El sistema fuerza-par interno que actúa sobre la parte *JCF* es igual y opuesto.



***b*) Fuerzas internas en *K*.** Se corta el elemento *BCD* en *K* y se obtienen las dos partes que se muestran en la figura. Si se hace el *diagrama de cuerpo libre BK*, se escribe

$+\circlearrowleft\Sigma M_K = 0$: $\quad (1\,200\text{ N})(1.5\text{ m}) + M = 0$

$M = -1\,800\text{ N}\cdot\text{m}$ $\quad\quad \mathbf{M} = 1\,800\text{ N}\cdot\text{m}\circlearrowright$ ◀

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad F = 0$ $\quad\quad \mathbf{F} = 0$ ◀

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad -1\,200\text{ N} - V = 0$

$V = -1\,200\text{ N}$ $\quad\quad \mathbf{V} = 1\,200\text{ N}\uparrow$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a determinar las fuerzas internas en un elemento del armazón. Las fuerzas internas en un punto dado de un *elemento recto sujeto a dos fuerzas* se reducen a una fuerza axial, pero en todos los demás casos dichas fuerzas internas son equivalentes a *sistemas fuerza-par* constituidos por una *fuerza axial* **F**, una *fuerza cortante* **V** y un par **M** que representa al *momento flector* en dicho punto.

Para determinar las fuerzas internas en un punto dado J de un elemento de un armazón, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para el armazón completo y se utiliza para determinar las reacciones que sean posibles en los apoyos.

2. Desensamblar el armazón y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de sus elementos. Se deben escribir tantas ecuaciones de equilibrio como sean necesarias para encontrar todas las fuerzas que actúan sobre el elemento *en el cual está localizado el punto J*.

3. Cortar el elemento en el punto J y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las dos partes *del elemento que se han obtenido de esta forma*, aplicando en el punto J de cada porción las componentes de fuerza y el par que representan las fuerzas ejercidas por la otra porción. *Note que estas componentes* de fuerza y pares tienen la misma magnitud pero sentidos opuestos.

4. Seleccionar uno de los dos diagramas de cuerpo libre que se han dibujado y utilizarlo para escribir tres ecuaciones de equilibrio para la porción correspondiente del elemento.

a) Si se suman momentos con respecto a J y se igualan a cero, se obtendrá una ecuación que proporcionará el momento flector en el punto J.

b) Si se suman componentes en direcciones paralelas y perpendiculares al elemento en el punto J y se igualan a cero se obtendrán, respectivamente, la fuerza axial y la fuerza cortante.

5. Cuando se escriban los resultados, se debe tener cuidado de especificar la parte del elemento que se utilizó, puesto que las fuerzas y los pares que actúan en las dos partes tienen sentidos opuestos.

Puesto que la solución de los problemas propuestos correspondientes a esta lección requieren la determinación de las fuerzas que ejercen entre sí los distintos elementos de un armazón, se deben repasar los métodos utilizados en el capítulo 6 para resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, cuando los armazones involucran poleas y cables, se debe recordar que las fuerzas ejercidas por una polea sobre un elemento del armazón al cual está unida tienen la misma magnitud y dirección que las fuerzas ejercidas por el cable sobre la polea [problema 6.90].

Problemas

7.1 y 7.2 Determine las fuerzas internas (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector) en el punto J de la estructura indicada.

7.1 Armazón y carga del problema 6.79.

7.2 Armazón y carga del problema 6.80.

7.3 Determine las fuerzas internas en el punto J cuando $\alpha = 90°$.

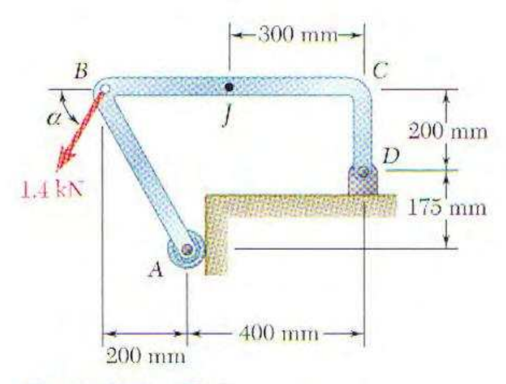


Figura P7.3 y P7.4

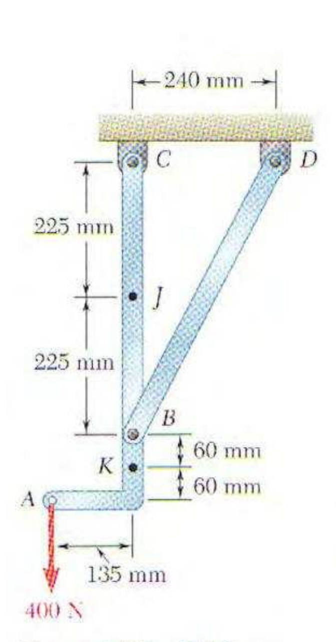


Figura *P7.5* y *P7.6*

7.4 Determine las fuerzas internas en el punto J cuando $\alpha = 0°$.

7.5 Determine las fuerzas internas en el punto J de la estructura que se muestra en la figura.

7.6 Determine las fuerzas internas en el punto K de la estructura que se muestra en la figura.

7.7 Una barra semicircular está cargada como se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J.

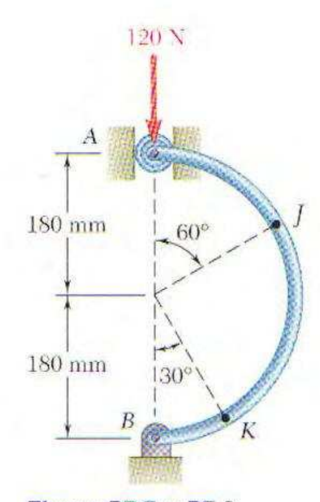


Figura P7.7 y P7.8

7.8 Una barra semicircular está cargada como se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto K.

7.9 Un arquero que apunta a un blanco está jalando la cuerda del arco con una fuerza de 45 lb. Si se supone que la forma del arco se puede aproximar mediante una parábola, determine las fuerzas internas en el punto J.

7.10 Para el arco del problema 7.9, determine la magnitud y la ubicación de *a*) la fuerza axial máxima, *b*) la fuerza cortante máxima y *c*) el momento flector máximo.

7.11 Dos elementos, que consisten cada uno de una porción recta y una porción en forma de un cuarto de círculo, soportan una carga de 75 lb en A y se conectan de la forma que se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J.

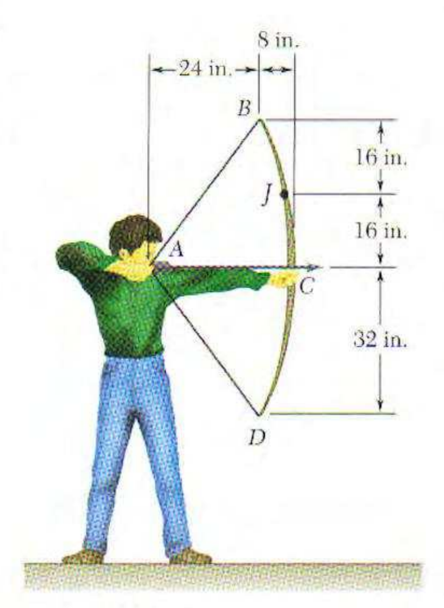


Figura P7.9

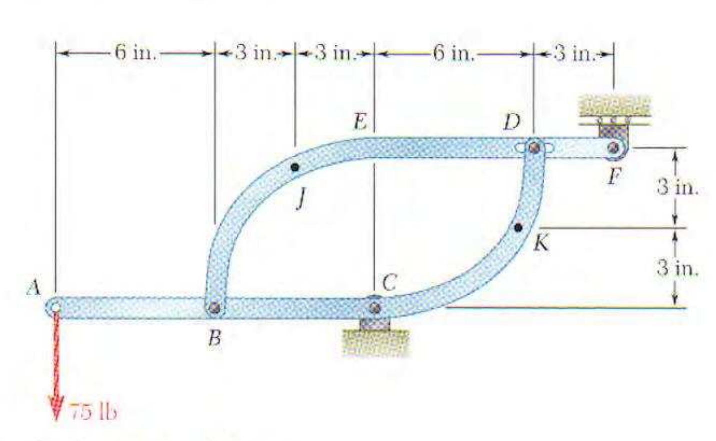


Figura *P7.11* y *P7.12*

7.12 Dos elementos, que consisten cada uno de una porción recta y una porción en forma de un cuarto de círculo, soportan una carga de 75 lb en A y se conectan de la forma que se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto K.

7.13 Una barra semicircular está cargada en la forma que se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J si se sabe que $\theta = 30°$.

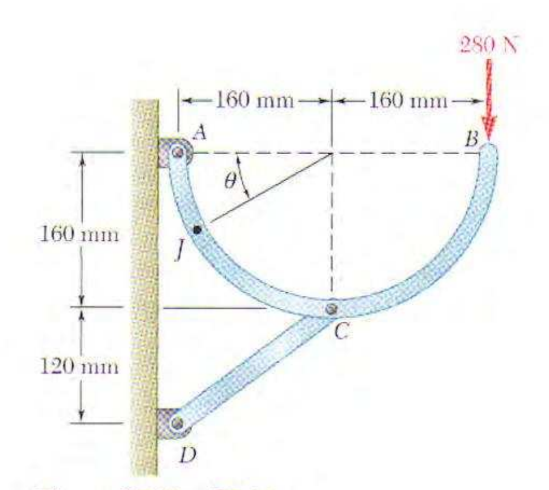


Figura P7.13 y P7.14

7.14 Una barra semicircular está cargada en la forma que se muestra en la figura. Determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en la barra.

7.15 Si se sabe que el radio de cada polea es de 150 mm, que α = 20° y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas *a*) en el punto *J*, *b*) en el punto *K*.

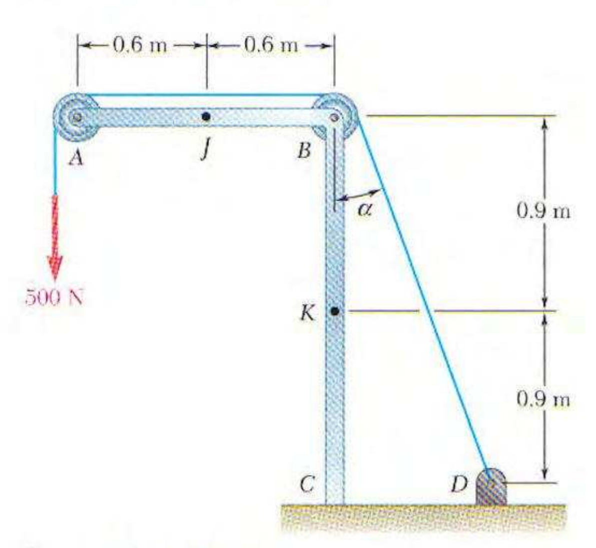


Figura P7.15 y P7.16

7.16 Si se sabe que el radio de cada polea es de 150 mm, que α = 30° y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas *a*) en el punto *J*, *b*) en el punto *K*.

7.17 Si se sabe que el radio de cada polea es de 200 mm, no tome en cuenta el efecto de la fricción para determinar las fuerzas internas en el punto *J* del armazón que se muestra en la figura.

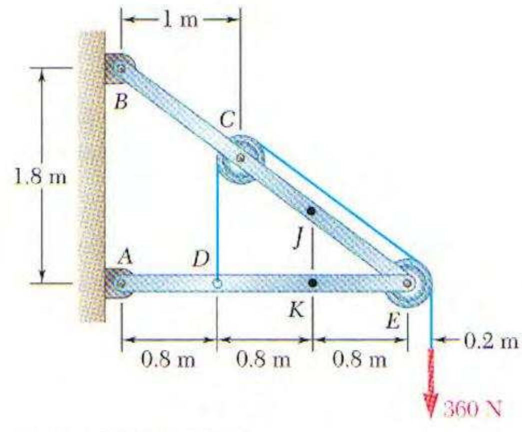


Figura P7.17 y P7.18

7.18 Si sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto *K* del armazón que se muestra en la figura.

7.19 Una tubería de 5 in. de diámetro está sostenida cada 9 ft por un marco pequeño, el cual consiste de dos elementos como se muestra en la figura. Si se sabe que el peso combinado por unidad de longitud de la tubería y su contenido es de 10 lb/ft, y sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en el elemento *AC*.

7.20 Para el armazón del problema 7.19, determine la magnitud y ubicación del momento flector máximo en el elemento *BC*.

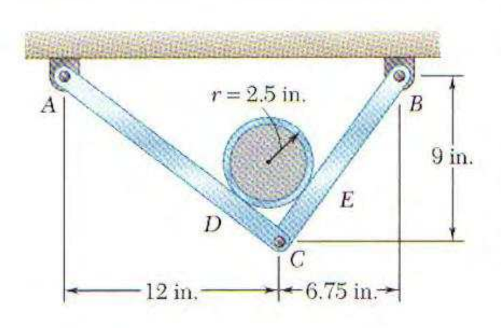


Figura P7.19

7.21 y 7.22 Una fuerza **P** se aplica a una barra doblada, la cual se sostiene mediante un rodillo y un apoyo de pasador. Para cada uno de los tres casos mostrados en las figuras, determine las fuerzas internas en el punto J.

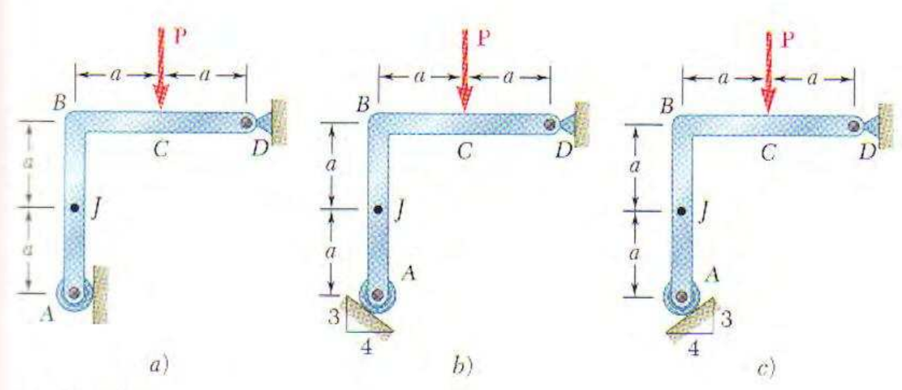


Figura *P.721*

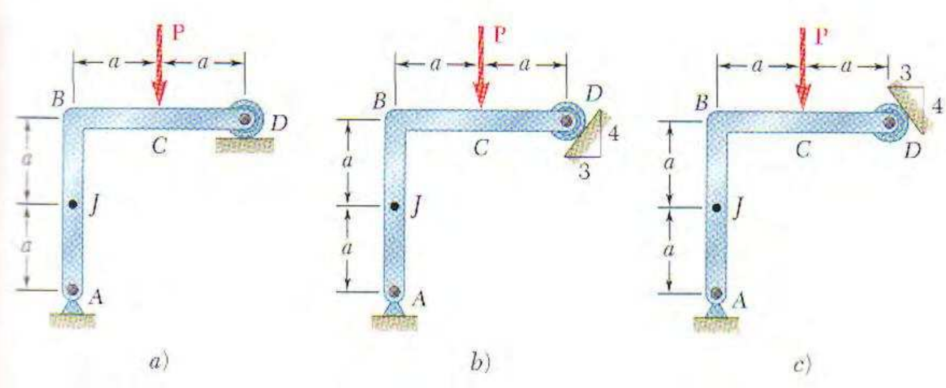
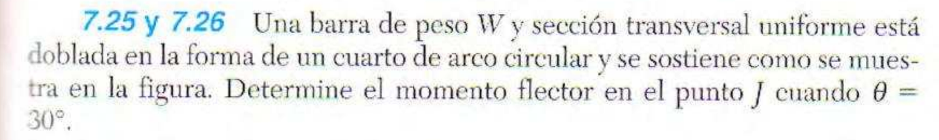


Figura *P7.22*

7.23 Una barra semicircular de peso W y sección transversal uniforme se sostiene en la forma mostrada. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 60°$.



7.24 Una barra semicircular de peso W y sección transversal uniforme se sostiene en la forma mostrada. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 150°$.

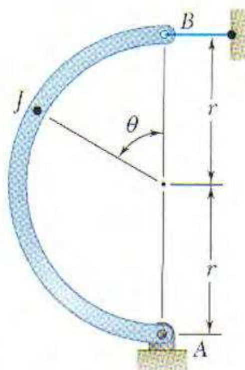


Figura P7.23 y P7.24

7.25 y 7.26 Una barra de peso W y sección transversal uniforme está doblada en la forma de un cuarto de arco circular y se sostiene como se muestra en la figura. Determine el momento flector en el punto J cuando $\theta = 30°$.

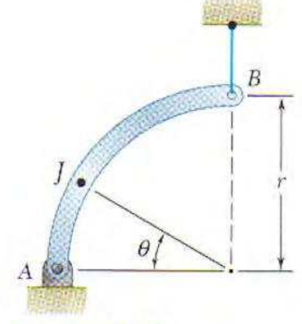


Figura *P7.25*

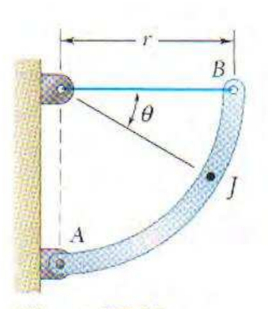


Figura *P7.26*

7.27 Para la barra del problema 7.25, determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.

7.28 Para la barra del problema 7.26, determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.

VIGAS

*7.3. DIFERENTES TIPOS DE CARGAS Y APOYOS

Un elemento estructural diseñado para soportar cargas que sean aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento se conoce como *viga*. En la mayoría de los casos, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y únicamente ocasionarán corte y flexión sobre ésta. Cuando las cargas no formen ángulo recto con la viga, también producirán fuerzas axiales en ella.

Por lo general, las vigas son barras prismáticas rectas y largas. El diseño de una viga para que soporte de la manera más efectiva las cargas aplicadas es un procedimiento que involucra dos partes: 1) determinar las fuerzas cortantes y los momentos flectores producidos por las cargas, y 2) seleccionar la sección transversal que resista de la mejor forma posible a las fuerzas cortantes y a los momentos flectores que se determinaron en la primera parte. Aquí se estudiará la primera parte del problema de diseñar vigas, la segunda parte corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

Una viga puede estar sujeta a *cargas concentradas* $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . . , expresadas en newtons, libras o sus múltiplos, kilonewtons y kilolibras (figura 7.5*a*), a una *carga distribuida* w, expresada en N/m, kN/m, lb/ft o kips/ft (figura 7.5*b*), o a una combinación de ambas cargas. Cuando la carga w por unidad de longitud tiene un valor constante sobre una parte de la viga (como entre A y B en la figura 7.5*b*), se dice que la carga está *uniformemente distribuida* a lo largo de esa parte de la viga. La determinación de las reacciones en los apoyos se simplifica considerablemente si se reemplazan las cargas distribuidas por cargas concentradas equivalentes, como se explicó en la sección 5.8. Sin embargo, esta sustitución no debe llevarse a cabo o, por lo menos, se debe realizar con cuidado, cuando se calculan las fuerzas internas (vea el problema resuelto 7.3).

$\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ B C A D

a) Cargas concentradas

w A B C

b) Carga distribuida

Figura 7.5

Las vigas se clasifican de acuerdo con la forma en que estén apoyadas. En la figura 7.6 se muestran varios tipos de vigas que se usan con frecuencia. La distancia L existente entre los apoyos recibe el nombre de *claro*. Se debe señalar que las reacciones se determinarán siempre y cuando los apoyos involucren únicamente tres incógnitas; de estar involucradas más de tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas y los métodos de la estática no serán suficientes para determinarlas; bajo estas circunstancias, se deben tomar en consideración las propiedades de la viga relacionadas con su resistencia a la flexión. Aquí no se muestran vigas apoyadas en dos rodillos, las cuales están sólo parcialmente restringidas y se moverán bajo ciertas condiciones de carga.

Algunas veces dos o más vigas están conectadas por medio de articulaciones para formar una sola estructura continua. En la figura 7.7 se muestran dos ejemplos de vigas articuladas en un punto H. Se debe señalar que las reacciones en los apoyos involucran cuatro incógni-

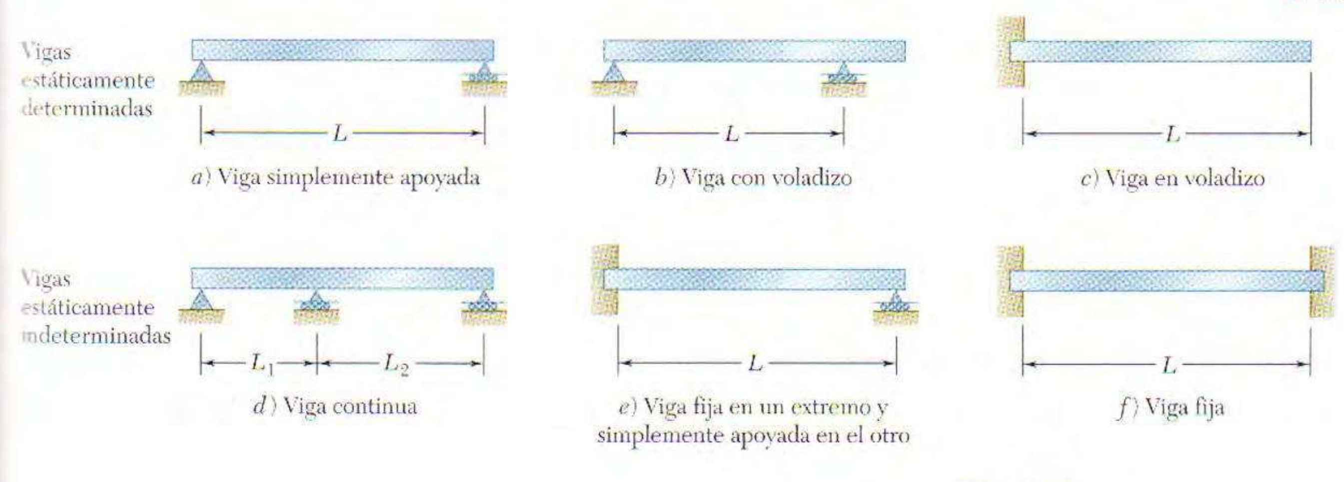


Figura 7.6

tas, las cuales no pueden determinarse a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por dos vigas. Sin embargo, éstas pueden ser determinadas considerando por separado el diagrama de cuerpo libre para cada una de las vigas; aquí están involucradas seis incógnitas (incluyendo dos componentes de fuerza en la articulación) y están disponibles seis ecuaciones de equilibrio.

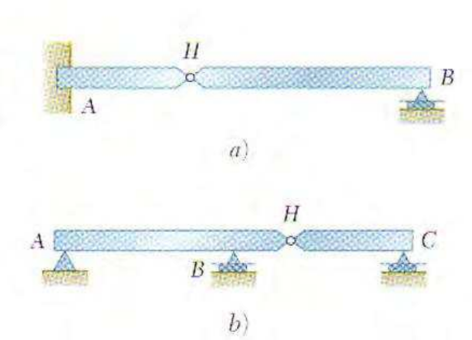


Figura 7.7

*7.4. FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN UNA VIGA

Considere una viga AB que está sujeta a varias cargas concentradas y distribuidas (figura 7.8*a*). Se busca determinar la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga. Aunque en el ejemplo la viga está simplemente apoyada, el método se puede aplicar a cualquier tipo de viga estáticamente determinada.

Primero se determinan las reacciones en A y en B seleccionando toda la viga como un cuerpo libre (figura 7.8*b*); si se escribe $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$ se obtienen, respectivamente, $\mathbf{R}_B$ y $\mathbf{R}_A$.

Para determinar las fuerzas internas en C, se corta la viga en C y se dibujan los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las partes AC y CB de la viga (figura 7.8*c*). Con el diagrama de cuerpo libre para la parte AC, se puede determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}$ en C igualando a cero la suma de las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre AC. En forma similar se puede encontrar el momento flector $\mathbf{M}$ en C igualando a cero la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre AC. Sin embargo, otra alternativa sería utilizar el diagrama de cuerpo libre para la parte CB[†] y determinar la fuerza cortante $\mathbf{V}'$ y el momento flector $\mathbf{M}'$ igualando a cero la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y todos los pares que actúan sobre CB. A pesar de que la selección del cuerpo libre que se usará puede facilitar el cálculo de los valores numéricos de la fuerza cortan-



Fotografía 7.2 Las fuerzas internas en el paso a desnivel varían conforme el camión lo cruza.

[†] La fuerza y el par que representan las fuerzas internas que actúan sobre CB ahora serán representadas con $\mathbf{V}'$ y $\mathbf{M}'$, en lugar de representarlas con $-\mathbf{V}$ y $-\mathbf{M}$ como se había hecho anteriormente, con el fin de evitar confusiones cuando se aplique la convención de signos que se va a presentar más adelante en esta sección.

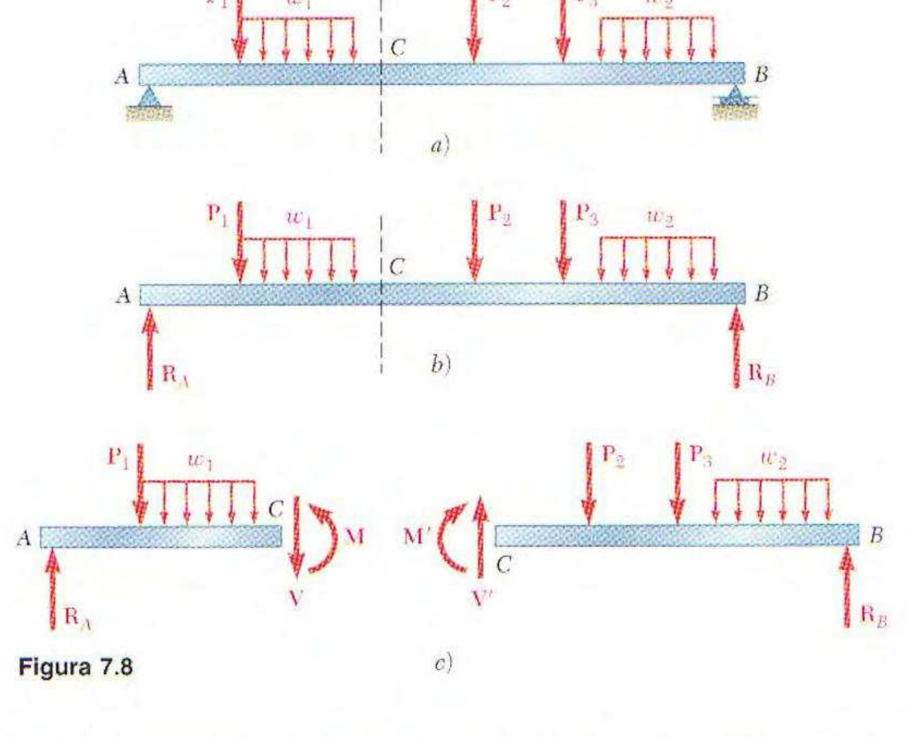


Figura 7.8

te y el momento flector, hace que sea necesario indicar sobre qué parte de la viga están actuando las fuerzas internas consideradas. Por tanto, si se van a calcular y a registrar con eficiencia los valores de la fuerza cortante y del momento flector en todos los puntos de la viga, se debe encontrar una forma que permita evitar la especificación cada vez de la porción de la viga que se utilizó como el cuerpo libre. Para lograr esto, se adoptarán las siguientes convenciones:

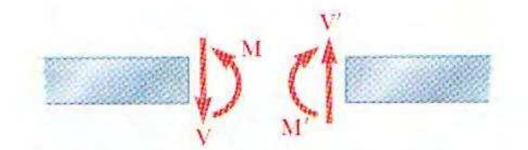
Al determinar la fuerza cortante en una viga, *siempre se supondrá* que las fuerzas internas **V** y **V′** están dirigidas como se muestra en la figura 7.8*c*. Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud común V, esto indica que la suposición hecha fue correcta y que en realidad las fuerzas cortantes están dirigidas de la forma que se muestra en la figura. Cuando se obtiene un valor negativo para V, esto indica que la suposición hecha fue incorrecta y que las fuerzas cortantes están dirigidas en el sentido opuesto. Por tanto, para definir completamente las fuerzas cortantes en un punto dado de la viga sólo se necesita registrar la magnitud V con un signo positivo o negativo. Por lo general, se hace referencia al escalar V como la *fuerza cortante* en un punto dado de la viga.

En forma similar, *siempre se supondrá* que los pares internos **M** y **M′** están dirigidos como se muestra en la figura 7.8*c*. Cuando se obtiene un valor positivo para su magnitud M, a la cual se hace referencia comúnmente como el momento flector, esto indicará que la suposición hecha fue correcta mientras que un valor negativo indicará que la suposición fue incorrecta. En resumen, con la convención de signos que se acaba de presentar se establece lo siguiente:

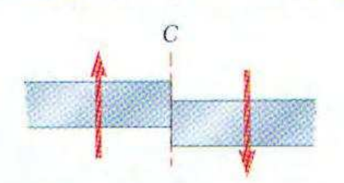
Se dice que la fuerza cortante V y que el momento flector M en un punto dado de una viga son positivos cuando las fuerzas y los pares internos que actúan sobre cada parte de la viga están dirigidos como se muestra en la figura 7.9a.

Estas convenciones son más fáciles de recordar si se observa que:

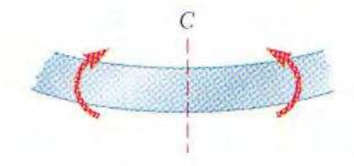
1. *La fuerza cortante en C es positiva cuando las fuerzas* **externas** *(las cargas y las reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortar a lo largo en C como se indica en la figura 7.9b.*



a) Fuerzas internas en la sección (fuerza cortante positiva y momento flector positivo)



b) Efecto de las fuerzas externas (fuerza cortante positiva)



c) Efecto de las fuerzas externas (momento flector positivo)

Figura 7.9

2. *El momento flector en C es positivo cuando las fuerzas* **externas** *que actúan sobre la viga tienden a flexionar a la viga, como se indica en la figura 7.9c.*

También puede ser útil señalar que la situación descrita en la figura 7.9, en la cual los valores de la fuerza cortante y del momento flector son positivos, es precisamente la situación que ocurre en la mitad izquierda de una viga apoyada que soporta una sola carga concentrada que actúa en su punto medio. Este ejemplo en particular se presenta completo en la siguiente sección.

*7.5. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

Ahora que se han definido claramente la fuerza cortante y el momento flector en lo referente a su magnitud y a su sentido, se pueden registrar sus valores en cualquier punto de una viga graficando dichos valores contra la distancia x medida desde un extremo de la viga. Las gráficas que se obtienen de esta manera reciben el nombre de *diagrama de fuerza cortante* y *diagrama de momento flector*, respectivamente. Como ejemplo, considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que está sometida a una sola carga concentrada $\mathbf{P}$ que actúa en su punto medio D (figura 7.10*a*). Primero se determinan las reacciones en los apoyos a partir del diagrama de cuerpo libre para la viga completa (figura 7.10*b*); de esta forma, se encuentra que la magnitud de cada reacción es igual a $P/2$.

Después se corta la viga en un punto C localizado entre A y D y se dibujan los diagramas de cuerpo libre para las partes AC y CB (figura 7.10*c*). *Si la fuerza cortante y el momento flector son positivos*, se dirigen las fuerzas internas $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}'$ y los pares internos $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M}'$ como se indica en la figura 7.9*a*. Si se considera el cuerpo libre AC y se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero, se encuentra que $V = +P/2$ y $M = +Px/2$. Por tanto, la fuerza cortante y el momento flector son positivos; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en A tiende a cortar y a flexionar la viga en C de la forma mostrada en la figura 7.9*b* y *c*. Se puede graficar V y M entre A y D (figura 7.10*e* y *f*); la fuerza cortante tiene un valor constante $V = P/2$, mientras que el momento flector aumenta linealmente desde $M = 0$ en $x = 0$ hasta $M = PL/4$ en $x = L/2$.

Ahora, si se corta la viga en un punto E localizado entre D y B y se considera el cuerpo libre EB (figura 7.10*d*), se escribe que la suma de las componentes verticales y la suma de los momentos con respecto a E de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son iguales a cero. De esta forma se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. Por tanto, la fuerza cortante es negativa y el momento flector es positivo; lo anterior se puede corroborar observando que la reacción en B flexiona la viga en E de la forma indicada en la figura 7.9*c* pero tiende a cortarla de manera opuesta a la mostrada en la figura 7.9*b*. Ahora se pueden completar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la figura 7.10*e* y *f*; la fuerza cortante tiene un valor constante $V = -P/2$ entre D y B, mientras que el momento flector decrece linealmente desde $M = PL/4$ en $x = L/2$ hasta $M = 0$ en $x = L$.

Es necesario señalar que cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas, pero cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente (véase problema resuelto 7.3).

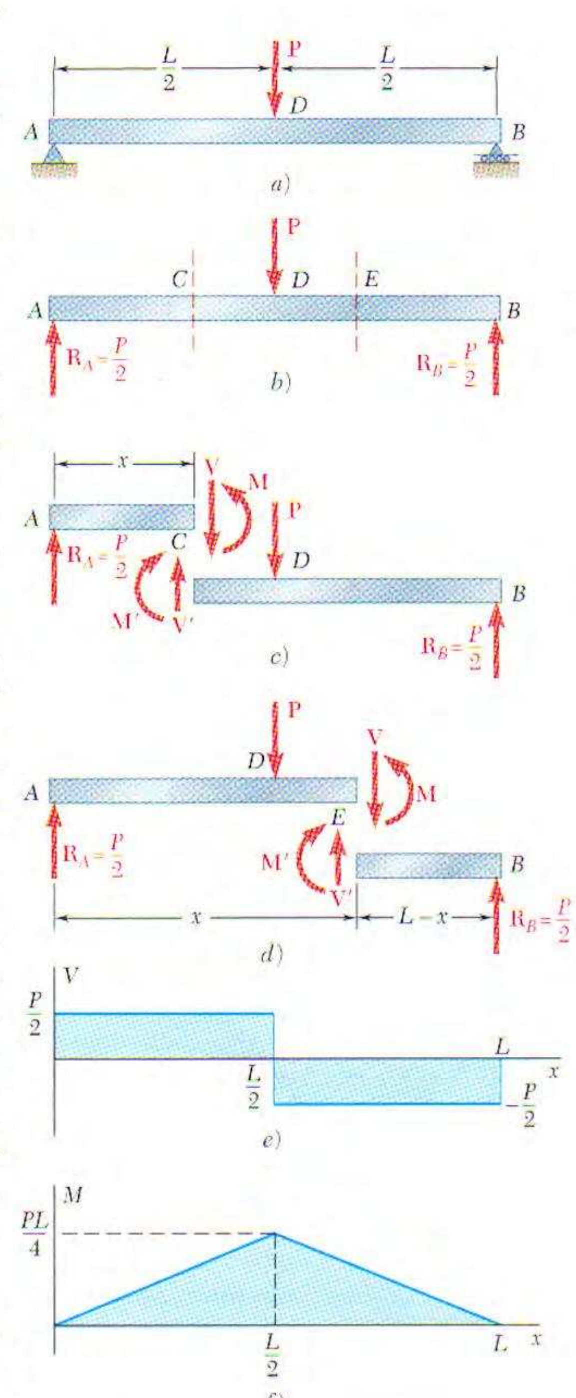
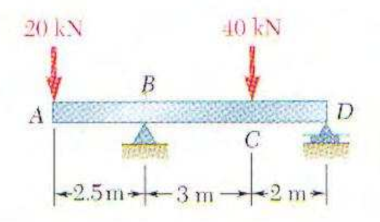
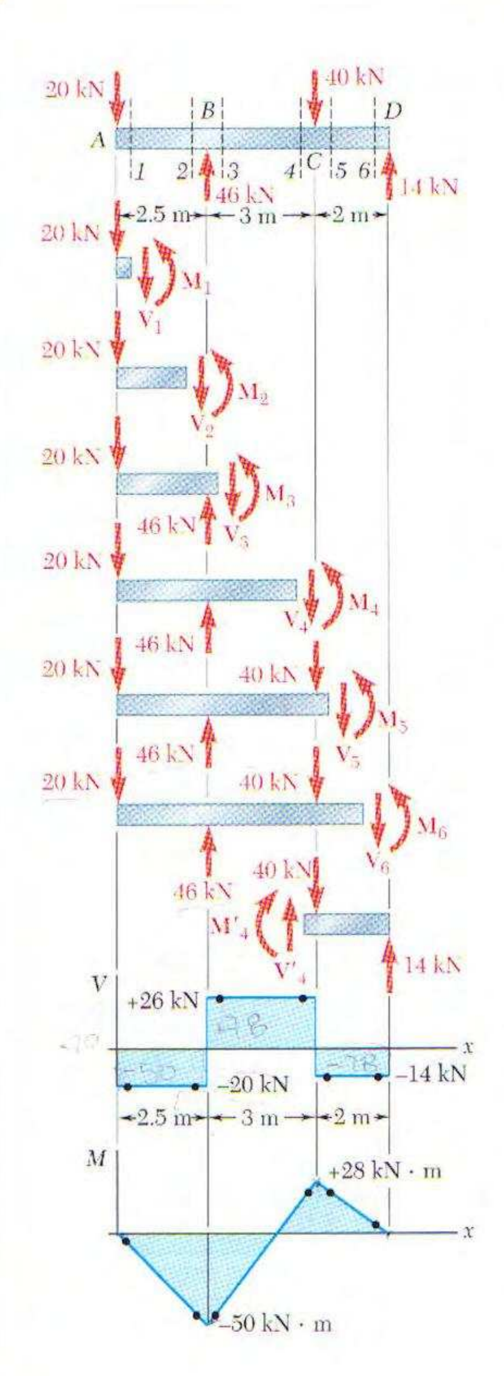


Figura 7.10



PROBLEMA RESUELTO 7.2

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga que se muestran en la figura.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se encuentran las reacciones en B y en D:

$$\mathbf{R}_B = 46 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14 \text{ kN} \uparrow$$

Fuerza cortante y momento flector. Primero se determinan las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN aplicada en A. Considerando la porción de la viga que está a la izquierda de la sección *1* como un cuerpo libre y suponiendo que V y M son positivos (de acuerdo con la convención estándar), se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20 \text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_1 = 0: \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$$

Después, se considera como un cuerpo libre a la porción de la viga ubicada a la izquierda de la sección *2* y se escribe

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20 \text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_2 = 0: \quad (20 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

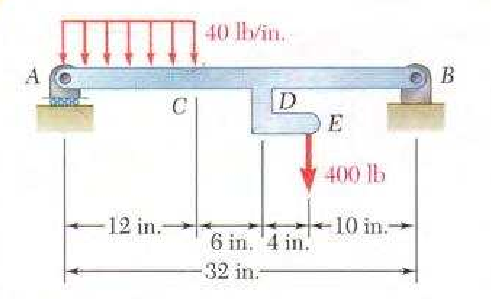
De forma similar, se determinan la fuerza cortante y el momento flector en las secciones *3*, *4*, *5* y *6* a partir de los diagramas de cuerpo libre mostrados en la figura. Así, se obtiene

$$V_3 = +26 \text{ kN} \qquad M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$V_4 = +26 \text{ kN} \qquad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$V_5 = -14 \text{ kN} \qquad M_5 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$V_6 = -14 \text{ kN} \qquad M_6 = 0$$

Para varias de las secciones anteriores, los resultados se obtienen más fácilmente si se considera como un cuerpo libre la parte de la viga que está a la derecha de la sección de interés. Por ejemplo, considerando la porción de la viga que está a la derecha de la sección *4*, se escribe

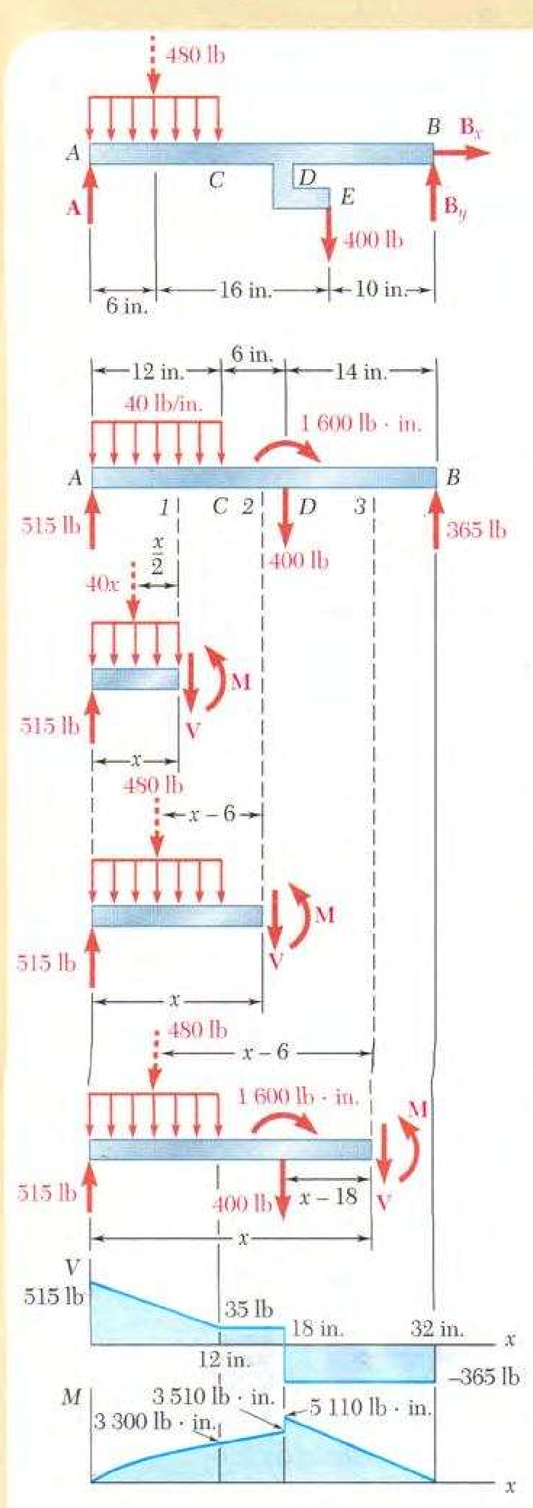
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40 \text{ kN} + 14 \text{ kN} = 0 \qquad V_4 = +26 \text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft\Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14 \text{ kN})(2 \text{ m}) = 0 \qquad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se pueden graficar los seis puntos mostrados en los diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Como se señaló en la sección 7.5, la fuerza cortante tiene un valor constante y el momento flector varía linealmente entre cargas concentradas; por tanto, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flector que se muestra en el diagrama.



PROBLEMA RESUELTO 7.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga *AB*. La carga distribuida de 40 lb/in. se extiende sobre 12 in. de la viga, desde *A* hasta *C*, y la carga de 400 lb se aplica en *E*.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Se determinan las reacciones considerando la viga completa como un cuerpo libre.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B_y(32 \text{ in.}) - (480 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - (400 \text{ lb})(22 \text{ in.}) = 0$$
$$B_y = +365 \text{ lb} \qquad \mathbf{B}_y = 365 \text{ lb} \uparrow$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (480 \text{ lb})(26 \text{ in.}) + (400 \text{ lb})(10 \text{ in.}) - A(32 \text{ in.}) = 0$$
$$A = +515 \text{ lb} \qquad \mathbf{A} = 515 \text{ lb} \uparrow$$
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0 \qquad \mathbf{B}_x = 0$$

Ahora, la carga de 400 lb se reemplaza por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la viga en el punto *D*.

Fuerza cortante y momento flector. ***Desde A hasta C.*** Se determinan las fuerzas internas a una distancia *x* a partir del punto *A* considerando la parte de la viga que está a la izquierda de la sección *1*. La parte de la carga distribuida que actúa sobre el cuerpo libre se reemplaza por su resultante y se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 40x - V = 0 \qquad V = 515 - 40x$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad -515x + 40x(\tfrac{1}{2}x) + M = 0 \qquad M = 515x - 20x^2$$

Como el diagrama de cuerpo libre mostrado puede utilizarse para todos los valores de *x* menores que 12 in., las expresiones obtenidas para *V* y *M* son válidas a lo largo de la región $0 < x < 12$ in.

Desde C hasta D. Considerando la parte de la viga que está a la izquierda de la sección *2* y reemplazando nuevamente la carga distribuida por su resultante, se obtiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 480 - V = 0 \qquad V = 35 \text{ lb}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) + M = 0 \qquad M = (2\,880 + 35x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Estas expresiones son válidas en la región 12 in. $< x <$ 18 in.

Desde D hasta B. Con la porción de la viga que está a la izquierda de la sección *3*, se obtienen los siguientes resultados para la región 18 in. $<$ $x <$ 32 in.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 515 - 480 - 400 - V = 0 \qquad V = -365 \text{ lb}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = 0: \quad -515x + 480(x - 6) - 1\,600 + 400(x - 18) + M = 0$$
$$M = (11\,680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se pueden graficar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para toda la viga. Se observa que el par que está aplicado en *D* cuyo momento es igual a 1 600 lb · in. introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a determinar la *fuerza cortante* V y el *momento flector* M en cualquier punto de una viga. También se aprendió a dibujar el *diagrama de fuerza cortante* y el *diagrama de momento flector* para la viga graficando, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga.

A. Determinación de la fuerza cortante y el momento flector en una viga. Para determinar la fuerza cortante V y el momento flector M en un punto dado C de una viga, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para la viga completa y utilizarlo para determinar las reacciones en los apoyos de la viga.

2. Cortar la viga en el punto C y, con las cargas originales, seleccionar una de las dos porciones de la viga que se han obtenido.

3. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la porción de la viga que se haya seleccionado, mostrando:

a) ***Las cargas y las reacciones*** ejercidas sobre esa parte de la viga, reemplazando cada una de las cargas distribuidas por una carga concentrada equivalente, como se explicó en la sección 5.8.

b) ***La fuerza cortante y el par flector que representan las fuerzas internas en C.*** Para facilitar el registro de la fuerza cortante V y del momento flector M después que éstos han sido determinados, se debe seguir la convención indicada en las figuras 7.8 y 7.9. Por tanto, si se usa la parte de la viga ubicada a la *izquierda* de C, se aplica en C una *fuerza cortante* **V** *dirigida hacia abajo y* un *par flector* **M** *dirigido en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Si se está utilizando la porción de la viga ubicada a la *derecha de C*, se aplica en C una *fuerza cortante* **V**′ *dirigida hacia arriba* y un *par flector* **M**′ *dirigido en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj* [problema resuelto 7.2].

4. Escribir las ecuaciones de equilibrio para la porción de la viga que se ha seleccionado. Se resuelve la ecuación $\Sigma F_y = 0$ para V y la ecuación $\Sigma M_C = 0$ para M.

5. Registrar los valores de V y M con el signo obtenido para cada uno de éstos. Un signo positivo para V significa que las fuerzas cortantes en C sobre cada una de las dos porciones de la viga están dirigidas como se muestra en las figuras 7.8 y 7.9; un signo negativo significa que las fuerzas cortantes tienen un sentido opuesto. En forma similar, un signo positivo para M significa que los pares flectores en C están dirigidos como se muestra en las figuras y un signo negativo significa que los pares flectores tienen un sentido opuesto. Además, un signo positivo para M significa que la concavidad de la viga en el punto C está dirigida hacia arriba mientras que un signo negativo significa que dicha concavidad está dirigida hacia abajo.

B. Dibujo de los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para una viga. Estos diagramas se obtienen al graficar, respectivamente, V y M contra la distancia x medida a lo largo de la viga. Sin embargo, en la mayoría de los casos sólo se necesita calcular los valores de V y M en unos cuantos puntos.

1. Para una viga que soporta únicamente cargas concentradas, se observa que [problema resuelto 7.2]:

a) El diagrama de fuerza cortante consiste en segmentos de líneas horizontales. Por tanto, para dibujar el diagrama de fuerza cortante de la viga sólo se necesitará calcular el valor de V justo a la izquierda o justo a la derecha de los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

b) El diagrama de momento flector consiste de segmentos de líneas rectas oblicuas. Por tanto, para dibujar el diagrama de momento flector de la viga sólo se necesitará calcular el valor de M en los puntos donde se aplican las cargas o las reacciones.

2. Para una viga que soporta cargas uniformemente distribuidas, es necesario señalar [problema resuelto 7.3] que bajo cada una de las cargas distribuidas se tiene lo siguiente:

a) El diagrama de fuerza consiste de un segmento de una línea recta oblicua. Por tanto, sólo se necesita calcular el valor de V donde empieza y termina la carga distribuida.

b) El diagrama de momento flector consiste de un arco de parábola. En la mayoría de los casos sólo se necesita calcular el valor de M donde empieza y termina la carga distribuida.

3. Para una viga con una carga más complicada, es necesario considerar el diagrama de cuerpo libre de una porción de la viga de longitud arbitraria x y determinar V y M como funciones de x. Es posible que se tenga que repetir este procedimiento varias veces puesto que por lo general V y M están representadas con diferentes funciones en distintas partes de la viga [problema resuelto 7.3].

4. Cuando se aplica un par a una viga, la fuerza cortante tiene el mismo valor en ambos lados del punto de aplicación del par pero en el diagrama de momento flector presentará una discontinuidad en dicho punto, incrementándose o disminuyendo en una cantidad igual a la magnitud del par. Observe que un par se puede aplicar directamente a la viga o puede resultar a partir de la aplicación de una carga sobre un elemento curvo que está unido rígidamente a la viga [problema resuelto 7.3].

Problemas

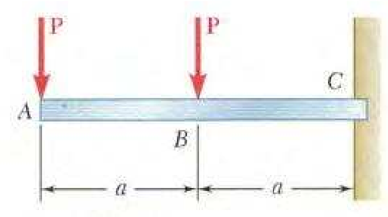
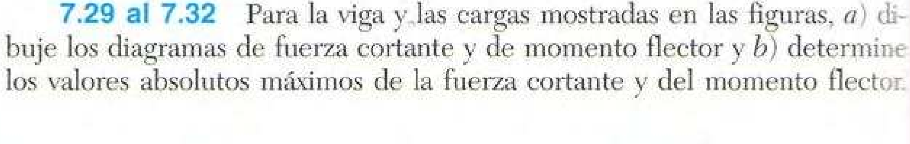


Figura P7.29



7.29 al 7.32 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

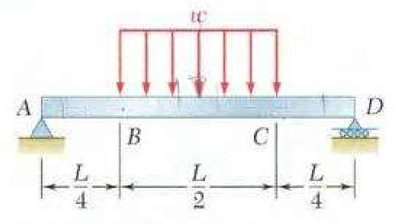


Figura P7.31

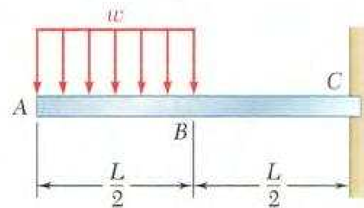


Figura P7.32

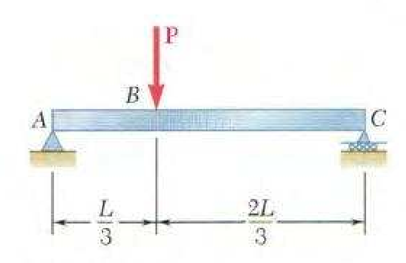


Figura P7.30

7.33* y *7.34 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

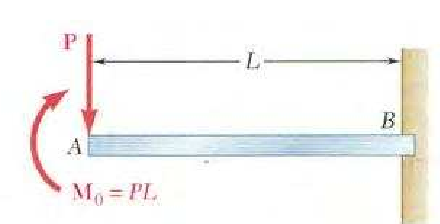


Figura *P7.33*

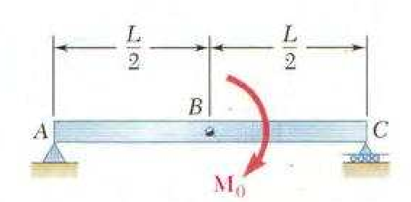


Figura *P7.34*

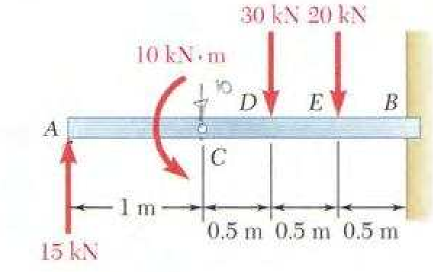


Figura P7.35

7.35 y 7.36 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

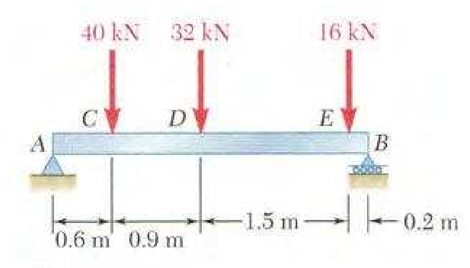


Figura P7.36

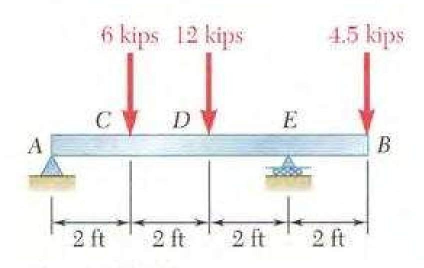


Figura *P7.37*

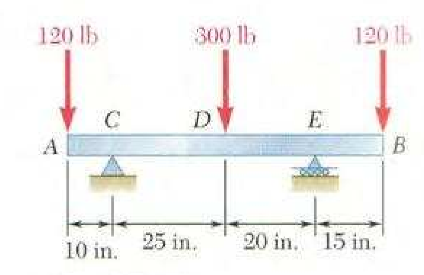


Figura *P7.38*

7.37* y *7.38 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.39 a 7.42 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

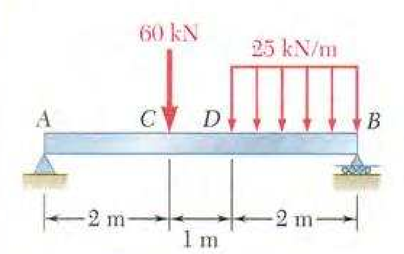


Figura P7.39

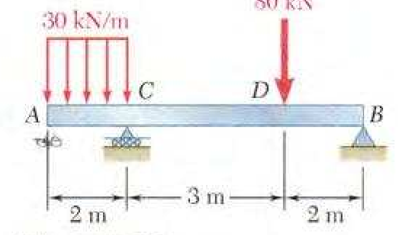


Figura P7.40

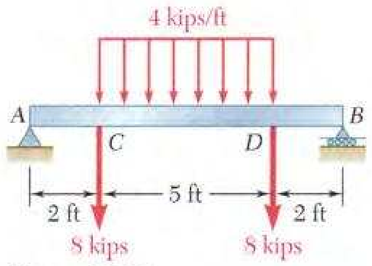


Figura P7.41

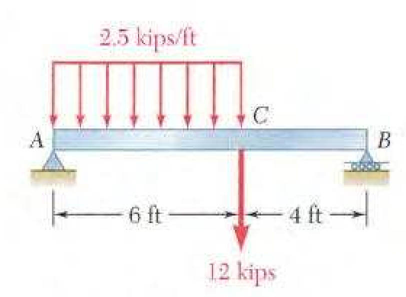


Figura P7.42

7.43 Si se supone que la reacción del suelo sobre la viga *AB* que se muestra en la figura está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida y $a = 0.3$ m, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

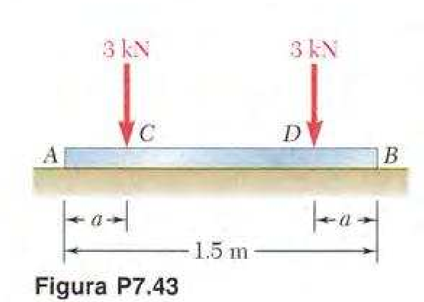


Figura P7.43

7.44 Retome el problema 7.43 si $a = 0.5$ m.

7.45 y 7.46 Si la reacción del suelo sobre la viga *AB* que se muestra en las figuras está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

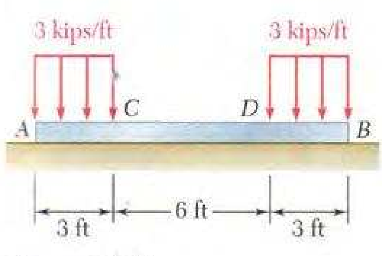


Figura P7.45

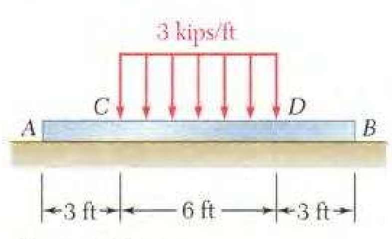


Figura P7.46

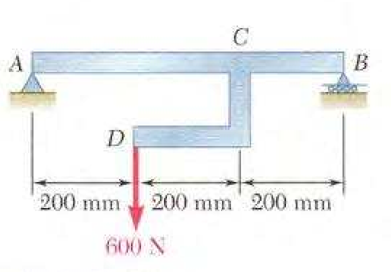


Figura P7.47

7.47 Si la reacción del suelo sobre la viga *AB* que se muestra en la figura está dirigida hacia arriba y es uniformemente distribuida y se sabe que $P = wa$, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.



7.48 Retome el problema 7.47 si se sabe que $P = 3wa$.

7.49 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga *AB* y determine la fuerza cortante y el momento flector *a*) justo a la izquierda de *C*, *b*) justo a la derecha de *C*.

Figura P7.49

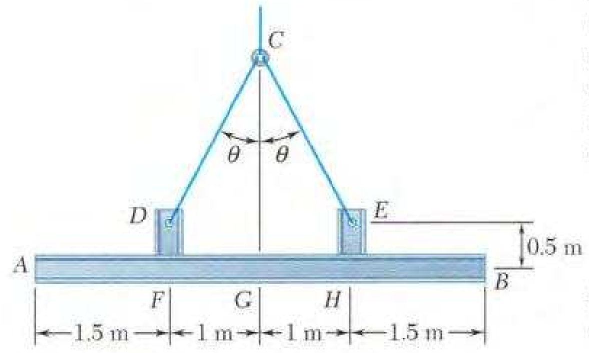


Figura *P7.50*

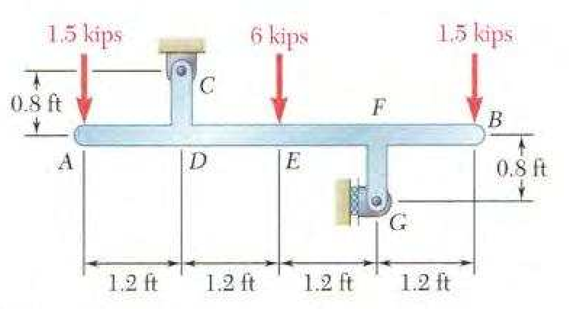


Figura P7.52

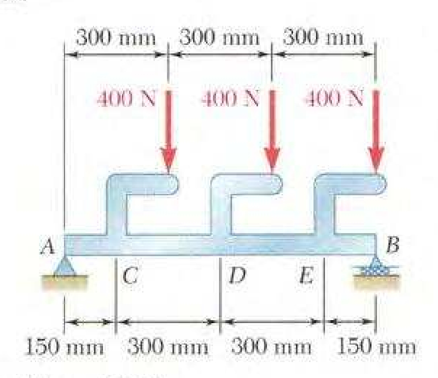


Figura P7.54

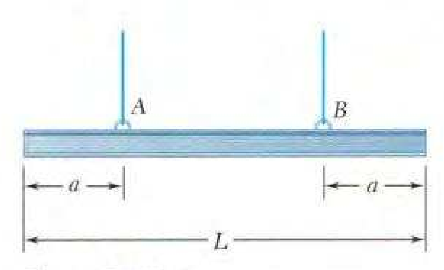


Figura P7.58

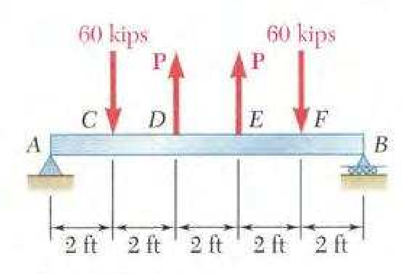


Figura P7.59

7.50 Dos secciones pequeñas de canal DF y EH se sueldan a la viga uniforme AB de peso $W = 3$ kN, para formar el elemento rígido estructural que se muestra en la figura. Este elemento se eleva mediante dos cables unidos en D y E. Si se sabe que $\theta = 30°$ y no se toma en cuenta el peso de las secciones del canal, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector en la viga.

7.51 Retome el problema 7.50 para $\theta = 60°$.

7.52 a 7.54 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB y determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

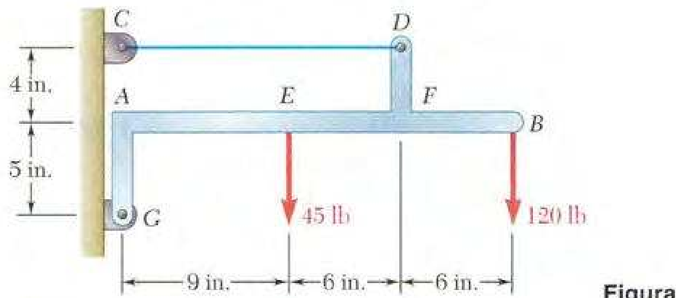


Figura P7.53

7.55 Para el elemento estructural del problema 7.50, determine *a*) el ángulo θ para el cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. (*Sugerencia*: Dibuje el diagrama de momento flector e iguale los valores absolutos máximos positivos y negativos que se obtengan en el diagrama.)

7.56 Para la viga del problema 7.43 determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.57 Para la viga del problema 7.47 determine *a*) la relación $k = P/wa$ para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.58 Una viga uniforme será elevada mediante los cables de una grúa unidos en A y B. Determine la distancia *a* desde los extremos de la viga hasta los puntos donde los cables deberían estar unidos si el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo. (*Sugerencia*: Dibuje el diagrama de momento flector en términos de *a*, *L* y el peso *w* por unidad de longitud, y después iguale los valores absolutos de los momentos flectores máximos de signo positivo y negativo que se hayan obtenido.)

7.59 Para la viga que se muestra en la figura, determine *a*) la magnitud *P* de las dos fuerzas ascendentes tal que el valor absoluto máximo del momento flector en la viga sea mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.60 Si $P = Q = 150$ lb, determine *a*) la distancia *a* para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

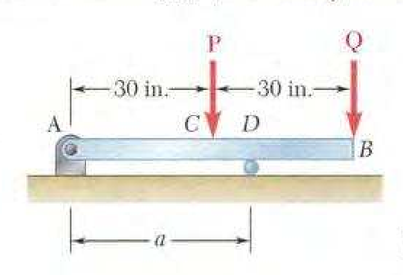


Figura *P7.60*

7.61 Retome el problema 7.60, y ahora suponga que $P = 300$ lb y $Q = 150$ lb.

***7.62** A fin de reducir el momento flector de la viga en voladizo AB que se muestra en la figura, se fijan de manera permanente un cable y un contrapeso en el extremo B. Determine la magnitud del contrapeso para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo, así como el valor correspondiente de $|M|_{máx}$. Considere *a*) el caso en el que la carga distribuida se aplica permanentemente sobre la viga y *b*) el caso más general en el que la carga distribuida puede aplicarse o retirarse.

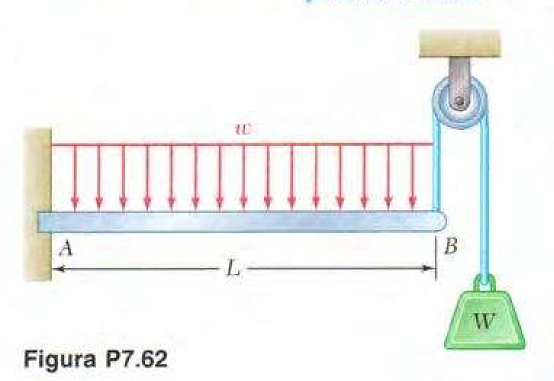


Figura P7.62

*7.6. RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Si una viga sostiene más de dos o tres cargas concentradas, o cuando soporta cargas distribuidas, es muy probable que el método para graficar las fuerzas cortantes y los momentos flectores descrito en la sección 7.5 se vuelva muy laborioso. La elaboración del diagrama de fuerza cortante y, especialmente, la del diagrama de momento flector, se simplificarán en gran medida si se toman en consideración ciertas relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector.

Considérese una viga simplemente apoyada AB que soporta una carga distribuida w por unidad de longitud (figura 7.11*a*), y sean C y C' dos puntos sobre la viga separados por una distancia Δx entre sí. La fuerza cortante y el momento flector ubicados en C estarán representados, respectivamente, con V y M, las cuales se supondrán positivas; la fuerza cortante y el momento flector localizados en C' serán representados mediante $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$.

Ahora se separa el tramo de viga CC' y se traza su diagrama de cuerpo libre (figura 7.11*b*). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre incluyen una carga de magnitud $w\,\Delta x$ y las fuerzas y los pares internos que actúan en C y C'. Como se ha supuesto que la fuerza cortante y el momento flector son positivos, las fuerzas y los pares estarán dirigidos en la forma indicada por la figura.

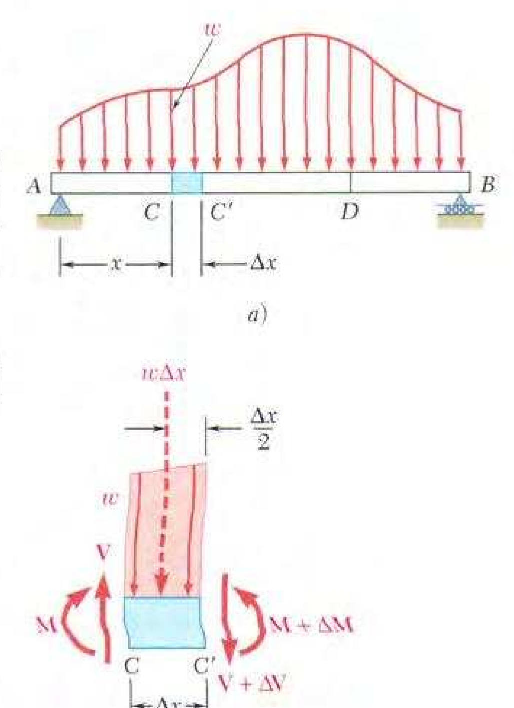


Figura 7.11

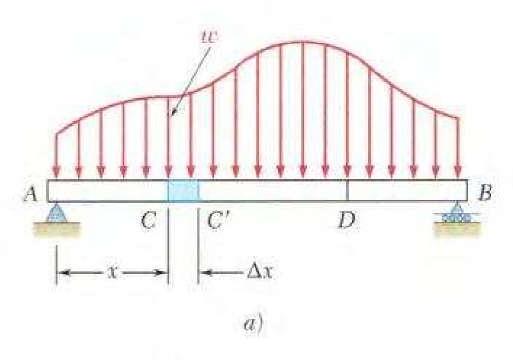
Relaciones entre carga y fuerza cortante. Se escribe que la suma de las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CC' es igual a cero:

$$V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$
$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

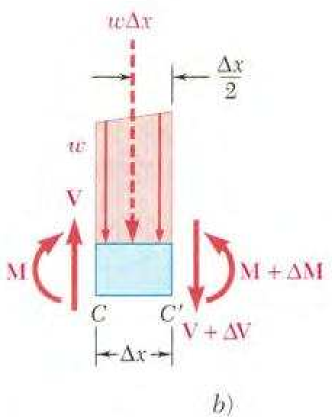
Al dividir ambos lados de la ecuación anterior entre Δx, y haciendo luego que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = -w \qquad (7.1)$$

La fórmula (7.1) indica que para una viga de la forma que muestra la figura 7.11*a*, la pendiente dV/dx de la curva de fuerza cortante es negativa; además, el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.



a)



b)

Figura 7.11 *(repetida)*

Si se integra la ecuación (7.1) entre los puntos C y D, se obtiene

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\, dx \tag{7.2}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{7.2'}$$

Obsérvese que también se pudo haber obtenido este resultado considerando el equilibrio de la porción CD de la viga, puesto que el área bajo la curva de carga representa la carga total aplicada entre C y D.

Es necesario señalar que la ecuación (7.1) *no es válida* en un punto donde se aplica una carga concentrada; como se vio en la sección 7.5, la curva de fuerza cortante es discontinua en dicho punto. En forma similar, las ecuaciones (7.2) y (7.2′) dejan de ser válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, puesto que dichas ecuaciones no toman en consideración el cambio brusco en la fuerza cortante ocasionado por una carga concentrada. Por tanto, las ecuaciones (7.2) y (7.2′) sólo se deben aplicar entre cargas concentradas sucesivas.

Relaciones entre la fuerza cortante y el momento flector. Regresando al diagrama de cuerpo libre de la figura 7.11*b*, ahora se escribe que la suma de los momentos con respecto a C' es igual a cero y se obtiene

$$(M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\,\Delta x\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \tfrac{1}{2}w(\Delta x)^2$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación anterior entre Δx y se hace que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

La ecuación (7.3) indica que la pendiente dM/dx de la curva de momento flector es igual al valor de la fuerza cortante. Esto es cierto en cualquier punto donde la fuerza cortante tenga un valor bien definido, es decir, en cualquier punto donde no se aplique una fuerza concentrada. Además, la ecuación (7.3) también muestra que la fuerza cortante es igual a cero en aquellos puntos donde el momento flector es máximo. Esta propiedad facilita el cálculo de los puntos donde es más probable que la viga falle bajo flexión.

Si se integra la ecuación (7.3) entre los puntos C y D, se obtiene

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\, dx \tag{7.4}$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \tag{7.4'}$$

Obsérvese que se debe considerar que el área bajo la curva de fuerza cortante es positiva en aquellos lugares donde la fuerza cortante es positiva y que el área es negativa donde la fuerza cortante es negativa. Las ecuaciones (7.4) y (7.4′) son válidas cuando se aplican cargas concentradas entre C y D, y siempre y cuando se haya dibujado correctamente la curva de fuerza cortante. Sin embargo, dichas fórmulas dejan de ser válidas si se aplica un *par* en un punto localizado entre C y D, puesto que las fórmulas en cuestión no consideran el cambio brusco en el momento flector ocasionado por un par (véase problema resuelto 7.7).

Ejemplo. Considere una viga apoyada AB que tiene un claro L y que soporta una carga distribuida de manera uniforme w (figura 7.12*a*). A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se determina la magnitud de las reacciones en los apoyos $R_A = R_B = wL/2$ (figura 7.12*b*). Después, se dibuja el diagrama de fuerza cortante. Cerca del extremo A de la viga, la fuerza cortante es igual a R_A, esto es, igual a $wL/2$, como puede corroborarse considerando una porción muy pequeña de la viga como un cuerpo libre. Entonces, utilizando la ecuación (7.2) se puede determinar la fuerza cortante V a cualquier distancia x a partir de A. Así se escribe

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

En este sentido, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua que cruza el eje x en $x = L/2$ (figura 7.12*c*). Ahora considere el momento flector, primero se observa que $M_A = 0$. Entonces, el valor M del momento flector a cualquier distancia x a partir de A se puede obtener a partir de la ecuación (7.4); así se tiene que

$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right) dx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

La curva de momento flector es una parábola. El máximo valor del momento flector ocurre cuando $x = L/2$, puesto que V (y, por tanto, dM/dx) es igual a cero para dicho valor de x. Si se sustituye $x = L/2$ en la última ecuación, se obtiene $M_{máx} = wL^2/8$. ■

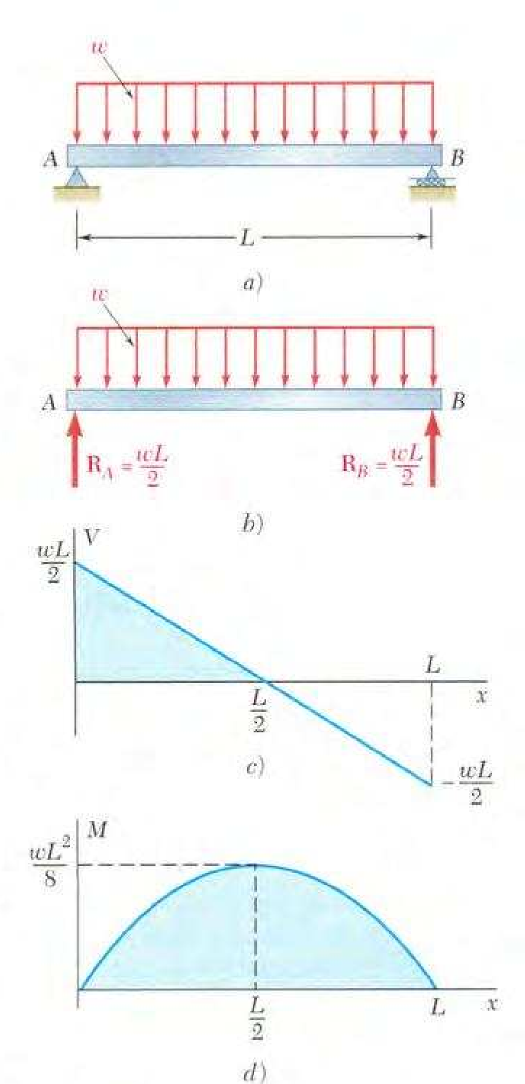
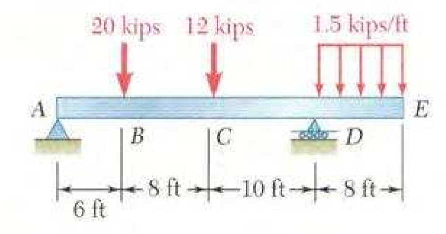


Figura 7.12

En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería sólo se necesita conocer el valor del momento flector en unos cuantos puntos específicos. Una vez que se ha dibujado el diagrama de fuerza cortante y después de que se ha determinado el valor de M en uno de los extremos de la viga, se puede obtener el valor del momento flector en cualquier punto, calculando el área bajo la curva de fuerza cortante y utilizando la ecuación (7.4′). Por ejemplo, como $M_A = 0$ para la viga de la figura 7.12, el máximo valor del momento flector para la viga se puede obtener midiendo el área del triángulo sombreado en el diagrama de fuerza cortante:

$$M_{máx} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

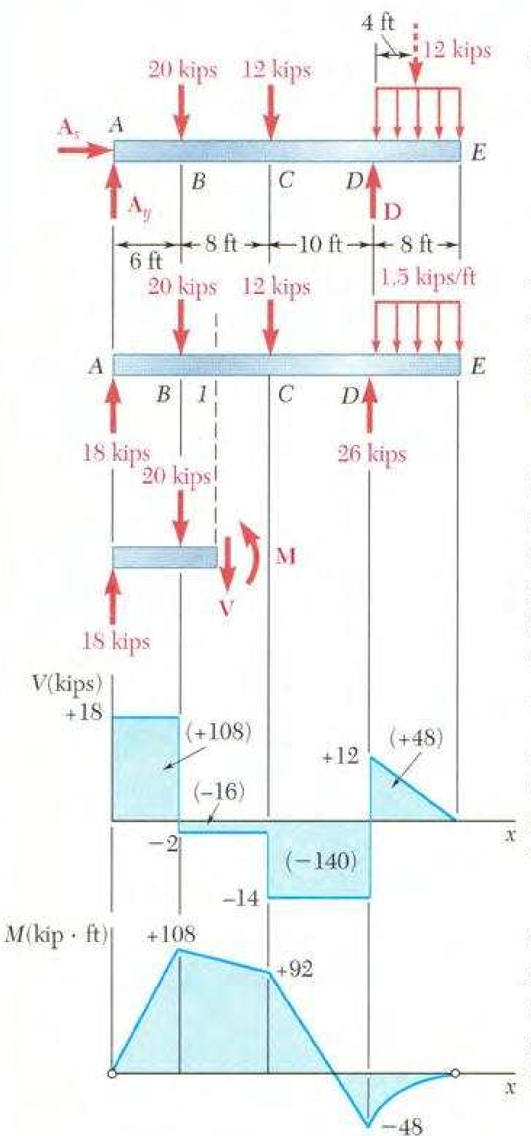
En este ejemplo, la curva de carga es una línea recta horizontal, la curva de fuerza cortante es una línea recta oblicua y la curva de momento flector es una parábola. Si la curva de carga hubiera sido una línea recta oblicua (polinomio de primer grado), la curva de fuerza cortante habría sido una parábola (polinomio de segundo grado) y la curva de momento flector hubiera sido cúbica (polinomio de tercer grado). Las curvas de fuerza cortante y momento flector siempre serán, respectivamente, uno y dos grados mayores que la curva de carga. Por tanto, una vez que se han calculado unos cuantos valores de la fuerza cortante y del momento flector, se deberán poder bosquejar los diagramas de fuerza cortante y momento flector sin tener que determinar las funciones $V(x)$ y $M(x)$. Los bosquejos obtenidos serán más precisos si se hace uso del hecho de que en cualquier punto donde las curvas son continuas, la pendiente de la curva de fuerza cortante es igual a $-w$ y la pendiente de la curva de momento flector es igual a V.



PROBLEMA RESUELTO 7.4

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura.

SOLUCIÓN



Cuerpo libre: viga completa. Si se considera a toda la viga como un cuerpo libre, se determinan las reacciones:

$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$:
$$D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft}) = 0$$
$$D = +26 \text{ kips} \qquad \mathbf{D} = 26 \text{ kips} \uparrow$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} = 0$
$$A_y = +18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 18 \text{ kips} \uparrow$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0$: $\quad A_x = 0 \qquad \mathbf{A}_x = 0$

También se debe señalar que tanto en A como en E el momento flector es igual a cero; por tanto, se obtienen dos puntos (indicados por medio de pequeños círculos) del diagrama de momento flector.

Diagrama de fuerza cortante. Como $dV/dx = -w$, se encuentra que la pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a cero (esto es, que la fuerza cortante es constante) entre cargas concentradas y reacciones. La fuerza cortante en cualquier punto se determina dividiendo la viga en dos partes y considerando a cualquiera de dichas partes como un cuerpo libre. Por ejemplo, utilizando la porción de la viga que está a la izquierda de la sección *1*, se obtiene la fuerza cortante entre B y C:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad +18 \text{ kips} - 20 \text{ kips} - V = 0 \qquad V = -2 \text{ kips}$$

Además, también se encuentra que la fuerza cortante es igual a +12 kilolibras (kips) justo a la derecha del punto D y que la fuerza cortante es igual a cero en el extremo E. Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre D y E, el diagrama de fuerza cortante es una línea recta entre estos dos puntos.

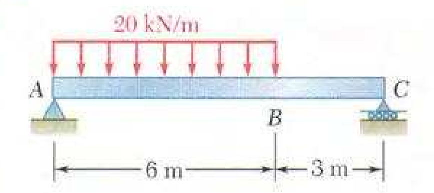
Diagrama de momento flector. Se recuerda que el área bajo la curva de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos. Por conveniencia, se calcula el área de cada porción del diagrama de fuerza cortante y se indica el valor obtenido en ese mismo diagrama. Como se sabe que el momento flector M_A en el extremo izquierdo es igual a cero, se escribe

$$M_B - M_A = +108 \qquad M_B = +108 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_C - M_B = -16 \qquad M_C = +92 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_D - M_C = -140 \qquad M_D = -48 \text{ kips} \cdot \text{ft}$$
$$M_E - M_D = +48 \qquad M_E = 0$$

Como se sabe que M_E es igual a cero, se obtiene una comprobación de los cálculos realizados.

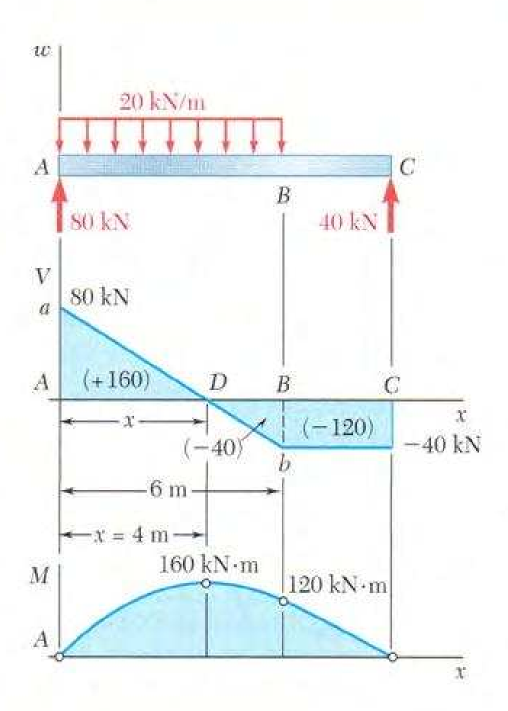
Entre las cargas concentradas y reacciones la fuerza cortante es constante; por tanto, la pendiente dM/dx es constante y se dibuja el diagrama de momento flector conectando los puntos conocidos con líneas rectas. Entre D y E, donde el diagrama de fuerza cortante es una línea recta oblicua, el diagrama de momento flector es una parábola.

A partir de los diagramas para V y M se observa que $V_{\text{máx}} = 18$ kips y $M_{\text{máx}} = 108$ kips · ft.



PROBLEMA RESUELTO 7.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y las condiciones de carga mostradas en la figura y determine la ubicación y magnitud del momento flector máximo.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Si se considera toda la viga como un cuerpo libre, se obtienen las reacciones

$$\mathbf{R}_A = 80 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_C = 40 \text{ kN} \uparrow$$

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha del punto A es $V_A = +80$ kN. Como el cambio en la fuerza cortante entre dos puntos es igual al *negativo* del área bajo la curva de carga entre los mismos dos puntos, se obtiene V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN}$$
$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN}$$

Como la pendiente $dV/dx = -w$ es constante entre A y B, el diagrama de fuerza cortante entre estos dos puntos está representado por una línea recta. Entre B y C, el área bajo la curva de carga es igual a cero; por tanto,

$$V_C - V_B = 0 \qquad V_C = V_B = -40 \text{ kN}$$

y la fuerza cortante es constante entre B y C.

Diagrama de momento flector. Se observa que el momento flector en cada uno de los extremos de la viga es igual a cero. Para determinar el máximo momento flector se tiene que localizar la ubicación de la sección D de la viga donde $V = 0$. Así se escribe

$$V_D - V_A = -wx$$
$$0 - 80 \text{ kN} = -(20 \text{ kN/m})x$$

y, resolviendo para x: $x = 4$ m ◀

El máximo momento flector ocurre en el punto D donde se tiene que $dM/dx = V = 0$. Se calculan las áreas de las distintas porciones del diagrama de fuerza cortante y se indican los valores obtenidos (entre paréntesis) en ese mismo diagrama. Como el área del diagrama de fuerza cortante entre dos puntos es igual al cambio en el momento flector entre esos mismos dos puntos, se escribe

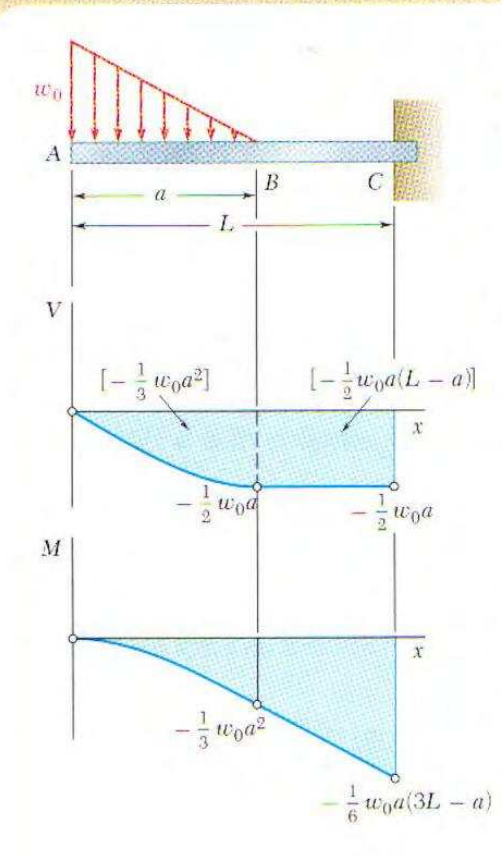
$$M_D - M_A = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_B - M_D = -40 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_B = +120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$
$$M_C - M_B = -120 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad M_C = 0$$

El diagrama de momento flector consta de un arco de parábola seguido por un segmento de línea recta; la pendiente de la parábola en A es igual al valor de V en dicho punto.

El máximo momento flector es igual a

$$M_{\text{máx}} = M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 7.6



Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga en voladizo que se muestra en la figura.

SOLUCIÓN

Diagrama de fuerza cortante. Se encuentra que en el extremo libre de la viga $V_A = 0$. Por otra parte, entre A y B, el área bajo la curva de carga es igual a $\frac{1}{2}w_0a$. Con la información anterior, se encuentra el valor de V_B escribiendo

$$V_B - V_A = -\tfrac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\tfrac{1}{2}w_0a$$

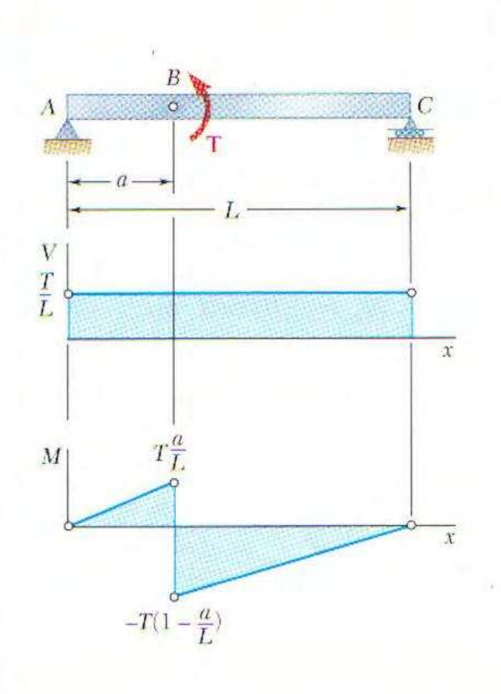
Entre B y C, la viga no soporta ninguna carga externa; por tanto $V_C = V_B$. En A, se tiene que $w = w_0$, y de acuerdo con la ecuación (7.1), la pendiente de la curva de fuerza cortante está dada por $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la carga decrece linealmente y el diagrama de fuerza cortante es parabólico. Entre B y C, $w = 0$ y el diagrama de fuerza cortante es una línea horizontal.

Diagrama de momento flector. Se observa que en el extremo libre de la viga $M_A = 0$. Se calcula el área bajo la curva de fuerza cortante y se escribe

$$M_B - M_A = -\tfrac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\tfrac{1}{3}w_0a^2$$
$$M_C - M_B = -\tfrac{1}{2}w_0a(L-a)$$
$$M_C = -\tfrac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

El bosquejo del diagrama de momento flector se completa recordando que $dM/dx = V$. Se encuentra que entre A y B el diagrama está representado por una curva cúbica con pendiente cero en A, y entre B y C está representado con una línea recta.

PROBLEMA RESUELTO 7.7



Sobre la viga sencilla apoyada AC actúa un par de magnitud T que se aplica en el punto B. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre: viga completa. Se toma toda la viga como un cuerpo libre y se obtiene

$$\mathbf{R}_A = \frac{T}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_C = \frac{T}{L}\downarrow$$

Diagramas de fuerza cortante y momento flector. La fuerza cortante en cualquier sección es constante e igual a T/L. Como el par está aplicado en B, el diagrama de momento flector es discontinuo en dicho punto; así el momento flector decrece bruscamente en una cantidad igual a T.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a utilizar las relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector para simplificar la tarea de dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector. Estas relaciones son

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{7.2'}$$

$$M_D - M_C = (\text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D) \tag{7.4'}$$

Tomando en cuenta las relaciones anteriores, se puede utilizar el siguiente procedimiento para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para una viga.

1. *Dibujar un diagrama de cuerpo libre para toda la viga* y utilizarlo para determinar las reacciones en sus apoyos.

2. *Dibujar el diagrama de fuerza cortante.* Al igual que en la lección anterior, esto se puede llevar a cabo cortando la viga en varios puntos y considerando el diagrama de cuerpo libre de una de las partes de la viga que se obtienen de esta forma [problema resuelto 7.3]. Sin embargo, se puede considerar uno de los siguientes procedimientos alternativos.

a) La fuerza cortante V en cualquier punto de la viga es igual a la suma de las reacciones y de las cargas que se encuentran a la izquierda de dicho punto; una fuerza que actúa hacia arriba se considera como positiva y una fuerza que actúa hacia abajo se considera como negativa.

b) Para una viga que soporta una carga distribuida, se puede comenzar a partir de un punto donde se conoce el valor de V y utilizar consecutivamente la ecuación (7.2′) para encontrar el valor de V en todos los demás puntos de interés.

3. *Dibujar el diagrama de momento flector* utilizando el siguiente procedimiento.

a) Se calcula el área bajo cada porción de la curva de fuerza cortante, asignándole un signo positivo a las áreas localizadas por encima del eje x y un signo negativo a las áreas localizadas por debajo del eje x.

b) Se aplica consecutivamente la ecuación (7.4′) [problemas resueltos 7.4 y 7.5], comenzando a partir del extremo izquierdo de la viga, donde $M = 0$ (excepto si en ese extremo se aplica un par o si la viga es una viga en voladizo con su extremo izquierdo fijo).

c) Se debe tener cuidado de mostrar una discontinuidad en el diagrama de momento flector ***en el punto en el que se aplica un par sobre la viga***, *incrementando* el valor de M en dicho punto en una cantidad igual a la magnitud del par, si

(continúa)

este último tiene un sentido a *favor del novimiento de las manecillas del reloj o disminuyendo* el valor de M en una cantidad igual a la magnitud del par, si este último tiene un sentido *contrario al movimiento de las manecillas del reloj* [problema resuelto 7.7].

4. *Determinar la ubicación y la magnitud de $|M|_{máx}$.* El máximo valor absoluto del momento flector ocurre en uno de los dos puntos en los que $dM/dx = 0$, esto es, de acuerdo con la ecuación (7.3), en un punto donde V es igual a cero o cambia de signo. Por tanto, se tiene que:

a) Se determina a partir del diagrama de fuerza cortante, el valor de $|M|$ en el que V cambia de signo; esto ocurrirá en los puntos donde actúan cargas concentradas [problema resuelto 7.4].

b) Se determinan los puntos en los que $V = 0$ y los valores correspondientes de $|M|$; esto ocurrirá bajo una carga distribuida. Para encontrar la distancia x entre el punto C, donde empieza la carga distribuida, y un punto D, donde la fuerza cortante es igual a cero, se emplea la ecuación (7.2′); aquí, para V_C se usa el valor conocido de la fuerza cortante en el punto C, para V_D se usa el valor de cero y se expresa el área bajo la curva de carga como una función de x [problema resuelto 7.5].

5. *La calidad de los dibujos de los diagramas se puede mejorar* si se recuerda que, de acuerdo con las ecuaciones (7.1) y (7.3), en cualquier punto dado, la pendiente de la curva V es igual a $-w$ y la pendiente de la curva M es igual a V.

6. *Por último, para vigas que soportan una carga distribuida que está expresada como una función $w(x)$,* se debe recordar que la fuerza cortante V se puede obtener integrando la función $-w(x)$ y el momento flector M puede obtenerse integrando $V(x)$ [ecuaciones (7.3) y (7.4)].

Problemas

7.63 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.29.

7.64 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.30.

7.65 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.31.

7.66 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.32.

7.67 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.33.

7.68 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.34.

7.69 y 7.70 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

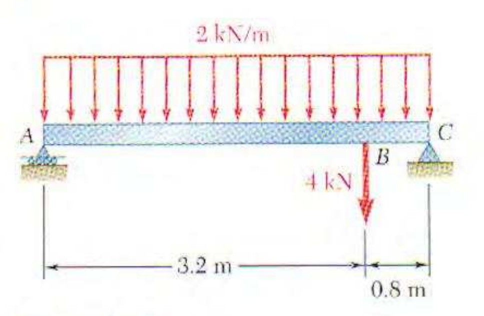


Figura P7.69

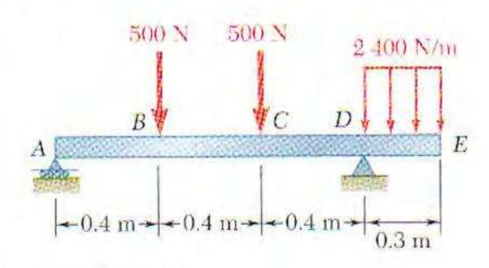


Figura P7.70

7.71 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.39.

7.72 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.40.

7.73 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.41.

7.74 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.42.

7.75* y *7.76 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

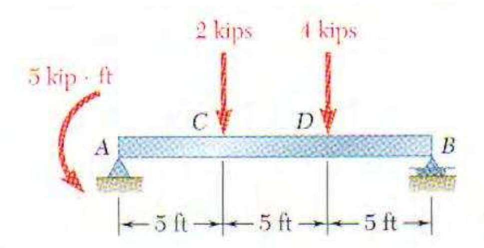


Figura *P7.75*

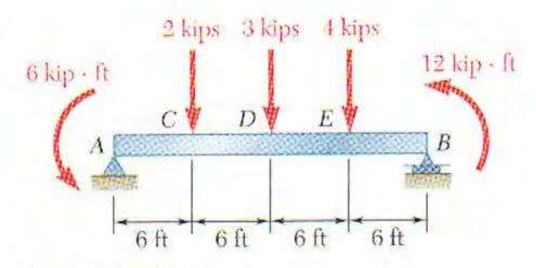


Figura *P7.76*

7.77 y 7.78 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

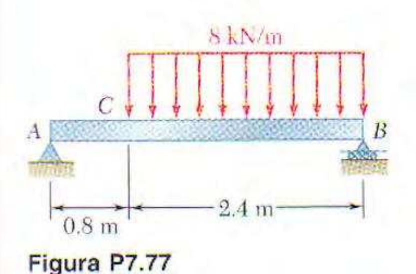


Figura P7.77

Figura P7.78

7.79 y 7.80 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

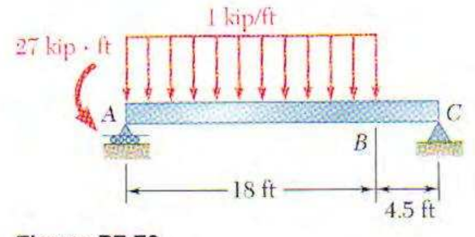


Figura P7.79

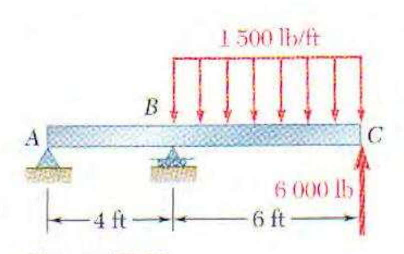


Figura P7.80

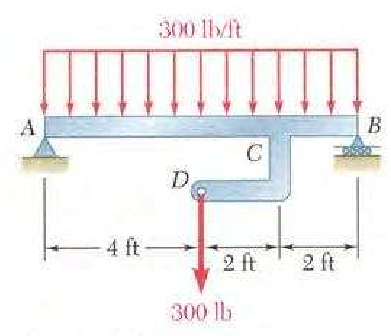


Figura *P7.81*

7.81 *a*) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga *AB*, *b*) determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

7.82 Retome el problema 7.81, y ahora suponga que la fuerza de 300 lb aplicada en *D* se dirige hacia arriba.

7.83 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine la magnitud y la ubicación del valor absoluto máximo del momento flector.

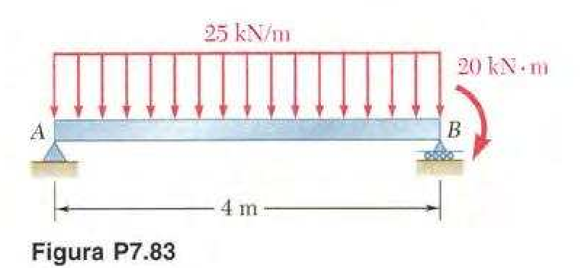


Figura P7.83

7.84 Retome el problema 7.83, y ahora suponga que el par de 20 kN · m se aplica en *B* en contra del movimiento de las manecillas del reloj.

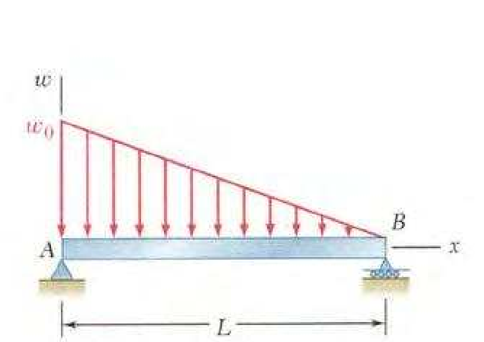


Figura P7.85

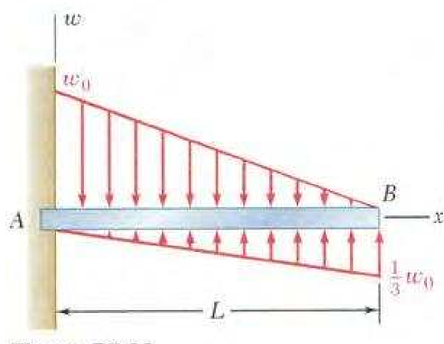


Figura P7.86

7.85 y 7.86 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, *a*) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector y *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

7.87 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector y *b*) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

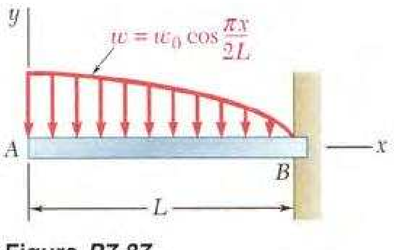


Figura *P7.87*

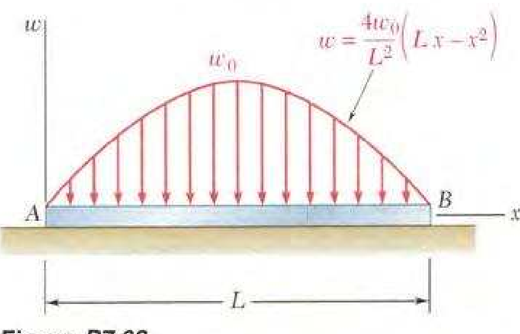


Figura *P7.88*

7.88 La viga *AB* descansa sobre el suelo y soporta la carga parabólica que se muestra en la figura. Si se supone que las reacciones del suelo son uniformemente distribuidas y dirigidas hacia arriba *a*) escriba las ecuaciones para las curvas de la fuerza cortante y del momento flector y *b*) determine el momento flector máximo.

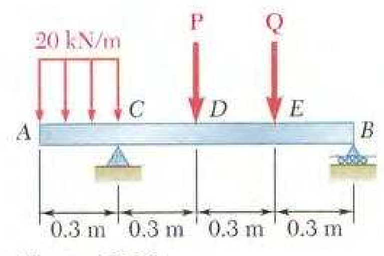


Figura P7.89

7.89 La viga *AB* se somete a una carga uniformemente distribuida y a dos fuerzas desconocidas **P** y **Q**. Si se ha calculado experimentalmente que el valor del momento flector en *D* es de +800 N · m y en *E* es de +1 300 N · m, *a*) determine **P** y **Q** y *b*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

7.90 Retome el problema 7.89, y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en *D* es de +650 N · m y de +1 450 N · m en *E*.

***7.91** La viga AB se somete a la carga uniformemente distribuida que se muestra en la figura y a dos fuerzas desconocidas **P** y **Q**. Si se sabe que el cálculo experimental del valor del momento flector es de +6.10 kip · ft en D y de +5.50 kip · ft en E, *a*) determine **P** y **Q** y *b*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

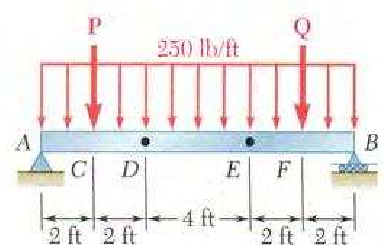


Figura P7.91

***7.92** Retome el problema 7.91, y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en D es de +5.96 kip · ft y de +6.84 kip · ft en E.

CABLES

*7.7. CABLES CON CARGAS CONCENTRADAS

Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería como puentes colgantes, líneas de transmisión, teleféricos, contravientos para torres altas, etc. Los cables pueden dividirse en dos categorías de acuerdo con las cargas que actúan sobre ellos: 1) cables que soportan cargas concentradas y 2) cables que soportan cargas distribuidas. En esta sección se examinarán sólo los cables de la primera categoría.

Considere un cable unido a dos puntos fijos A y B que soporta n cargas concentradas verticales $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ (figura 7.13*a*). Se supone que el cable es *flexible*, esto es, que su resistencia a la flexión es pequeña y se puede despreciar. Además, también se supone que el *peso del cable es susceptible de ser ignorado* en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a dos fuerzas y, por consiguiente, las fuerzas internas en cualquier punto del cable se reducen a una *fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable*.

Se supone que cada una de las cargas se encuentra en una línea vertical dada, esto es, que la distancia horizontal desde el apoyo A hasta cada una de las cargas es conocida; además, también se supone que se conocen las distancias horizontal y vertical entre los apoyos. Se busca determinar la forma del cable, esto es, la distancia vertical desde el apoyo A hasta cada uno de los puntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$, y también se desea encontrar la tensión T en cada uno de los segmentos del cable.

Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre para todo el cable (figura 7.13*b*). Como la pendiente de las porciones del cable unidas en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con dos componentes. Por tanto, están involucradas cuatro incógnitas y las tres ecuaciones de equilibrio que se tienen disponibles no son suficientes para determinar las reacciones en A y B.[†] De esta manera, se debe obtener una ecuación adicional considerando el equilibrio de una porción del cable. Lo anterior es posible si se conocen las coordenadas x y y de un punto D del cable. Dibujando el diagrama de

[†]Es obvio que el cable no es un cuerpo rígido; por tanto, las ecuaciones de equilibrio representan *condiciones necesarias pero no suficientes* (véase sección 6.11).



Fotografía 7.3 Como el peso del cable del transporte para esquiadores que se muestra en la foto es despreciable comparado con el peso de las sillas y los esquiadores, los métodos de esta sección pueden usarse para determinar la fuerza en cualquier punto del cable.

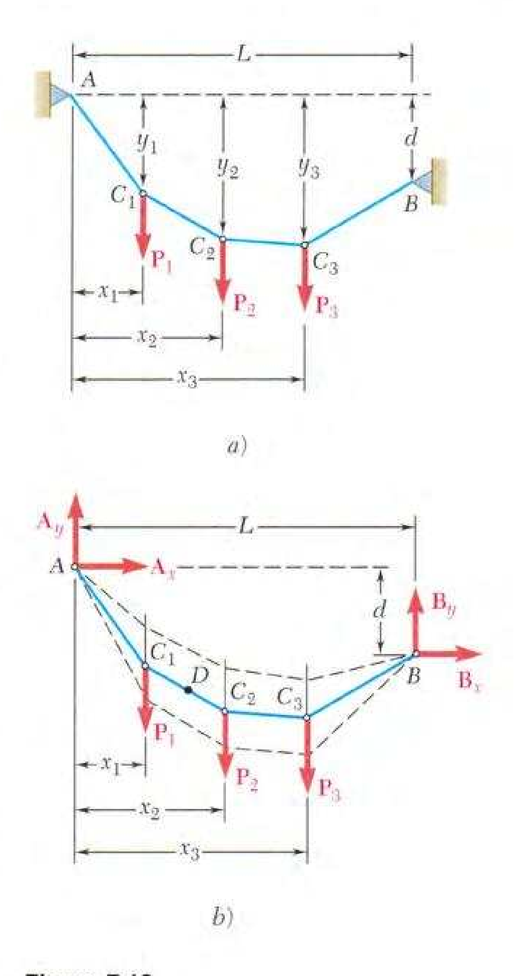


Figura 7.13

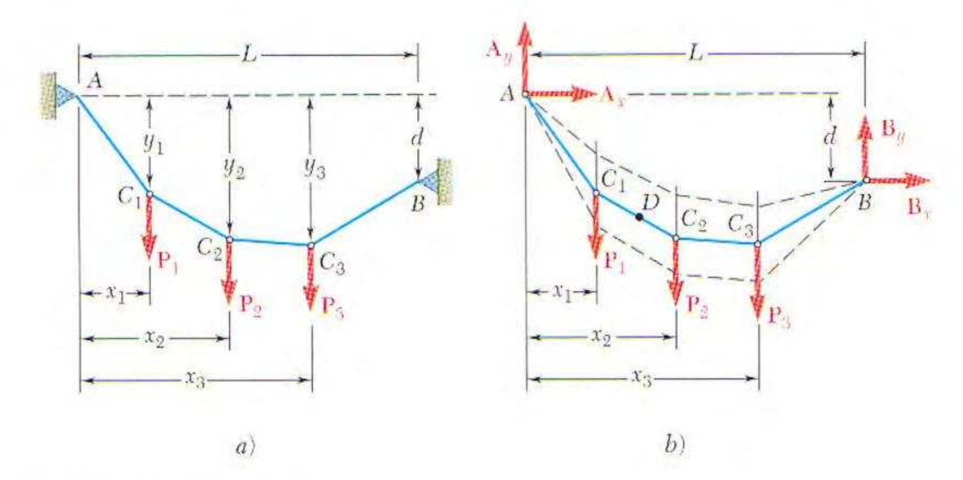


Figura 7.13 (*repetida*)

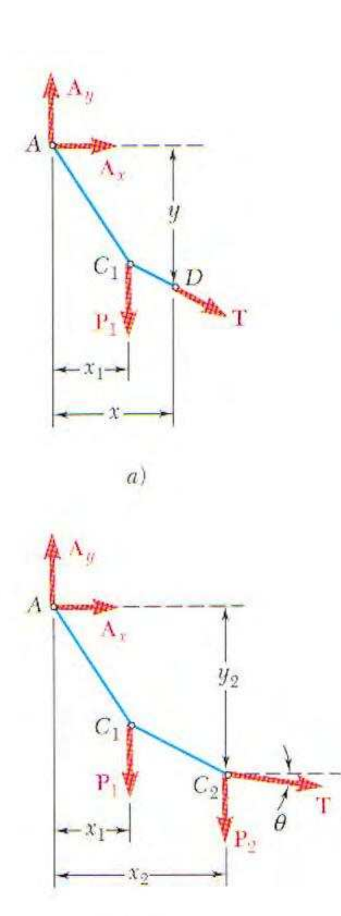


Figura 7.14

cuerpo libre del segmento AD del cable (figura 7.14*a*) y escribiendo $\Sigma M_D = 0$, se obtiene una relación adicional entre las componentes escalares A_x y A_y y se pueden determinar las reacciones en A y B. Sin embargo, el problema continuaría siendo indeterminado si no se conocieran las coordenadas de D, a menos que se proporcionara otra relación entre A_x y A_y (o entre B_x y B_y). Como se indica por medio de las líneas discontinuas en la figura 7.13*b*, el cable podría colgar en varias formas posibles.

Una vez que se han determinado A_x y A_y se puede encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable. Por ejemplo, considerando el punto C_2 se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción AC_2 del cable (figura 7.14*b*). Si se escribe $\Sigma M_{C_2} = 0$, se obtiene una ecuación que se puede resolver para y_2. Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza **T** que representa la tensión en la porción del cable que está a la derecha de C_2. Se observa que $T \cos \theta = -A_x$; por tanto, *la componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable.* Se concluye que la tensión T es máxima cuando $\cos \theta$ es mínimo, esto es, en la porción del cable que tiene el mayor ángulo de inclinación θ. Obviamente, dicha porción del cable debe ser adyacente a uno de los apoyos del cable.

*7.8. CABLES CON CARGAS DISTRIBUIDAS

Considere un cable que está unido a dos puntos fijos A y B y que soporta una *carga distribuida* (figura 7.15*a*). En la sección anterior se vio que para un cable que soporta cargas concentradas, la fuerza interna en cualquier punto es una fuerza de tensión dirigida a lo largo del cable. En el caso de un cable que soporta una carga distribuida, éste cuelga tomando la forma de una curva y la fuerza interna en el punto D es una fuerza de tensión **T** *dirigida a lo largo de la tangente de la curva.* En esta sección se aprenderá a determinar la tensión en cualquier punto de un cable que soporta una carga distribuida dada. En las secciones siguientes se determinará la forma que adopta el cable para dos tipos particulares de cargas distribuidas.

Considerando el caso más general de carga distribuida, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la porción del cable que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D del cable (figura 7.15*b*).

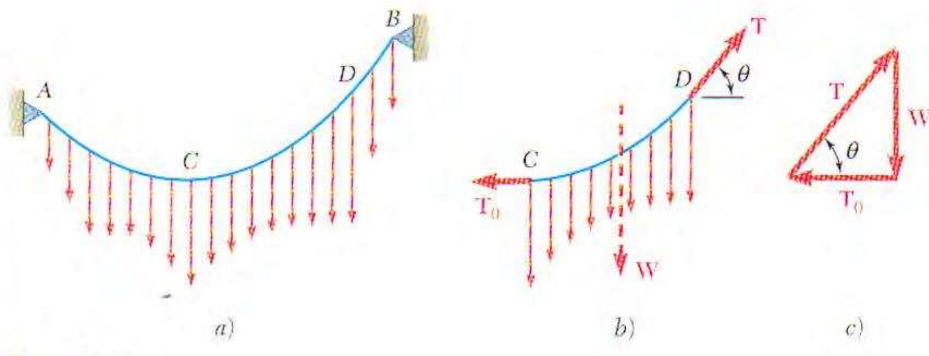


Figura 7.15

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la fuerza de tensión $\mathbf{T}_0$ en C, la cual es horizontal, la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ en D, la cual está dirigida a lo largo de la tangente al cable en D y la resultante $\mathbf{W}$ de la fuerza distribuida, soportada por la porción CD del cable. Si se dibuja el triángulo de fuerzas correspondiente (figura 7.15c), se obtienen las siguientes relaciones:

$$T \cos \theta = T_0 \qquad T \operatorname{sen} \theta = W \tag{7.5}$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

A partir de las relaciones (7.5), es evidente que la componente horizontal de la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ es la misma en cualquier punto y que la componente vertical de $\mathbf{T}$ es igual a la magnitud W de la carga medida a partir del punto más bajo. Las relaciones (7.6) muestran que la tensión T es mínima en el punto más bajo y máxima en uno de los dos puntos de apoyo.

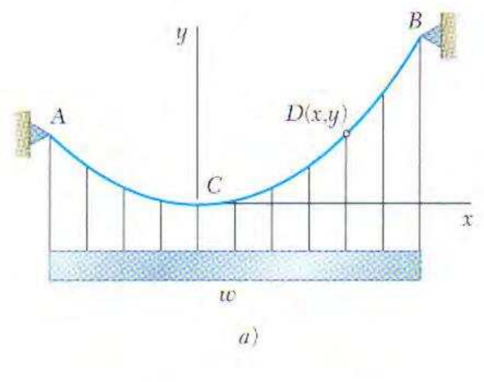
*7.9. CABLE PARABÓLICO

Ahora suponga que el cable AB soporta una carga distribuida de manera *uniforme a lo largo de la horizontal* (figura 7.16a). Se puede suponer que los cables de los puentes colgantes están cargados de esta forma puesto que el peso del cable es pequeño en comparación con el peso de la calzada. La carga por unidad de longitud (*medida en forma horizontal*) se representa con w y se expresa en N/m o en lb/ft. Seleccionando ejes coordenados con su origen en el punto más bajo C del cable, se encuentra que la magnitud W de la carga total soportada por el segmento del cable que se extiende desde C hasta el punto D de coordenadas x y y está dada por $W = wx$. De esta forma, las relaciones (7.6) que definen la magnitud y la dirección de la fuerza en D, se convierten en

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2x^2} \qquad \tan \theta = \frac{wx}{T_0} \tag{7.7}$$

Además, la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante $\mathbf{W}$ es igual a la mitad de la distancia horizontal que hay desde C hasta D (figura 7.16b). Si se suman momentos con respecto a D, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \qquad wx\frac{x}{2} - T_0 y = 0$$



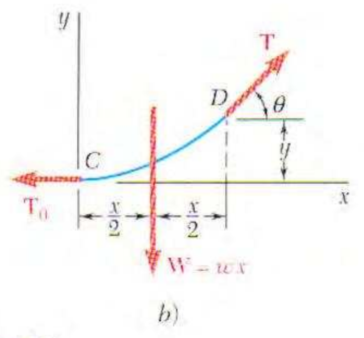
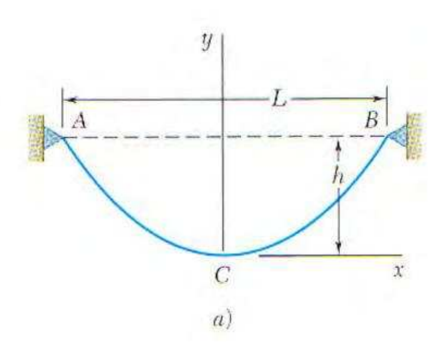
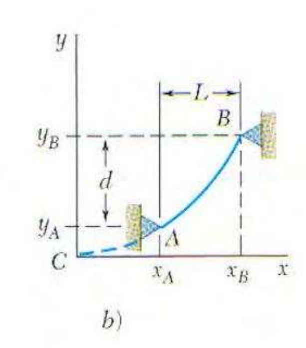


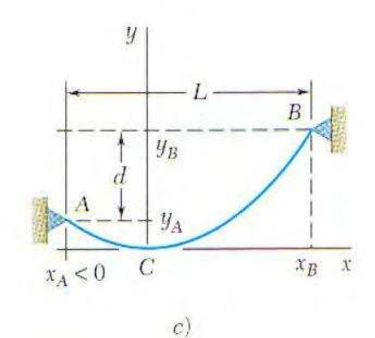
Figura 7.16



a)



b)



c)

Figura 7.17

y, resolviendo para y, se obtiene

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

Ésta es la ecuación de una *parábola* con un eje vertical y con su vértice en el origen del sistema de coordenadas. Por tanto, la curva formada por cables que están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal es una parábola.[†]

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos se conoce como el *claro* del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo se llama la *flecha* del cable (figura 7.17*a*). Si se conocen el claro y la flecha del cable y si la carga por unidad de longitud horizontal w está dada, se puede encontrar la tensión mínima T_0 sustituyendo $x = L/2$ y $y = h$ en la ecuación (7.8). Entonces, las ecuaciones (7.7) proporcionarán la tensión y la pendiente en cualquier punto del cable y la ecuación (7.8) definirá la forma del cable.

Cuando los apoyos tienen elevaciones diferentes, no se conoce la posición del punto más bajo del cable y se deben determinar las coordenadas x_A, y_A y x_B, y_B de los apoyos. Con ese propósito, se expresa que las coordenadas de A y B satisfacen la ecuación (7.8) y que $x_B - x_A = L$ y $y_B - y_A = d$, donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos (figura 7.17*b* y *c*).

La longitud del cable desde su punto más bajo C hasta su apoyo B se puede obtener a partir de la fórmula

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{7.9}$$

Si se obtiene la diferencial de la ecuación (7.8) se obtiene la derivada $dy/dx = wx/T_0$; si se sustituye este resultado en la ecuación (7.9) y se utiliza el teorema del binomio para expandir el radical en una serie infinita, se obtiene

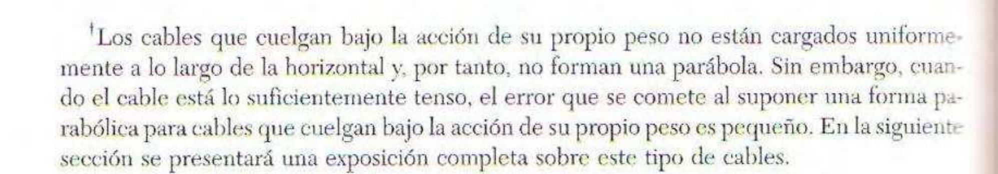
$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2x^2}{T_0^2}}\, dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{w^2x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4x^4}{8T_0^4} + \cdots\right) dx$$

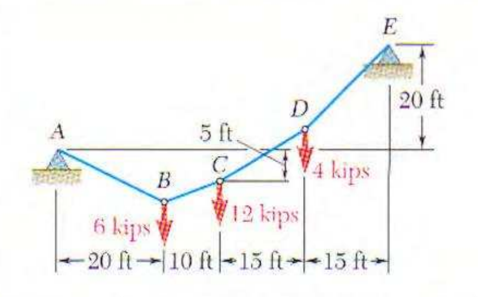
$$s_B = x_B\left(1 + \frac{w^2x_B^2}{6T_0^2} - \frac{w^4x_B^4}{40T_0^4} + \cdots\right)$$

y, como $wx_B^2/2T_0 = y_B$,

$$s_B = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \cdots\right] \tag{7.10}$$

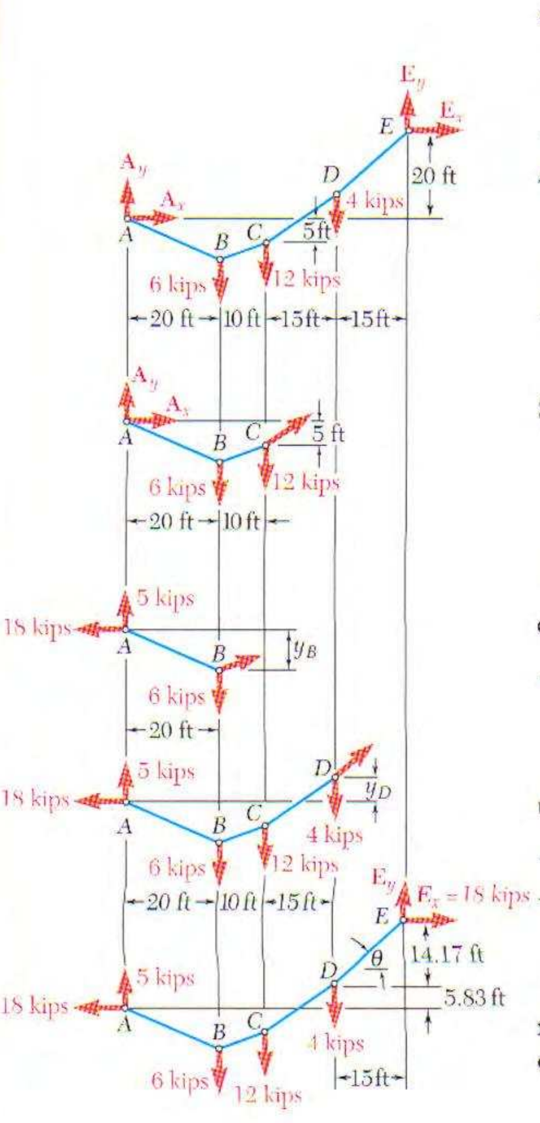
La serie converge para valores de la relación y_B/x_B menores que 0.5; en la mayoría de los casos, dicha relación es menor y sólo es necesario calcular los dos primeros términos de la serie.


[†]Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso no están cargados uniformemente a lo largo de la horizontal y, por tanto, no forman una parábola. Sin embargo, cuando el cable está lo suficientemente tenso, el error que se comete al suponer una forma parabólica para cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso es pequeño. En la siguiente sección se presentará una exposición completa sobre este tipo de cables.



PROBLEMA RESUELTO 7.8

El cable AE soporta tres cargas verticales en los puntos indicados. Si el punto C está a 5 ft por debajo del apoyo izquierdo, determine: *a*) la elevación de los puntos B y D, y *b*) la pendiente máxima y la tensión máxima en el cable.



SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las componentes de reacción $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ se determinan de la siguiente forma:

Cuerpo libre: todo el cable

$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0$:

$$A_x(20 \text{ ft}) - A_y(60 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(40 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(30 \text{ ft}) + (4 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

$$20A_x - 60A_y + 660 = 0$$

Cuerpo libre: ABC

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad -A_x(5 \text{ ft}) - A_y(30 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(10 \text{ ft}) = 0$$

$$-5A_x - 30A_y + 60 = 0$$

Si se resuelven en forma simultánea las dos ecuaciones, se obtiene

$$A_x = -18 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_x = 18 \text{ kips} \leftarrow$$

$$A_y = +5 \text{ kips} \qquad \mathbf{A}_y = 5 \text{ kips} \uparrow$$

***a*) Elevación de los puntos *B* y *D*.**

Cuerpo libre: AB. Considerando la porción AB del cable como un cuerpo libre, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (18 \text{ kips})y_B - (5 \text{ kips})(20 \text{ ft}) = 0$$

$y_B = 5.56$ ft por debajo de A ◀

Cuerpo libre: ABCD. Con el uso de la porción $ABCD$ del cable como un cuerpo libre, se escribe

$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$:

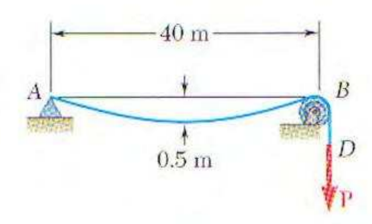
$$-(18 \text{ kips})y_D - (5 \text{ kips})(45 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(25 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

$y_D = 5.83$ ft por encima de A ◀

***b*) Pendiente y tensión máximas.** Se observa que la pendiente máxima ocurre en la porción DE. Como la componente horizontal de la tensión es constante e igual a 18 kilolibras, se escribe

$$\tan \theta = \frac{14.17}{15 \text{ ft}} \qquad \theta = 43.4° \blacktriangleleft$$

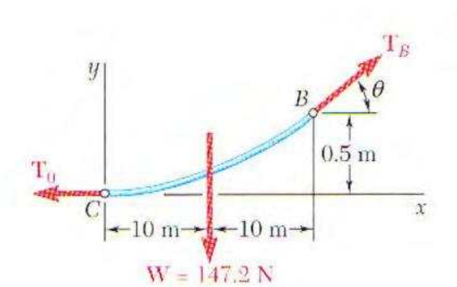
$$T_{\text{máx}} = \frac{18 \text{ kips}}{\cos \theta} \qquad T_{\text{máx}} = 24.8 \text{ kips} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 7.9

Un cable ligero está unido a un apoyo en A, pasa sobre una polea pequeña en B y soporta una carga **P**. Si se sabe que la flecha del cable es de 0.5 m y que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.75 kg/m, determine: *a*) la magnitud de la carga **P**, *b*) la pendiente del cable en B y *c*) la longitud total del cable desde A hasta B. Como la relación entre la flecha y el claro es pequeña, suponga que el cable es parabólico. Además, se ignora el peso del tramo del cable que va desde B hasta D.

SOLUCIÓN



***a*) Carga P.** Se representa con C al punto más bajo del cable y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la porción CB del cable. Suponiendo que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, se escribe

$$w = (0.75 \text{ kg/m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.36 \text{ N/m}$$

La carga total para el tramo CB del cable está dada por

$$W = wx_B = (7.36 \text{ N/m})(20 \text{ m}) = 147.2 \text{ N}$$

y se aplica justo a la mitad entre C y B. Sumando momentos con respecto a B, se escribe

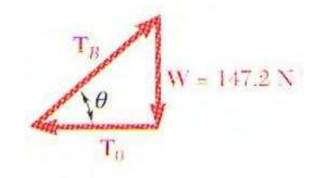
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (147.2 \text{ N})(10 \text{ m}) - T_0(0.5 \text{ m}) = 0 \qquad\qquad T_0 = 2\,944 \text{ N}$$

A partir del triángulo de fuerzas se obtiene

$$\begin{aligned} T_B &= \sqrt{T_0^2 + W^2} \\ &= \sqrt{(2\,944 \text{ N})^2 + (147.2 \text{ N})^2} = 2\,948 \text{ N} \end{aligned}$$

Como la tensión en ambos lados de la polea es la misma, se encuentra que

$$P = T_B = 2\,948 \text{ N} \quad ◀$$



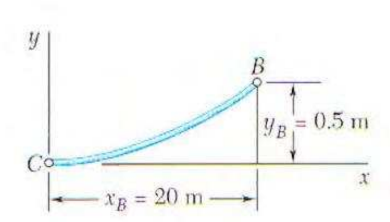
***b*) Pendiente del cable en *B*.** Además, a partir del triángulo de fuerzas se obtiene que

$$\tan\theta = \frac{W}{T_0} = \frac{147.2 \text{ N}}{2\,944 \text{ N}} = 0.05$$

$$\theta = 2.9° \quad ◀$$

***c*) Longitud del cable.** Aplicando la ecuación (7.10) entre C y B, se escribe

$$\begin{aligned} s_B &= x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= (20 \text{ m})\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{0.5 \text{ m}}{20 \text{ m}}\right)^2 + \cdots\right] = 20.00833 \text{ m} \end{aligned}$$



La longitud del cable entre A y B es el doble de este valor,

$$\text{Longitud} = 2s_B = 40.0167 \text{ m} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta sección se tendrán que aplicar las ecuaciones de equilibrio a *cables que se encuentran en un plano vertical*. Se supone que un cable no puede resistir flexión, por tanto, la fuerza de tensión en el cable siempre está dirigida a lo largo del mismo.

A. En la primera parte de esta lección se consideraron cables sujetos a cargas concentradas. Como no se toma en cuenta el peso del cable, éste permanece recto entre las cargas.

La solución de un problema constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre para todo el cable mostrando las cargas y las componentes horizontal y vertical de la reacción en cada uno de los apoyos. Se usa este diagrama de cuerpo libre para escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

2. Se enfrentará una situación en la cual se tienen cuatro componentes desconocidas y sólo se cuenta con tres ecuaciones de equilibrio (véase la figura 7.13). Por tanto, se debe encontrar alguna información adicional, como la *posición* de un punto sobre el cable o la *pendiente* del cable en un punto dado.

3. Después de que se ha identificado el punto del cable donde existe información adicional, se corta el cable en dicho punto y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos secciones del cable que se han obtenido de esta manera.

a) Si se conoce la posición del punto donde se ha cortado el cable, escribiendo $\Sigma M = 0$ con respecto a dicho punto para el nuevo cuerpo libre, se obtendrá la ecuación adicional que se requiere para resolver las cuatro componentes desconocidas de las reacciones [problema resuelto 7.8].

b) Si se conoce la pendiente de la porción del cable que se ha cortado, escribiendo $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para el nuevo cuerpo libre, se obtendrán dos ecuaciones de equilibrio que, junto con las tres ecuaciones originales, pueden resolverse para las cuatro componentes de reacción y para la tensión del cable en el punto donde éste fue cortado.

4. Para encontrar la elevación en un punto dado del cable y la pendiente y la tensión en el mismo una vez que se han encontrado las reacciones en los apoyos, se debe cortar el cable en dicho punto y dibujar un diagrama de cuerpo libre para una de las dos secciones que se han obtenido de esta manera. Si se escribe $\Sigma M = 0$ con respecto al punto en cuestión se obtiene su elevación. Al escribir $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza de tensión, a partir de las cuales se encuentra fácilmente la magnitud y la dirección de esta última.

(*continúa*)

5. Para un cable que soporta sólo cargas verticales, se observa *que la componente horizontal de la fuerza de tensión es la misma en cualquier punto*. Se concluye que, para un cable como éste, *la tensión máxima ocurre en la parte más inclinada del cable.*

B. En la segunda parte de esta sección se consideraron cables que soportan una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal. En este caso la forma del cable es parabólica.

La solución de un problema requerirá de uno o más de los siguientes conceptos:

1. Si se coloca el origen del sistema de coordenadas en el punto más bajo del cable y se dirigen los ejes x y y, respectivamente, hacia la derecha y hacia arriba, se encuentra que *la ecuación de la parábola* es

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

La tensión mínima en el cable ocurre en el origen, donde el cable es horizontal y la tensión máxima ocurre en el apoyo donde la pendiente es máxima.

2. Si los apoyos del cable tienen la misma elevación, la flecha h del cable es la distancia vertical desde el punto más bajo del cable hasta la línea horizontal que une a los dos apoyos. Para resolver un problema que involucra un cable parabólico de este tipo, se debe escribir la ecuación (7.8) para uno de los apoyos; dicha ecuación se puede resolver para una incógnita.

3. Si los apoyos del cable tienen elevaciones distintas, se deberá escribir la ecuación (7.8) para cada uno de los apoyos (véase la figura 7.17).

4. Para encontrar la longitud del cable desde el punto más bajo hasta uno de los apoyos, se puede utilizar la ecuación (7.10). En la mayoría de los casos sólo se deberán calcular los dos primeros términos de la serie.

Problemas

7.93 Dos cargas se sostienen del cable $ABCD$ mostrado en la figura. Si se sabe que $h_B = 1.8$ m, determine *a*) la distancia h_C, *b*) las componentes de la reacción en D y *c*) el valor máximo de la tensión en el cable.

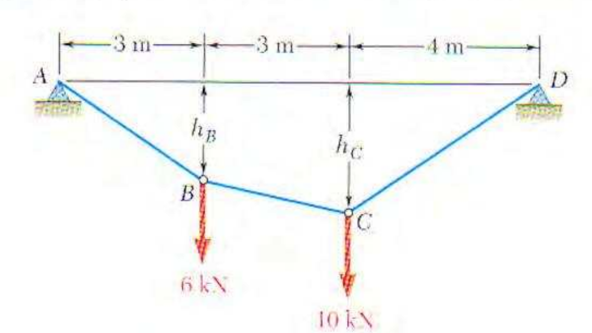


Figura P7.93 y P7.94

7.94 Si el valor máximo de la tensión en el cable $ABCD$ es de 15 kN, determine *a*) la distancia h_B y *b*) la distancia h_C.

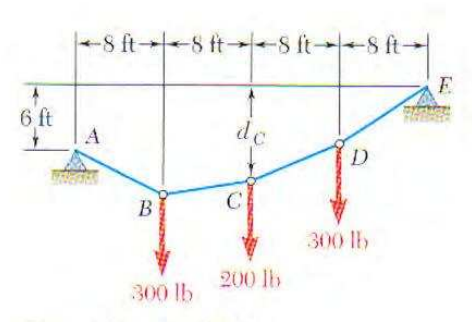


Figura P7.95 y P7.96

7.95 Si $d_C = 8$ ft, determine *a*) la reacción en A y *b*) la reacción en E.

7.96 Si $d_C = 4.5$ ft, determine *a*) la reacción en A y *b*) la reacción en E.

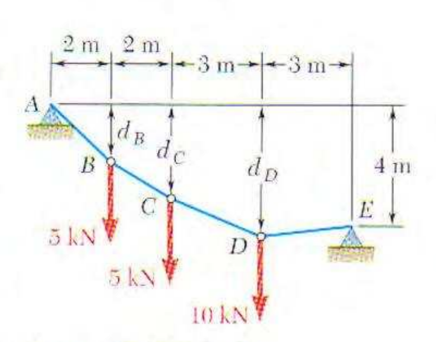


Figura P7.97 y P7.98

7.97 Si $d_C = 3$ m, determine *a*) las distancias d_B y d_D, *b*) la reacción en E.

7.98 Determine *a*) la distancia d_C para la que la porción DE del cable queda en posición horizontal, *b*) las reacciones correspondientes en A y E.

7.99 Si $d_C = 15$ ft, determine *a*) las distancias d_B y d_D, *b*) la tensión máxima en el cable.

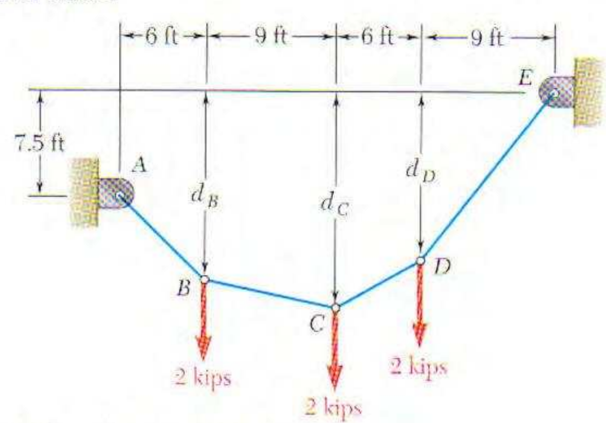


Figura *P7.99* y *P7.100*

7.100 Determine *a*) la distancia d_C para la cual la porción BC del cable queda en posición horizontal, *b*) las componentes correspondientes de la reacción en E.

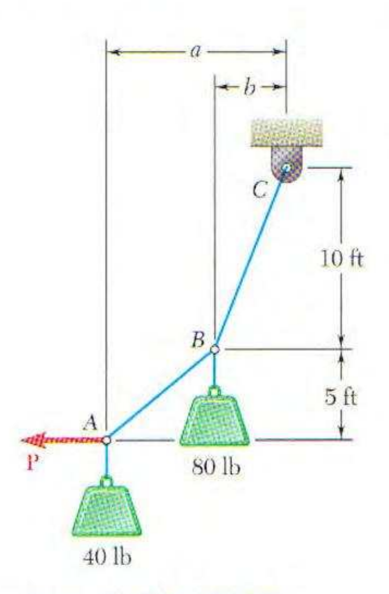


Figura P7.101 y P7.102

7.101 El cable ABC sostiene dos cargas, como se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 4$ ft, determine *a*) la magnitud requerida de la fuerza horizontal **P** y *b*) la distancia correspondiente a.

7.102 El cable ABC sostiene dos cargas, como se muestra en la figura. Determine las distancias a y b cuando se aplica una fuerza horizontal **P** de 60 lb de magnitud en A.

7.103 Si se sabe que $m_B = 70$ kg y $m_C = 25$ kg, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio.

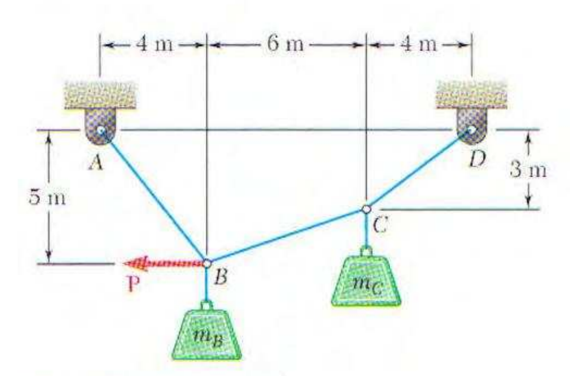


Figura P7.103 y P7.104

7.104 Si se sabe que $m_B = 18$ kg y $m_C = 10$ kg, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio.

7.105 Si $a = 3$ m, determine las magnitudes de **P** y **Q** requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.

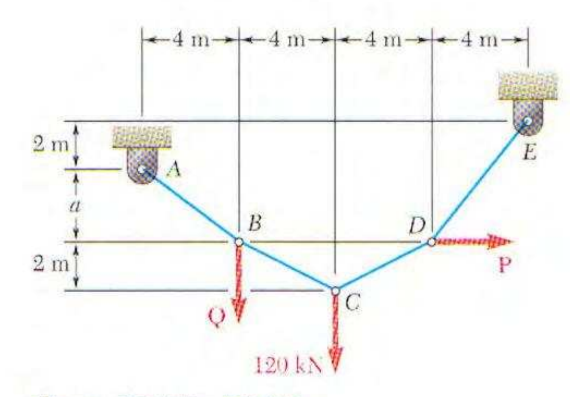


Figura *P7.105* y *P7.106*

7.106 Si $a = 4$ m, determine las magnitudes de **P** y **Q** requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.

7.107 Un alambre que tiene una masa por unidad de longitud de 0.65 kg/m, se suspende de dos soportes a la misma elevación, los cuales están separados por una distancia de 120 m. Si la flecha es de 30 m, determine *a*) la longitud total del alambre, *b*) la tensión máxima en el alambre.

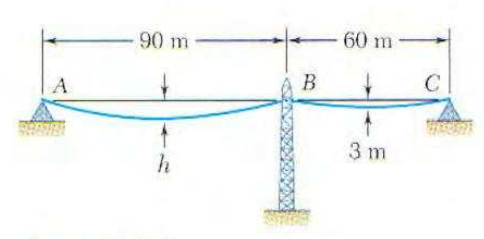


Figura P7.108

7.108 En la figura se muestran dos cables del mismo calibre que se atan a la torre de transmisión en B. Como la torre es delgada, la componente horizontal de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables en B debe ser cero. Si la masa por unidad de longitud de los cables es de 0.4 kg/m, determine *a*) la flecha requerida h y *b*) la tensión máxima en cada cable.

7.109 Cada uno de los cables del puente Golden Gate sostiene una carga $w = 11.1$ kips/ft a lo largo de la horizontal. Si el claro L es de 4 150 ft y la flecha h es de 464 ft, determine *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la longitud de cada uno de éstos.

7.110 El claro central del puente George Washington, tal y como se construyó originalmente, consiste de una vía uniforme suspendida por cuatro cables. La carga uniforme que sostiene cada cable a lo largo de la horizontal era $w = 9.75$ kips/ft. Si el claro L es de 3 500 ft y la flecha h es de 316 ft, determine para la configuración original *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la longitud de cada uno de éstos.

7.111 La masa total del cable AC es de 25 kg. Si se supone que la masa del cable está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, determine la flecha h y la pendiente del cable en A y en C.

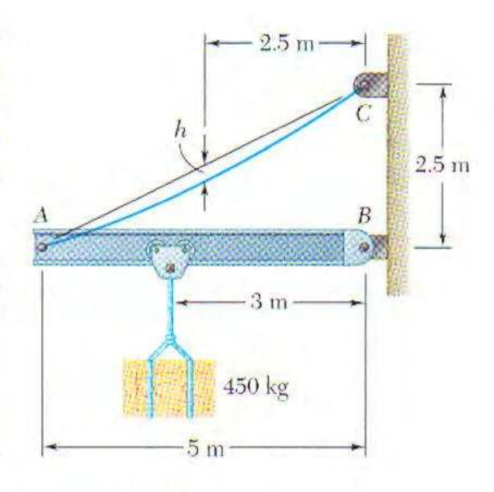


Figura *P7.111*

7.112 Un alambre de 50.5 m de longitud que tiene una masa por unidad de longitud de 0.75 kg/m se usa para cubrir una distancia horizontal de 50 m. Determine *a*) la flecha aproximada del alambre, *b*) la tensión máxima en el alambre. [*Sugerencia:* Use los dos primeros términos de la ecuación (7.10).]

7.113 Un cable de longitud $L + \Delta$ se suspende entre dos puntos que tienen la misma elevación y que están separados por una distancia L. *a*) Si Δ es pequeño comparado con L y el cable es parabólico, determine la flecha aproximada en términos de L y Δ. *b*) Si $L = 100$ ft y $\Delta = 4$ ft determine la flecha aproximada. [*Sugerencia*: Use sólo los primeros dos términos de la ecuación (7.10).]

7.114 El claro central del puente Verrazano-Narrows consiste en dos vías suspendidas por cuatro cables. El diseño del puente toma en cuenta el efecto de cambios extremos de temperatura, los cuales generan que en el centro del claro la flecha varíe desde $h_w = 386$ ft en el invierno hasta $h_s = 394$ ft en el verano. Si el claro tiene $L = 4\,260$ ft, determine el cambio en la longitud de los cables debido a las variaciones extremas de temperatura.

7.115 Cada uno de los cables de los claros laterales del puente Golden Gate sostienen una carga $w = 10.2$ kips/ft a lo largo de la horizontal. Si se sabe que para los claros laterales la distancia máxima vertical h desde cada uno de los cables a la línea recta AB es de 30 ft y que ésta se localiza en el punto medio del claro como se muestra en la figura, determine *a*) la tensión máxima en cada cable y *b*) la pendiente en B.

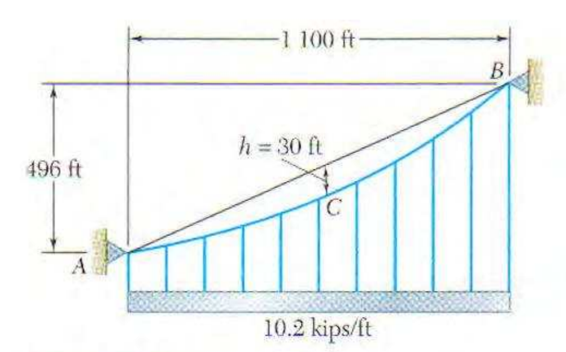


Figura P7.115

7.116 Una tubería de vapor que pesa 45 lb/ft y que pasa entre dos edificios, los cuales están separados por una distancia de 40 ft, se sostiene mediante un sistema de cables como el mostrado en la figura. Si se supone que el peso del cable es equivalente a una carga uniformemente distribuida de 5 lb/ft, determine *a*) la ubicación del punto *C* más bajo del cable y *b*) la tensión máxima en el cable.

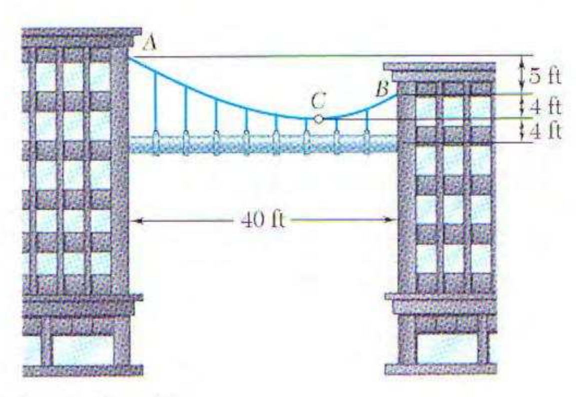


Figura P7.116

7.117 El cable *AB* soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, como se muestra en la figura. Si en *B* el cable forma un ángulo $\theta_B = 35°$ con la horizontal, determine *a*) la tensión máxima en el cable, *b*) la distancia vertical *a* desde *A* hasta el punto más bajo del cable.

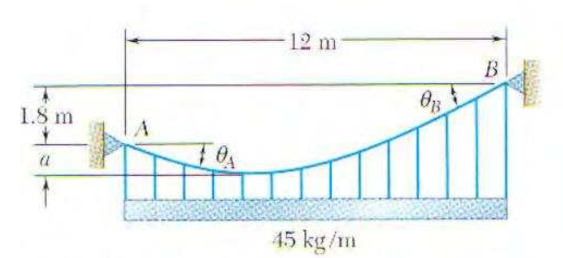


Figura P7.117 y P7.118

7.118 El cable *AB* soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, como se muestra en la figura. Si el punto más bajo del cable está ubicado a una distancia $a = 0.6$ m debajo de *A*, determine *a*) la tensión máxima en el cable, *b*) el ángulo θ_B que forma el cable con la horizontal en *B*.

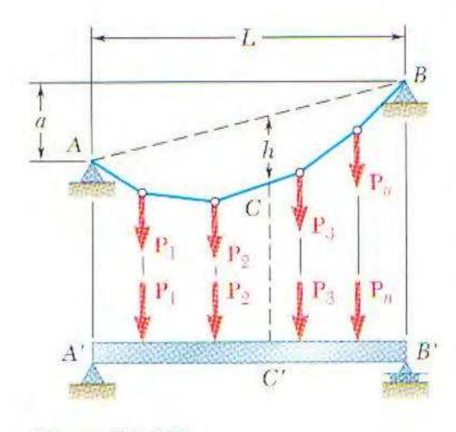
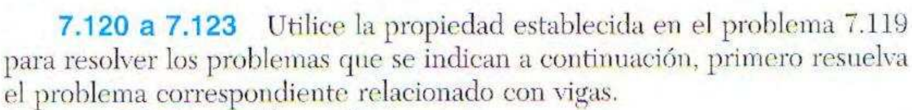


Figura P7.119

***7.119** En la figura se muestra un cable *AB* de claro *L* y una viga simplemente apoyada en *A'B'* que tienen el mismo claro y se someten a las mismas cargas verticales. Demuestre que la magnitud del momento flector en un punto *C'* en la viga es igual al producto T_0h, donde T_0 es la magnitud de la componente horizontal de la fuerza de tensión en el cable y *h* es la distancia vertical entre el punto *C* y una línea recta que une a los puntos de apoyo *A* y *B*.



7.120 a 7.123 Utilice la propiedad establecida en el problema 7.119 para resolver los problemas que se indican a continuación, primero resuelva el problema correspondiente relacionado con vigas.

7.120 Problema 7.94*a*.
7.121 Problema 7.97*a*.
7.122 Problema 7.99*a*.
7.123 Problema 7.100*a*.

***7.124** Muestre que la curva formada por un cable que sostiene una carga distribuida $w(x)$ está definida por la ecuación diferencial $d^2y/dx^2 = w(x)/T_0$, donde T_0 es la tensión en el punto más bajo.

***7.125** Utilice la propiedad indicada en el problema 7.124 para determinar la curva formada por un cable de claro L y flecha h, que tiene una carga distribuida $w = w_0 \cos(\pi x/L)$, donde x se mide a partir del punto medio del claro. También determine el valor máximo y el valor mínimo de la tensión en el cable.

***7.126** Si el peso por unidad de longitud del cable AB es $w_0/\cos^2 \theta$, demuestre que la curva formada por el cable es un arco circular. (*Sugerencia:* Use la propiedad indicada en el problema 7.124.)

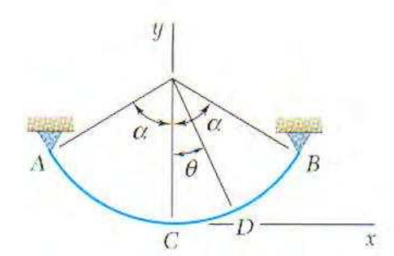


Figura P7.126

*7.10. CATENARIA

Ahora considérese un cable AB que soporta una carga *uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable* (figura 7.18*a*). Los cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso están cargados de esta forma. La carga por unidad de longitud, *medida a lo largo del cable*, se representa con w y se expresa en N/m o en lb/ft. La magnitud W de la carga total soportada por un tramo del cable de longitud s, el cual se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto D, está dada por $W = ws$. Al sustituir este valor de W en la ecuación (7.6), se obtiene la tensión presente en el punto D:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2s^2}$$

Para simplificar los cálculos subsecuentes, se introduce la constante $c = T_0/w$. Entonces se escribe

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = w\sqrt{c^2 + s^2} \tag{7.11}$$



Fotografía 7.4 En esta sección se exponen las fuerzas sobre los apoyos y las fuerzas internas en los cables de las líneas eléctricas que se muestran en la fotografía.

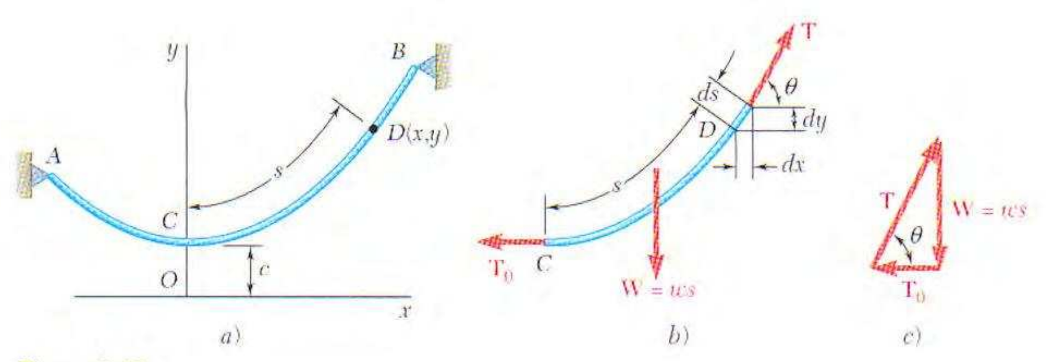
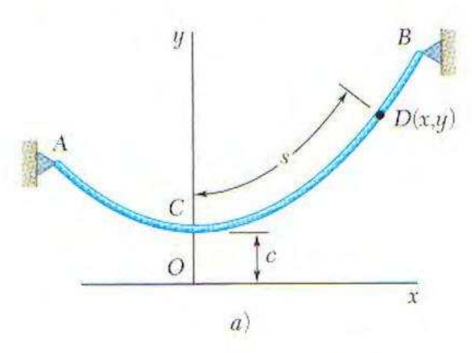
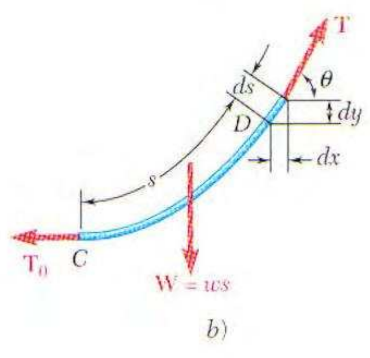


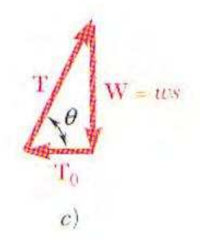
Figura 7.18



a)



b)



c)

Figura 7.18 (repetida)

En la figura 7.18*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre para la porción *CD* del cable. Sin embargo, este diagrama no puede utilizarse para obtener directamente la ecuación de la curva que adopta el cable puesto que no se conoce la distancia horizontal desde *D* hasta la línea de acción de la resultante **W** de la carga. Para obtener dicha ecuación, primero se escribe que la proyección horizontal de un pequeño elemento de cable de longitud ds es $dx = ds \cos \theta$. Se observa a partir de la figura 7.18*c* que $\theta = T_0/T$ y con las ecuaciones (7.11), se escribe

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{wc\, ds}{w\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Si se selecciona el origen O del sistema de coordenadas a una distancia directamente por debajo de C (figura 7.18*a*) y se integra desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$, se obtiene†

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c\left[\operatorname{senh}^{-1} \frac{s}{c}\right]_0^s = c \operatorname{senh}^{-1} \frac{s}{c}$$

Esta ecuación, que relaciona la longitud s de la porción CD del cable y la distancia horizontal x, se puede escribir de la siguiente forma:

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \tag{7.15}$$

Ahora se puede obtener la relación entre las coordenadas x y y escribiendo $dy = dx \tan \theta$. Observe que a partir de la figura 7.18*c* que $\tan\ \theta = W/T_0$ y con las ecuaciones (7.11) y (7.15), se escribe

$$dy = dx \tan \theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{s}{c} dx = \operatorname{senh} \frac{x}{c} dx$$

Si se integran desde $C(0, c)$ hasta $D(x, y)$ y con las ecuaciones (7.12) y (7.13), se obtiene la siguiente expresión

†Esta integral se puede encontrar en todas las tablas de integrales estándar. La función

$$z = \operatorname{senh}^{-1} u$$

(que se lee "arco seno hiperbólico de u") es el *inverso* de la función $u = \operatorname{senh} z$ (que se lee "seno hiperbólico de z"). Esta función y la función $v = \cosh z$ (que se lee "coseno hiperbólico de z") están definidas de la siguiente forma:

$$u = \operatorname{senh} z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \qquad v = \cosh z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

Los valores numéricos de las funciones senh z y cosh z se encuentran en las *tablas de funciones hiperbólicas*. Además, estas funciones también se pueden calcular en la mayoría de las calculadoras, ya sea directamente o a partir de las definiciones que se acaban de presentar. Se recomienda al estudiante consultar cualquier libro de cálculo para una descripción completa de las propiedades de estas funciones. En esta sección sólo se utilizan las siguientes propiedades, las cuales se pueden derivar directamente a partir de las definiciones que se presentaron con anterioridad:

$$\frac{d \operatorname{senh} z}{dz} = \cosh z \qquad \frac{d \cosh z}{dz} = \operatorname{senh} z \tag{7.12}$$

$$\operatorname{senh} 0 = 0 \qquad \cosh 0 = 1 \tag{7.13}$$

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 \tag{7.14}$$

$$y - c = \int_0^x \operatorname{senh} \frac{x}{c}\, dx = c\left[\cosh \frac{x}{c}\right]_0^x = c\left(\cosh \frac{x}{c} - 1\right)$$

$$y - c = c \cosh \frac{x}{c} - c$$

la cual se reduce a

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

Ésta es la ecuación de una *catenaria* con eje vertical. La ordenada c del punto más bajo C recibe el nombre de *parámetro* de la catenaria. Elevando al cuadrado ambos lados de las ecuaciones (7.15) y (7.16), restándolas y tomando en cuenta la ecuación (7.14), se obtiene la siguiente relación entre y y s:

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

Al resolver la ecuación (7.17) para s^2 y llevando este resultado a la última de las relaciones (7.11), se pueden escribir dichas relaciones de la siguiente forma:

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

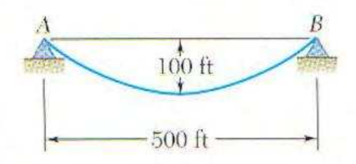
La última relación indica que la tensión en cualquier punto D del cable es proporcional a la distancia vertical desde D hasta la línea horizontal que representa al eje x.

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia L entre los apoyos recibe el nombre de *claro* del cable y la distancia vertical h desde los apoyos hasta el punto más bajo C se conoce como la *flecha* del cable. Estas definiciones son las mismas que las proporcionadas para el caso de cables parabólicos, pero se debe señalar que, debido a la forma en que se seleccionaron los ejes coordenados, ahora la flecha h está dada por

$$h = y_A - c \tag{7.19}$$

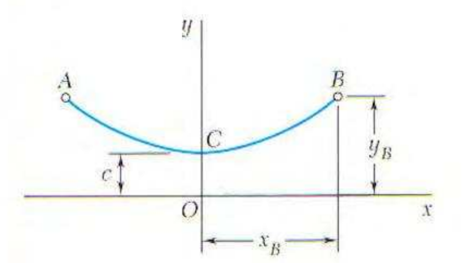
También se debe señalar que ciertos problemas sobre catenarias involucran ecuaciones trascendentales, las cuales deben resolverse por medio de aproximaciones sucesivas (véase problema resuelto 7.10). Sin embargo, cuando el cable está bastante tenso, se puede suponer que la carga está uniformemente distribuida *a lo largo de la horizontal* y la catenaria puede reemplazarse por una parábola. Esto simplifica en gran medida la solución del problema y el error que se introduce es pequeño.

Cuando los apoyos A y B tienen distintas elevaciones, no se conoce la posición del punto más bajo del cable. Entonces, el problema puede resolverse en forma similar a la señalada para cables parabólicos, expresando que el cable debe pasar a través de los apoyos, que $x_B - x_A = L$ y que $y_B - y_A = d$, donde L y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos.



PROBLEMA RESUELTO 7.10

Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se suspende entre dos puntos A y B, como se muestra en la figura. Determine *a*) los valores de la tensión máxima y mínima en el cable y *b*) la longitud del cable.



SOLUCIÓN

Ecuación del cable. El origen de las coodenadas se coloca a una distancia c por debajo del punto más bajo del cable. De esta forma, la ecuación del cable está dada por la ecuación (7.16),

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

Las coordenadas del punto B son las siguientes

$$x_B = 250 \text{ ft} \qquad y_B = 100 + c$$

Si se sustituyen estas coordenadas en la ecuación del cable, se obtiene

$$100 + c = c \cosh \frac{250}{c}$$

$$\frac{100}{c} + 1 = \cosh \frac{250}{c}$$

El valor de c se determina suponiendo valores de prueba sucesivos, como se muestra en la siguiente tabla:

c	$\frac{250}{c}$	$\frac{100}{c}$	$\frac{100}{c} + 1$	$\cosh \frac{250}{c}$
300	0.833	0.333	1.333	1.367
350	0.714	0.286	1.286	1.266
330	0.758	0.303	1.303	1.301
328	0.762	0.305	1.305	1.305

Tomando $c = 328$, se tiene que

$$y_B = 100 + c = 428 \text{ ft}$$

***a*) Valores máximo y mínimo de la tensión.** Con las ecuaciones (7.18), se obtiene

$$T_{\text{mín}} = T_0 = wc = (3 \text{ lb/ft})(328 \text{ ft}) \qquad T_{\text{mín}} = 984 \text{ lb} \blacktriangleleft$$
$$T_{\text{máx}} = T_B = wy_B = (3 \text{ lb/ft})(428 \text{ ft}) \qquad T_{\text{máx}} = 1\,284 \text{ lb} \blacktriangleleft$$

***b*) Longitud del cable.** La mitad de la longitud del cable se encuentra al resolver la ecuación (7.17):

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \qquad s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (428)^2 - (328)^2 \qquad s_{CB} = 275 \text{ ft}$$

Por tanto, la longitud total del cable está dada por

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2(275 \text{ ft}) \qquad s_{AB} = 550 \text{ ft} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la última sección de este capítulo se aprendió a resolver los problemas que involucran a un *cable que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo*. La forma que adopta el cable es la de una catenaria y está definida por la ecuación:

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

1. *Es necesario recordar que el origen de las coordenadas para una catenaria está localizado a una distancia c directamente por debajo del punto más bajo de la catenaria.* La longitud del cable desde el origen hasta cualquier punto se expresa como

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \tag{7.15}$$

2. *Primero se deben identificar todas las cantidades conocidas y desconocidas.* Entonces se considera cada una de las ecuaciones que fueron presentadas en la sección [ecuaciones (7.15 a 7.19)] y se resuelve una ecuación que contiene sólo una incógnita. Se sustituye el valor encontrado de esta forma en otra ecuación y se resuelve esta última para otra incógnita.

3. *Si se proporciona la flecha h,* se utiliza la ecuación (7.19) para reemplazar y por $h + c$ en la ecuación (7.16) si x es conocida [problema resuelto 7.10], o en la ecuación (7.17) si se conoce s, y se resuelve la ecuación obtenida para la constante c.

4. *Muchos de los problemas que se encontrarán involucran una solución por medio de prueba y error* de una ecuación que involucra a un seno o a un coseno hiperbólicos. El trabajo se puede simplificar llevando un registro de los cálculos realizados en una tabla, como se hizo en el problema resuelto 7.10, o aplicando un enfoque de métodos numéricos mediante el uso de una computadora o calculadora.



Problemas

7.127 Un cable de 30 m cuelga entre dos edificios, como se muestra en la figura. Se sabe que la tensión máxima es de 500 N y que el punto más bajo del cable está a 4 m sobre el suelo. Determine *a*) la distancia horizontal entre los edificios, *b*) la masa total del cable.

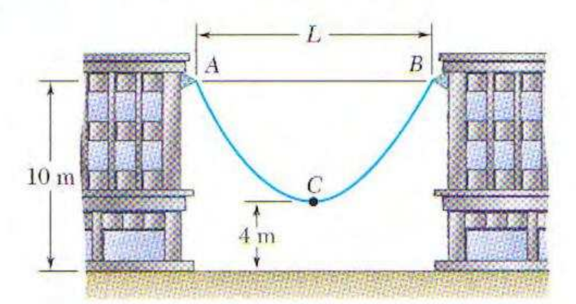


Figura P7.127

7.128 Una cinta de medición de acero tiene 200 ft de longitud y pesa 4 lb. Si la cinta se tiende entre dos puntos que tienen la misma altura y se estira hasta que la tensión en cada extremo es de 16 lb, determine la distancia horizontal entre los extremos de la cinta. No tome en cuenta la elongación de la cinta debida a la tensión.

7.129 Un cable de tranvía aéreo cuya longitud es de 200 m y que tiene una masa por unidad de longitud de 3.5 kg/m está suspendido entre dos puntos a la misma altura. Si se sabe que la flecha es de 50 m, determine *a*) la distancia horizontal entre los soportes, *b*) la tensión máxima en el cable.

7.130 Un cable de transmisión eléctrica de 400 ft de longitud y que pesa 2.5 lb/ft se suspende entre dos puntos que tienen la misma altura. Si se sabe que la flecha es de 100 ft, determine la distancia horizontal entre los apoyos, así como la tensión máxima en el cable.

7.131 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en *A* y a un collarín en *B*. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la fuerza **P** para la cual $h = 8$ m y *b*) el claro correspondiente *L*.

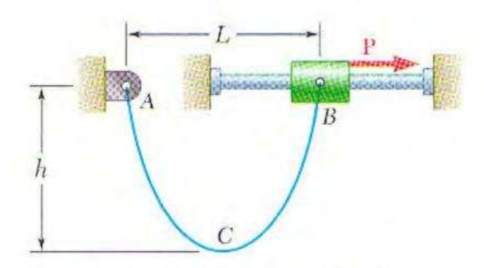


Figura *P7.131*, *P7.132* y P7.133

7.132 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en *A* y a un collarín en *B*. Si se sabe que la magnitud de la fuerza horizontal aplicada al collarín es $P = 20$ N, determine *a*) la flecha *h* y *b*) el claro *L*.

7.133 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en *A* y a un collarín en *B*. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la flecha *h* para la que $L = 15$ m y *b*) la fuerza **P** correspondiente.

7.134 Determine la flecha de una cadena de 30 ft que se encuentra unida a dos puntos con la misma elevación y que están separados por una distancia de 20 ft.

7.135 Un alambre de 90 m de longitud se suspende entre dos puntos que están a la misma altura separados por una distancia de 60 m. Si se sabe que la tensión máxima es de 300 N, determine *a*) la flecha del alambre y *b*) la masa total del mismo.

7.136 Un contrapeso D está unido a un cable que pasa a través de una pequeña polea en A y después se une a un apoyo en B. Si se sabe que L = 45 ft y h = 15 ft, determine *a*) la longitud del cable de A a B, *b*) el peso por unidad de longitud del cable. No tome en cuenta el peso del cable de A a D.

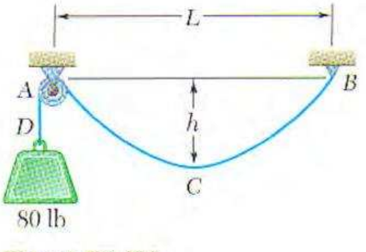


Figura P7.136

7.137 Una cuerda uniforme de 50 in. de longitud pasa por una pequeña polea en B y se encuentra unida a un apoyo fijo en A. Si L = 20 in. y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine el menor de los dos valores de h para los cuales la cuerda está en equilibrio.

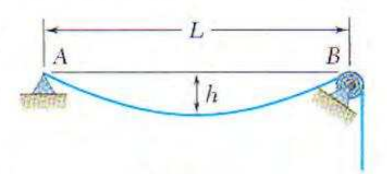


Figura *P7.137*

7.138 Un cable que pesa 2 lb/ft se suspende entre dos puntos que están a la misma altura separados por una distancia de 160 ft. Determine la flecha mínima permisible para el cable si la tensión máxima no debe exceder 400 lb.

7.139 El motor M mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando h = 5 m.

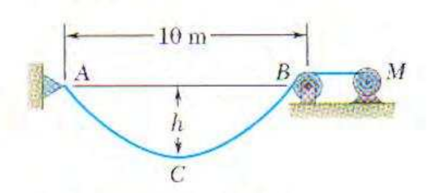


Figura P7.139 y P7.140

7.140 El motor M mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando h = 3 m.

7.141 Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se mantiene en la posición mostrada mediante una fuerza horizontal **P** aplicada en B. Si P = 180 lb y θ_A = 60°, determine *a*) la ubicación del punto B y *b*) la longitud del cable.

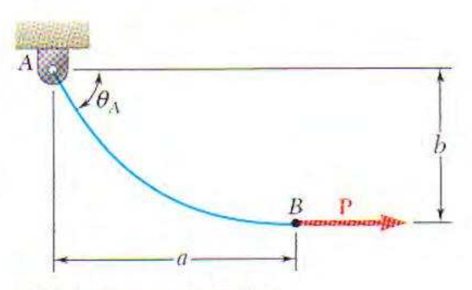


Figura P7.141 y P7.142

7.142 Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se mantiene en la posición mostrada mediante una fuerza horizontal **P** aplicada en B. Si P = 150 lb y θ_A = 60°, determine *a*) la ubicación del punto B y *b*) la longitud del cable.

7.143 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto B un cable muy largo $ABDE$ descansa sobre una superficie rugosa horizontal. Si se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m, determine la fuerza **F** cuando a = 3.6 m.

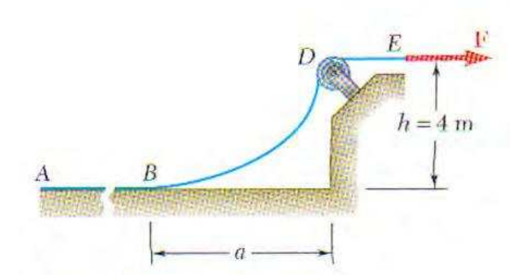


Figura P7.143 y P7.144

7.144 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto B un cable muy largo $ABDE$ descansa sobre una superficie rugosa horizontal. Si se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m, determine la fuerza **F** cuando a = 6 m.

7.145 El cable ACB que se muestra en la figura tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m. Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia a = 0.6 m por debajo del apoyo A, determine a) la ubicación del punto más bajo C y b) la tensión máxima en el cable.

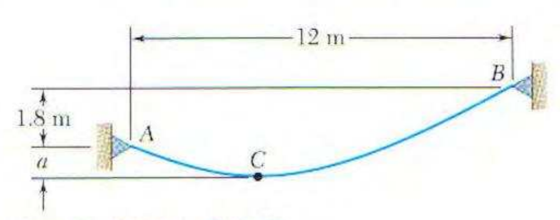


Figura *P7.145* y *P7.146*

7.146 El cable ACB que se muestra en la figura tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m. Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia a = 2 m por debajo del apoyo A, determine a) la ubicación del punto más bajo C y b) la tensión máxima en el cable.

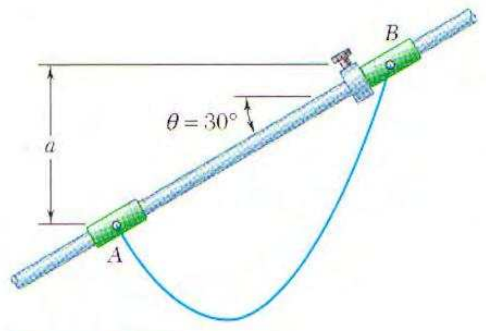
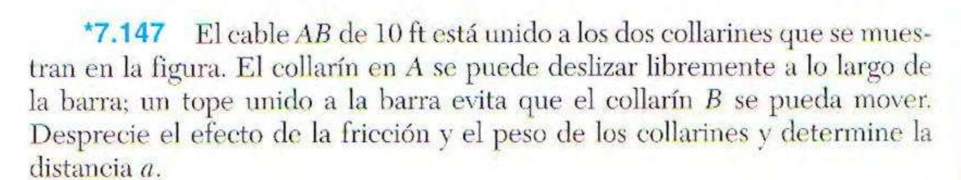


Figura P7.147

***7.147** El cable AB de 10 ft está unido a los dos collarines que se muestran en la figura. El collarín en A se puede deslizar libremente a lo largo de la barra; un tope unido a la barra evita que el collarín B se pueda mover. Desprecie el efecto de la fricción y el peso de los collarines y determine la distancia a.



***7.148** Retome el problema 7.147, y ahora suponga que el ángulo θ formado por la barra y la horizontal es de 45°.

7.149 Si se denota con θ el ángulo formado por un cable uniforme y la horizontal, demuestre que en cualquier punto a) $s = c \tan \theta$ y b) $y = c \sec \theta$.

***7.150** a) Determine el claro horizontal máximo permisible de un cable uniforme que tiene un peso w por unidad de longitud, si la tensión en éste no debe exceder de un valor dado T_m. b) Utilice el resultado del inciso a) para determinar el claro máximo de un alambre de acero para el cual w = 0.25 lb/ft y T_m = 8 000 lb.

***7.151** Un cable que tiene una masa por unidad de longitud de 3 kg/m, se sostiene en la forma mostrada en la figura. Si se sabe que el claro L es de 6 m, determine los *dos* valores de la flecha h para los cuales la tensión máxima es de 350 N.

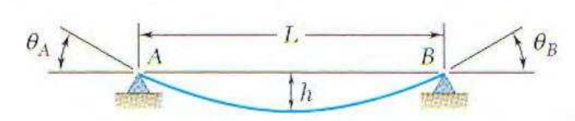


Figura P7.151, P7.152 y P7.153

***7.152** Para el cable mostrado en la figura, determine la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima en el cable AB es igual al peso total del mismo.

***7.153** En la figura se muestra un cable de peso w por unidad de longitud que se sostiene entre dos puntos que tienen la misma altura y los cuales están separados por una distancia L. Determine a) la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima sea lo más pequeña posible y b) los valores correspondientes de θ_B y T_m.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 7

En este capítulo se aprendió a determinar las fuerzas internas que mantienen unidas a las diversas partes de un elemento dado en una estructura.

Fuerzas en elementos rectos sujetos a dos fuerzas

Al considerar primero un *elemento recto sujeto a dos fuerzas AB* [sección 7.2], se recuerda que un elemento de este tipo está sometido en A y B a fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que están dirigidas a lo largo de AB (figura 7.19*a*). Si se corta el elemento AB en C y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AC, se concluye que las fuerzas internas que existían en el elemento AB en C son equivalentes a una *fuerza axial* $-\mathbf{F}$ igual y opuesta a $\mathbf{F}$ (figura 7.19*b*). Se observa que en el caso de un elemento sujeto a dos fuerzas que no es recto, las fuerzas internas se reducen a un sistema fuerza-par y no a una sola fuerza.

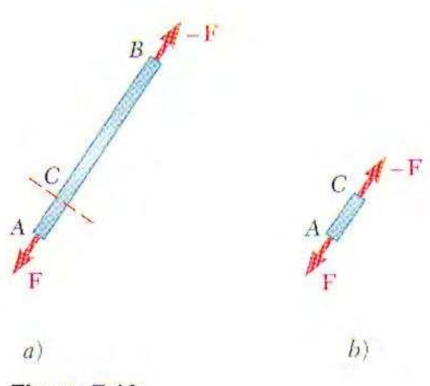


Figura 7.19

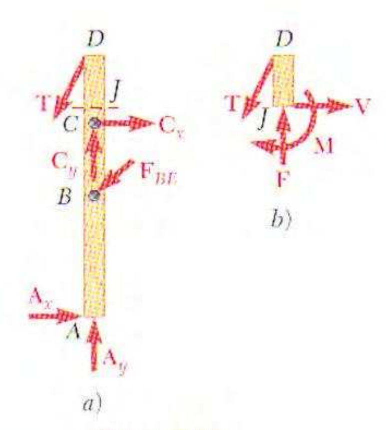


Figura 7.20

Fuerzas en elementos sujetos a fuerzas múltiples

Si se considera después un *elemento sujeto a fuerzas múltiples AD* (figura 7.20*a*), se corta en J y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte JD, se concluye que las fuerzas internas en J son equivalentes a un sistema fuerza-par que consta de la *fuerza axial*, $\mathbf{F}$, la *fuerza cortante* $\mathbf{V}$ y un par $\mathbf{M}$ (figura 7.20*b*). La magnitud de la fuerza cortante mide la *fuerza cortante* en el punto J y se hace referencia al momento del par como el *momento flector* en J. Puesto que, si se hubiera considerado el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la parte AJ, se hubiera obtenido un sistema fuerza-par igual y opuesto es necesario especificar qué porción del elemento AD se utilizó cuando se registraron las respuestas [problema resuelto 7.1].

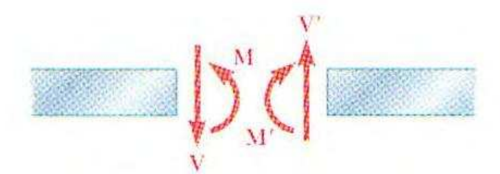
Fuerzas en vigas

La mayor parte del capítulo se dedicó al análisis de las fuerzas internas en dos tipos importantes de estructuras de ingeniería: las *vigas* y los *cables*. Las *vigas* comúnmente son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas que se aplican en varios puntos a lo largo del elemento. En general, las cargas son perpendiculares al eje de la viga y sólo producen *corte* y *flexión* en ésta. Las cargas pueden estar *concentradas* en puntos específicos o *dis-*

tribuidas a lo largo de toda la longitud o a lo largo de una porción de la viga. La viga misma puede estar apoyada de varias formas; puesto que en este libro sólo se consideran vigas estáticamente determinadas, el análisis se limitó a *vigas simplemente apoyadas*, *vigas con volados* y *vigas en voladizo* [sección 7.3].

Fuerza cortante y momento flector en una viga

Para obtener la *fuerza cortante* V y el *momento flector* M en un punto dado C de una viga, primero se determinan las reacciones en los apoyos considerando toda la viga como un cuerpo libre. Entonces, se corta a la viga en C y se usa el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos partes obtenidas de esta manera para determinar los valores de V y M. Para evitar cualquier confusión en relación con el sentido de la fuerza cortante **V** y el par **M** (los cuales actúan en direcciones opuestas en las dos porciones de la viga), se adoptó la convención de signos que se ilustra en la figura 7.21 [sección 7.4]. Una vez que se han determinado los valores de la fuerza cortante y el momento flector en unos cuantos puntos seleccionados de la viga, usualmente es posible dibujar un *diagrama de fuerza cortante* y un *diagrama de momento flector* que representan, respectivamente, la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga [sección 7.5]. Cuando una viga sólo está sometida a cargas concentradas, la fuerza cortante tiene un valor constante entre las cargas y el momento flector varía linealmente entre éstas [problema resuelto 7.2]. Por otra parte, cuando una viga está sometida a cargas distribuidas, la fuerza cortante y el momento flector varían en forma diferente [problema resuelto 7.3].



Fuerzas internas en la sección
(fuerza cortante y momento flector positivo)

Figura 7.21

Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector

La construcción de los diagramas de fuerza cortante y momento flector se facilita si se toman en consideración las siguientes relaciones. Representando con w la carga distribuida por unidad de longitud (la cual se supone positiva si está dirigida hacia abajo), se tiene que [sección 7.5]:

$$\frac{dV}{dx} = -w \tag{7.1}$$

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{7.3}$$

o, después de integrar las ecuaciones anteriores,

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre } C \text{ y } D) \tag{7.2'}$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre } C \text{ y } D \tag{7.4'}$$

La ecuación (7.2′) hace que sea posible dibujar el diagrama de fuerza cortante de una viga a partir de la curva que representa a la carga distribuida que actúa sobre dicha viga y del valor de V en un extremo de la misma. En forma análoga, la ecuación (7.4′) hace que sea posible dibujar el diagrama de momento flector a partir del diagrama de fuerza cortante y del valor de M en un extremo de la viga. Sin embargo, las cargas concentradas introducen discontinuidades en el diagrama de fuerza cortante y los pares concentrados implican discontinuidades en el diagrama de momento flector, ninguno de éstos están tomados en consideración en las ecuaciones (7.2′) y (7.4′) [problemas resueltos 7.4 y 7.7]. Por último, a partir de la ecuación (7.3) se observa que los puntos de la viga donde el momento flector es máximo o mínimo son también los puntos donde la fuerza cortante es igual a cero [problema resuelto 7.5].

La segunda mitad del capítulo estuvo dedicada al análisis de *cables flexibles*. Primero se consideró un cable con un peso despreciable que soporta *cargas concentradas* [sección 7.7]. Al suponer todo el cable AB como un cuerpo libre (figura 7.22) se observó que las tres ecuaciones de equilibrio que están disponibles no son suficientes para determinar las cuatro incógnitas que representan a las reacciones en los apoyos A y B. Sin embargo, si se conocen las coordenadas de un punto D del cable, se puede obtener una ecuación adicional considerando el diagrama de cuerpo libre para la porción AD o DB del cable. Una vez que se han determinado las reacciones en los apoyos, se puede encontrar la elevación de cualquier punto del cable y la tensión en cualquier porción del mismo a partir del diagrama de cuerpo libre apropiado [problema resuelto 7.8]. Se señaló que la componente horizontal de la fuerza $\mathbf{T}$ que representa a la tensión es la misma en cualquier punto del cable.

Cables con cargas concentradas

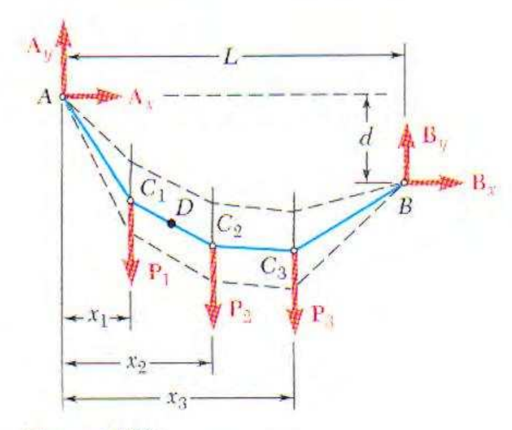


Figura 7.22

Después se consideraron cables que soportan *cargas distribuidas* [sección 7.8]. Utilizando como cuerpo libre un tramo del cable CD que se extiende desde el punto más bajo C hasta un punto arbitrario D del cable (figura 7.23), se observó que la componente horizontal de la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ en D es constante e igual a la tensión T_0 en C, mientras que su componente vertical es igual al peso W de la porción de cable CD. La magnitud y la dirección de $\mathbf{T}$ se obtuvieron a partir del triángulo de fuerzas:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan\theta = \frac{W}{T_0} \tag{7.6}$$

Cables con cargas distribuidas

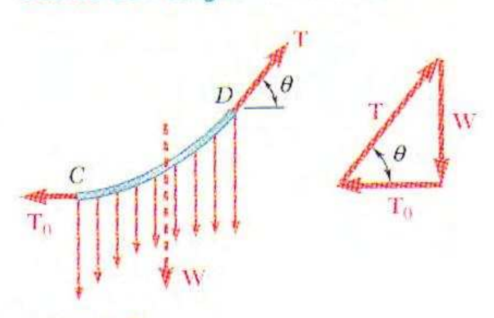


Figura 7.23

En el caso de una carga *uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal* —como en el caso de un puente colgante (figura 7.24)— la carga soportada por la porción CD está dada por $W = wx$, donde w es la carga constante por unidad de longitud horizontal [sección 7.9]. También se encontró que la forma de la curva adoptada por el cable es una *parábola* cuya ecuación está dada por

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \tag{7.8}$$

y que la longitud del cable se puede encontrar utilizando la expansión en series dada en la ecuación (7.10) [problema resuelto 7.9].

Cable parabólico

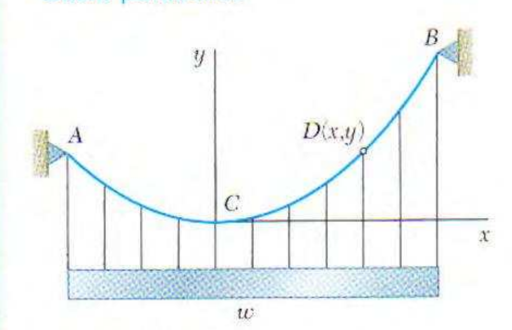


Figura 7.24

En el caso de *una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable* —por ejemplo, un cable colgando bajo su propio peso (figura 7.25)— la carga soportada por la porción CD está dada por $W = ws$, donde s es la longitud medida a lo largo del cable y w es la carga constante por unidad de longitud [sección 7.10]. Se seleccionó el origen O de los ejes coordenados a una distancia $c = T_0/w$ por debajo de C, y se derivaron las relaciones

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \tag{7.15}$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \tag{7.16}$$

$$y^2 - s^2 = c^2 \tag{7.17}$$

$$T_0 = wc \qquad W = ws \qquad T = wy \tag{7.18}$$

las cuales pueden emplearse para resolver problemas que involucran cables que cuelgan bajo la acción de su propio peso [problema resuelto 7.10]. La ecuación (7.16) define la forma adoptada por el cable y es la ecuación de una *catenaria*.

Catenaria

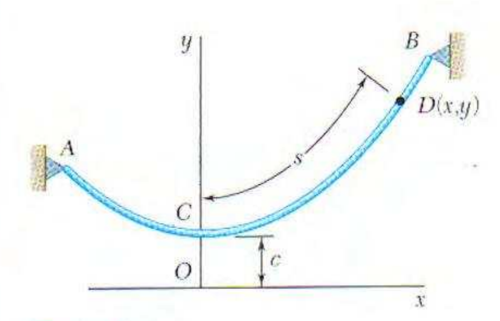


Figura 7.25

Problemas de repaso

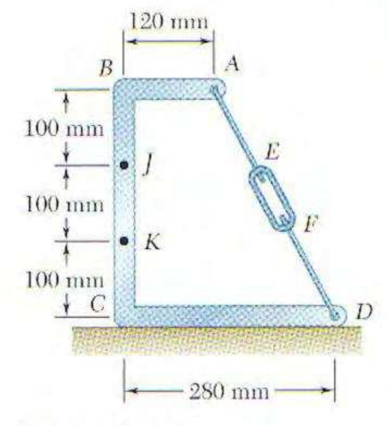


Figura P7.154

7.154 Se ha determinado experimentalmente que el momento flector en el punto K del armazón mostrado es de 300 N · m. Determine *a*) la tensión en las barras AE y FD, *b*) las fuerzas internas correspondientes en el punto J.

7.155 Si se sabe que el radio de cada polea es de 200 mm y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto J del armazón que se muestra en la figura.

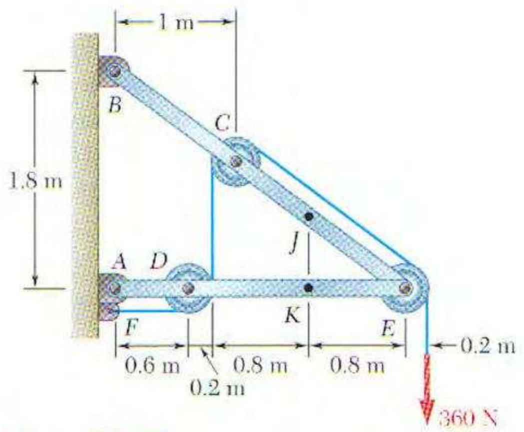


Figura P7.155

7.156 Un canal de acero que tiene un peso por unidad de longitud w = 20 lb/ft forma un lado del tiro de ciertas escaleras. Para cada una de las condiciones de apoyo mostradas, determine las fuerzas internas en el centro C del canal debidas a su propio peso.

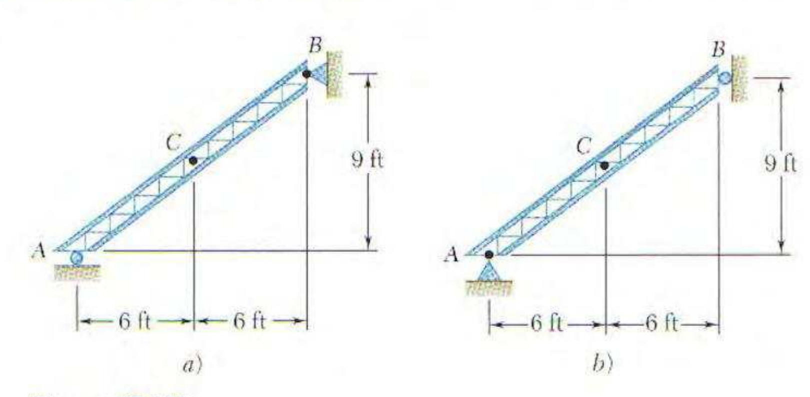


Figura P7.156

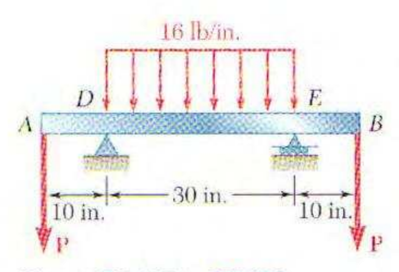


Figura P7.157 y *P7.158*

7.157 Para la viga que se muestra en la figura, determine *a*) la magnitud de P de las dos cargas concentradas para las cuales el valor absoluto máximo del momento flector es lo más pequeño posible y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{máx}$.

7.158 Si se sabe que la magnitud de cada carga concentrada **P** es de 75 lb, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.159 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y *b*) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

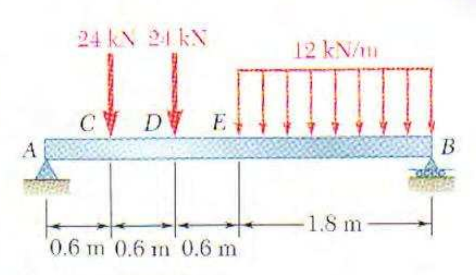


Figura P7.159

7.160 Para la viga mostrada en la figura, dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y determine el valor absoluto máximo del momento flector, sabiendo que *a*) $P = 6$ kips y *b*) $P = 3$ kips.

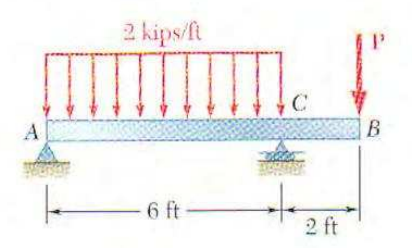


Figura P7.160

7.161 Para la viga y las cargas mostradas en la figura *a*) escriba las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y del momento flector, *b*) determine el momento flector máximo.

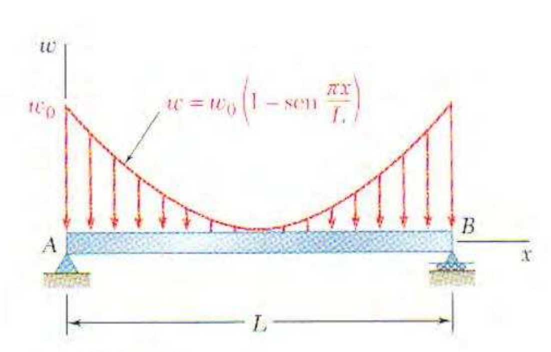


Figura *P7.161*

7.162 Una tubería de petróleo está sostenida cada 6 ft mediante suspensores verticales fijos a un cable como se muestra en la figura. Debido al peso combinado de la tubería y su contenido, cada suspensor experimenta una tensión de 400 lb. Si se sabe que $d_C = 12$ ft, determine *a*) la tensión máxima en el cable y *b*) la distancia d_D.

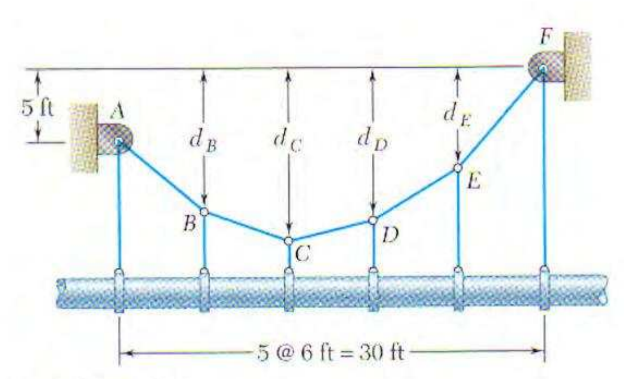


Figura P7.162

7.163 Retome el problema 7.162, y ahora suponga que $d_C = 9$ ft.

7.164 Un cable de transmisión con una masa por unidad de longitud de 0.8 kg/m, está atado entre dos aisladores que tienen la misma elevación y que se encuentran separados por una distancia de 75 m. Si la flecha del cable es de 2 m, determine *a*) la tensión máxima en el cable y *b*) la longitud del cable.

7.165 El cable *ACB* soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, como se muestra en la figura. El punto más bajo *C* se localiza a 9 m a la derecha de *A*. Determine *a*) la distancia vertical *a*, *b*) la longitud del cable, *c*) las componentes de la reacción en *A*.

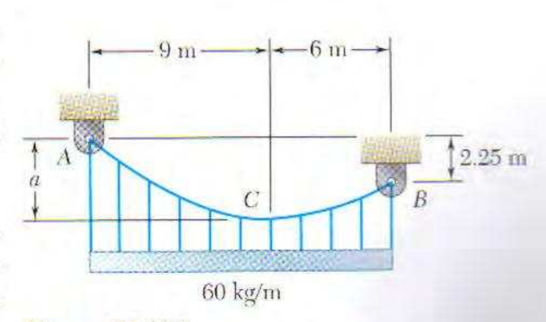


Figura *P7.165*

Problemas de computadora

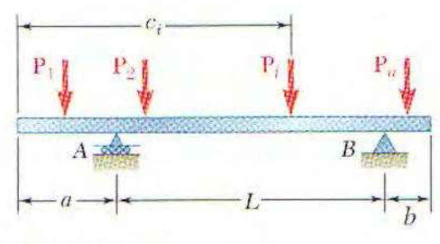


Figura P7.C1

7.C1 Se va a diseñar una viga saliente para soportar varias cargas concentradas. Uno de los primeros pasos en el diseño de la viga es determinar los valores del momento flector que pueden esperarse en los apoyos A y B y bajo cada una de las cargas concentradas. Use software a fin de calcular dichos valores para la viga y las cargas arbitrarias que se muestran en la figura. Use el software para la viga y las cargas del *a*) problema 7.36, *b*) problema 7.37, *c*) problema 7.38.

7.C2 Se van a aplicar varias cargas concentradas y una carga uniformemente distribuida sobre la viga simplemente apoyada AB. Como primer paso del diseño de la viga, use software a fin de calcular la fuerza cortante y el momento flector en la viga para las cargas arbitrarias que se muestran en la figura, utilice incrementos dados Δx. Use este software para la viga del *a*) problema 7.39 con $\Delta x = 0.25$ m; *b*) problema 7.41 con $\Delta x = 0.5$ ft; *c*) problema 7.42 con $\Delta x = 0.5$ ft.

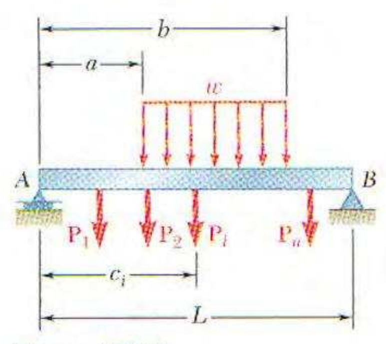


Figura P7.C2

7.C3 En la figura se muestra una viga AB articulada en B y sostenida mediante un rodillo en D, la cual se debe diseñar con eficiencia máxima para soportar una carga distribuida uniformemente a partir de su extremo A hasta su punto central C. Como parte del proceso de diseño, use software para determinar la distancia a desde el extremo A hasta el punto D que es donde el rodillo debe colocarse para minimizar en la viga el valor absoluto del momento flector M. (*Nota*: Un análisis preliminar breve mostrará que el rodillo debe colocarse debajo de la carga para que el valor máximo negativo de M ocurra en D, mientras que su valor máximo positivo ocurra en algún lugar entre D y C. También vea la sugerencia para el problema 7.55.)

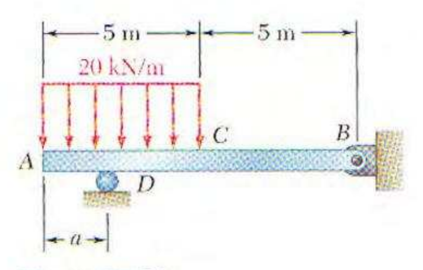


Figura P7.C3

7.C4 El piso de un puente consistirá en tablones angostos apoyados sobre dos soportes simples de viga, uno de los cuales se muestra en la figura. Como parte del diseño del puente es deseable simular el efecto que tendrá sobre la viga un camión de 3 000 lb en movimiento. La distancia entre los ejes del camión es de 6 ft, y se supone que el peso del mismo se distribuye de igual manera sobre sus cuatro ruedas. *a*) Utilice software para calcular la magnitud y ubicación del momento flector máximo en la viga como una función de x para -3 ft a 10 ft, utilizando incrementos de 0.5 ft. *b*) Utilice incrementos más pequeños si es necesario y determine el valor máximo del momento flector que ocurre en la viga cuando el camión se mueve sobre el puente y determine el valor correspondiente de x.

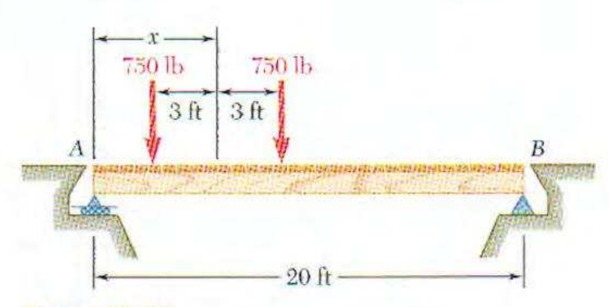


Figura P7.C4

***7.C5** Use software a fin de graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga del problema 7.C1. Utilice este software y un incremento $\Delta x \leq L/100$ a fin de graficar los diagramas V y M para la viga y las cargas del *a*) problema 7.36, *b*) problema 7.37, *c*) problema 7.38.

***7.C6** Use software a fin de graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga del problema 7.C2. Utilice este software y un incremento $\Delta x \leq L/100$ a fin de graficar los diagramas V y M para la viga y las cargas del *a*) problema 7.39, *b*) problema 7.41, *c*) problema 7.42.

7.C7 Use software en el proceso de diseño de los soportes de un cable, para calcular las componentes horizontal y vertical de la reacción en el soporte A_n con base en los valores de las cargas $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, las distancias horizontales $d_1, d_2, \ldots, d_n$ y las dos distancias verticales h_0 y h_k. Utilice este software para resolver los problemas 7.95*b*, 7.96*b* y 7.97*b*.

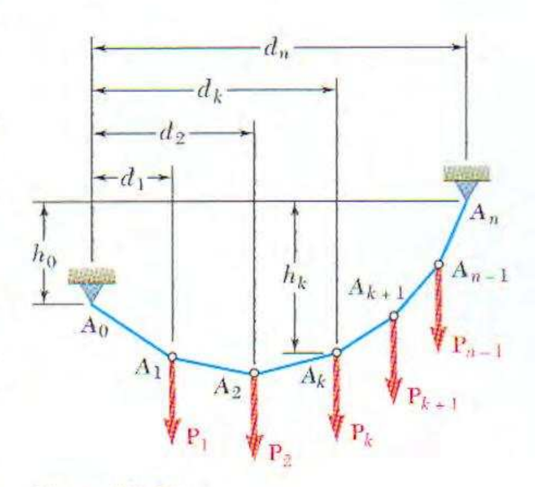


Figura P7.C7

7.C8 Una instalación típica para líneas de transmisión consiste en un cable de longitud s_{AB}, de peso w por unidad de longitud, suspendido como se muestra en la figura entre dos puntos que tienen la misma altura. Use software de computadora para construir una tabla que pueda ser usada en el diseño de futuras instalaciones. La tabla debe contener las cantidades adimensionales h/L, s_{AB}/L, T_0/wL y $T_{máx}/wL$ para valores de c/L desde 0.2 hasta 0.5, con incrementos de 0.025, y desde 0.5 hasta 4, con incrementos de 0.5.

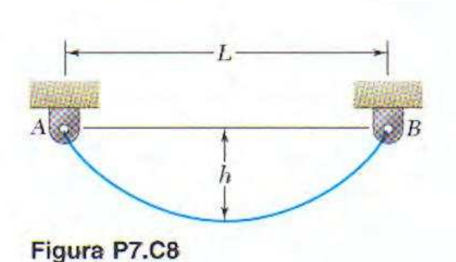


Figura P7.C8

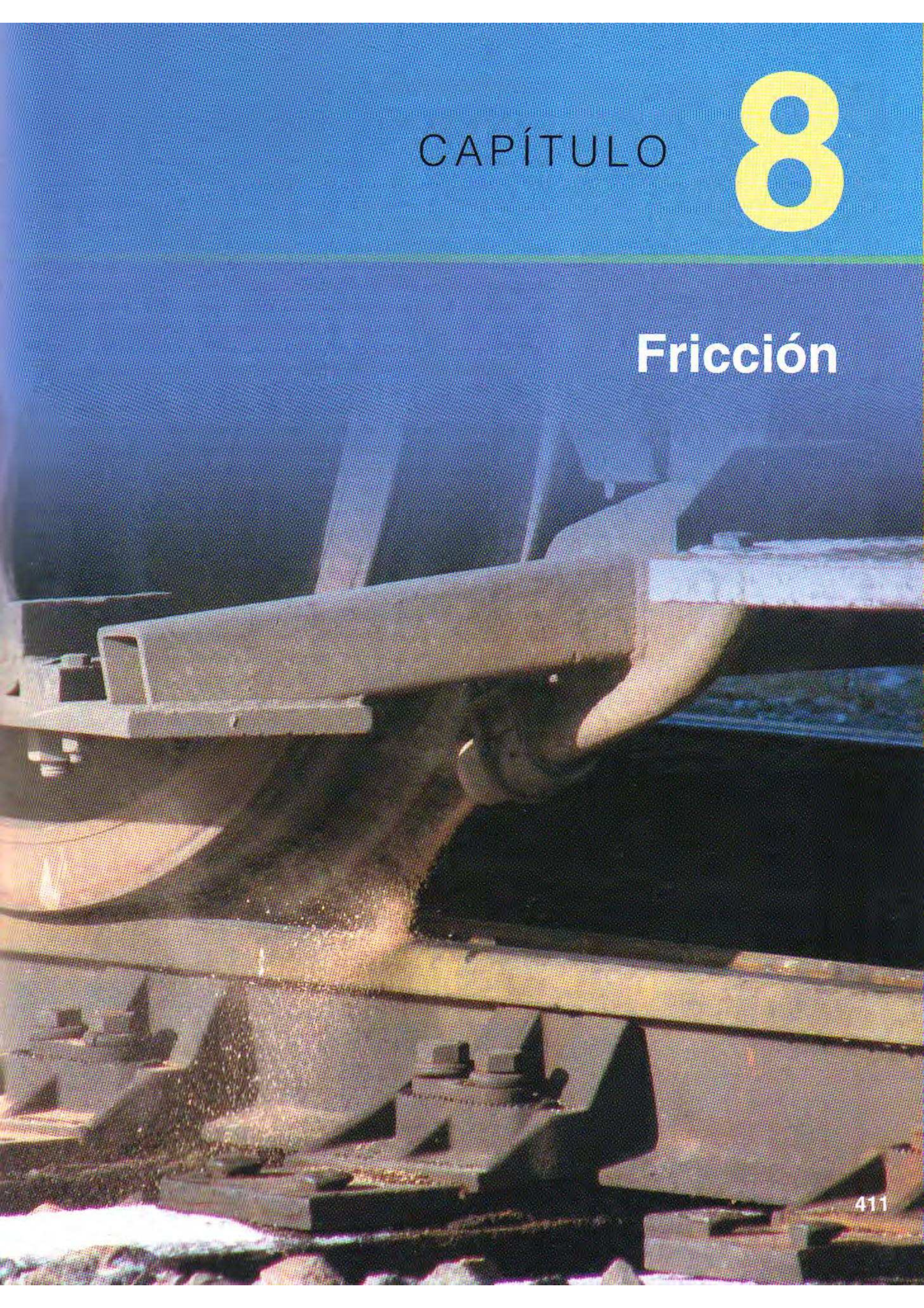
7.C9 Utilice software para resolver el problema 7.132 con valores de P entre 0 y 50 N con incrementos de 5 N.



La fuerza de tracción que desarrolla la locomotora de un tren depende de la resistencia a la fricción entre las ruedas y los rieles. Ante la posibilidad de que ocurran deslizamientos, como cuando el tren viaja por una pendiente o sobre rieles mojados, se deposita arena encima de los rieles para aumentar la fricción.

CAPÍTULO 8

Fricción



CAPÍTULO 8 FRICCIÓN

8.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se supuso que las superficies en contacto eran *superficies sin fricción* o *superficies rugosas*. Si éstas eran superficies sin fricción, la fuerza que cada una de las superficies ejercía sobre la otra era normal a las superficies y las dos se podían mover de manera libre una respecto a la otra. Si éstas eran superficies rugosas, se supuso que se podían presentar fuerzas tangenciales para impedir el movimiento de una superficie con respecto a la otra.

El anterior fue un punto de vista muy simplificado. En realidad, no existen superficies sin fricción perfectas. Cuando dos superficies están en contacto, siempre se presentan fuerzas tangenciales, llamadas *fuerzas de fricción*, cuando se trata de mover una de las superficies con respecto a la otra. Por otra parte, estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el movimiento si se aplican fuerzas lo suficientemente grandes. Por tanto, la distinción entre superficies sin fricción y superficies rugosas es una cuestión de grado. Esto se estudiará con más detalle en el presente capítulo, el cual está dedicado al estudio de la fricción y a su aplicación en situaciones de ingeniería comunes.

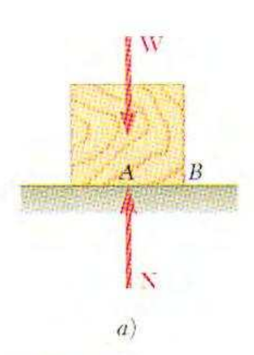
Existen dos tipos de fricción: la *fricción seca*, que algunas veces es llamada *fricción de Coulomb*, y la *fricción de fluidos*. La fricción de fluidos se desarrolla entre capas de fluido que se mueven a diferentes velocidades, y es de gran importancia en problemas que involucran el flujo de fluidos a través de tuberías y orificios o cuando se trabaja con cuerpos que están sumergidos en fluidos en movimiento. Además, la fricción en fluidos también es básica en el análisis del movimiento de *mecanismos lubricados*. Este tipo de problemas se consideran en los libros sobre mecánica de fluidos. El presente estudio está limitado a la fricción seca, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies *que no están lubricadas*.

En la primera parte del capítulo se analiza el equilibrio de distintos cuerpos rígidos y estructuras de fricción seca en las superficies que están en contacto. Más adelante se estudian ciertas aplicaciones de ingeniería específicas en las cuales la fricción seca juega un papel importante: cuñas, tornillos de rosca cuadrada, chumaceras, cojinetes de empuje, resistencia a la rodadura y fricción en bandas.

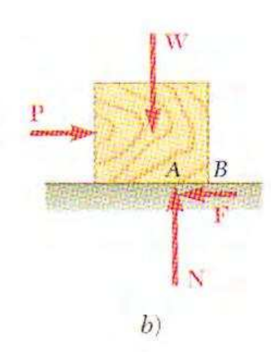
8.2. LEYES DE LA FRICCIÓN SECA. COEFICIENTES DE FRICCIÓN

Las leyes de la fricción seca se pueden ejemplificar mediante el siguiente experimento. Un bloque de peso **W** se coloca sobre una superficie horizontal plana (figura 8.1*a*). Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso **W** y la reacción de la superficie. Como el peso no tiene una componente horizontal, la reacción de la superficie tampoco la tiene; por tanto, la reacción es *normal* a la superficie y está representada por **N** en la figura 8.1*a*. Ahora, suponga que se aplica sobre el bloque una fuerza horizontal **P** (figura 8.1*b*). Si **P** es pequeña, el bloque no se moverá; por tanto, debe existir alguna otra fuerza horizontal que equilibre a **P**. Esta otra fuerza es la *fuerza de fricción estática* **F**, la cual es en realidad la resultante de diversas fuerzas que actúan sobre toda la superficie de contacto entre el bloque y el plano. No se conoce con exactitud la naturaleza de estas fuerzas, pero generalmente se supone que las mismas se deben a irregularidades de las superficies en contacto y, en cierta medida, a la atracción molecular.

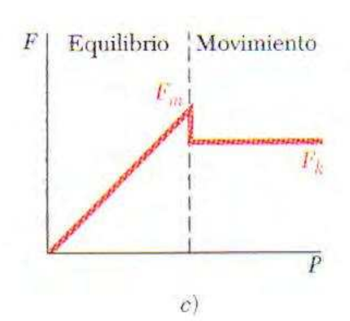
Si se incrementa la fuerza **P**, también se incrementa la fuerza de fricción **F**, la cual continúa oponiéndose a **P** hasta que su magnitud alcanza un cierto *valor máximo* F_m (figura 8.1*c*). Si **P** se incrementa aún



a)



b)



c)

Figura 8.1

más, la fuerza de fricción ya no la puede equilibrar y el bloque comienza a deslizarse.[†] En cuanto empieza a moverse el bloque, la magnitud de **F** disminuye de F_m a un valor menor F_k. Lo anterior se debe a que existe una menor interpenetración entre las irregularidades de las superficies en contacto cuando dichas superficies se mueven una con respecto a la otra. A partir del momento en que el bloque empieza a moverse, éste continúa deslizándose con una velocidad que va aumentando mientras que la fuerza de fricción, representada por $\mathbf{F}_k$ y denominada *fuerza de fricción cinética*, permanece constante.

La evidencia experimental muestra que el máximo valor F_m de la fuerza de fricción estática es proporcional a la componente normal N de la reacción de la superficie. Así, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \tag{8.1}$$

donde μ_s es una constante llamada *coeficiente de fricción estática*. De forma similar, la magnitud F_k de la fuerza de fricción cinética puede expresarse de la siguiente forma:

$$F_k = \mu_k N \tag{8.2}$$

donde μ_k es una constante denominada *coeficiente de fricción cinética*. Los coeficientes de fricción μ_s y μ_k no dependen del área de las superficies en contacto, sino que dependen en gran medida de la naturaleza de las superficies en contacto. Como dichos coeficientes también dependen de la condición exacta de las superficies, sus valores casi nunca se conocen con una precisión mayor a 5 por ciento. En la tabla 8.1 se presentan valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para distintas superficies secas. Los valores correspon-

[†]Es necesario señalar que, conforme se incrementa la magnitud F de la fuerza de fricción desde 0 hasta F_m, el punto de aplicación A de la resultante **N** de las fuerzas de contacto normales se mueve hacia la derecha, de manera que los pares formados, respectivamente, por **P** y **F** y por **W** y **N** permanecen en equilibrio. Si **N** alcanza el punto B antes que F alcance su valor máximo F_m, el bloque se volcará con respecto a B antes de que pueda comenzar a deslizarse (véanse problemas 8.15 y 8.16)

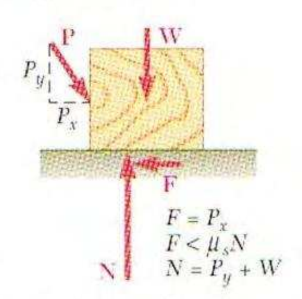
dientes de fricción cinética son alrededor de 25 por ciento menores. Como los coeficientes de fricción son cantidades adimensionales, los valores proporcionados en la tabla 8.1 se pueden utilizar tanto con unidades del SI como con las unidades de uso común en Estados Unidos.

Tabla 8.1. Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas

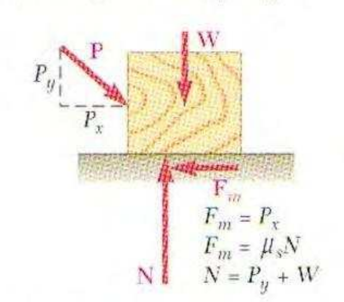
Metal sobre metal	0.15-0.60
Metal sobre madera	0.20-0.60
Metal sobre piedra	0.30-0.70
Metal sobre cuero	0.30-0.60
Madera sobre madera	0.25-0.50
Madera sobre cuero	0.25-0.50
Piedra sobre piedra	0.40-0.70
Tierra sobre tierra	0.20-1.00
Hule sobre concreto	0.60-0.90

P W F = 0 $N = P + W$ N

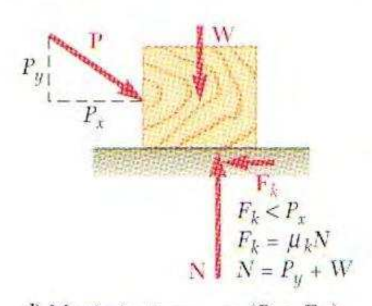
a) Sin fricción ($P_x = 0$)



b) Sin movimiento ($P_x < F_m$)



c) Movimiento inminente ⟶ ($P_x = F_m$)



d) Movimiento ⟶ ($P_x > F_m$)

Figura 8.2

Con base en la descripción que se expuso en los párrafos anteriores es posible afirmar que pueden ocurrir cuatro situaciones diferentes cuando un cuerpo rígido está en contacto con una superficie horizontal:

1. Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo no tienden a moverlo a lo largo de la superficie de contacto; por tanto, no hay fuerza de fricción (figura 8.2*a*).

2. Las fuerzas aplicadas tienden a mover al cuerpo a lo largo de la superficie de contacto pero no son lo suficientemente grandes para ponerlo en movimiento. La fuerza de fricción **F** que se ha desarrollado puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo. Como no hay evidencia de que **F** ha alcanzado su valor máximo, *no se puede utilizar* la ecuación $F_m = \mu_s N$ para determinar la fuerza de fricción (figura 8.2*b*).

3. Las fuerzas aplicadas hacen que el cuerpo esté a punto de comenzar a deslizarse, en este momento se dice que el *movimiento es inminente*. La fuerza de fricción **F** ha alcanzado su valor máximo F_m y, junto con la fuerza normal **N**, equilibra las fuerzas aplicadas. Se *pueden utilizar* tanto las ecuaciones de equilibrio como la ecuación $F_m = \mu_s N$. También es necesario señalar que la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al sentido del movimiento inminente (figura 8.2*c*).

4. El cuerpo se desliza bajo la acción de las fuerzas aplicadas y ya no se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora **F** es igual a $\mathbf{F}_k$ y se puede utilizar la ecuación $F_k = \mu_k N$. El sentido de $\mathbf{F}_k$ es opuesto al sentido del movimiento (figura 8.2*d*).

8.3. ÁNGULOS DE FRICCIÓN

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **F** por su resultante **R**. Considere un bloque de peso **W** que descansa sobre una superficie horizontal plana. Si no se aplica una fuerza horizontal al bloque, la resultante **R** se reduce a la fuerza normal **N** (figura 8.3*a*). Sin embargo, si la fuerza aplicada **P** tiene una componente horizontal $\mathbf{P}_x$ que tiende a mover el bloque, la fuerza **R** tendrá una componente horizontal **F** y, por tanto, formará un ángulo ϕ con la normal a la superficie (figura 8.3*b*). Si se incrementa $\mathbf{P}_x$ hasta que el movimiento se vuelva inminente, el ángulo entre **R** y la vertical aumenta y alcanza un valor máximo (figura 8.3*c*). Este valor recibe el nombre de *ángulo de fricción estática* y se representa con ϕ_s. Con base en la geometría de la figura 8.3*c*, se observa que

$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \phi_s = \mu_s \tag{8.3}$$

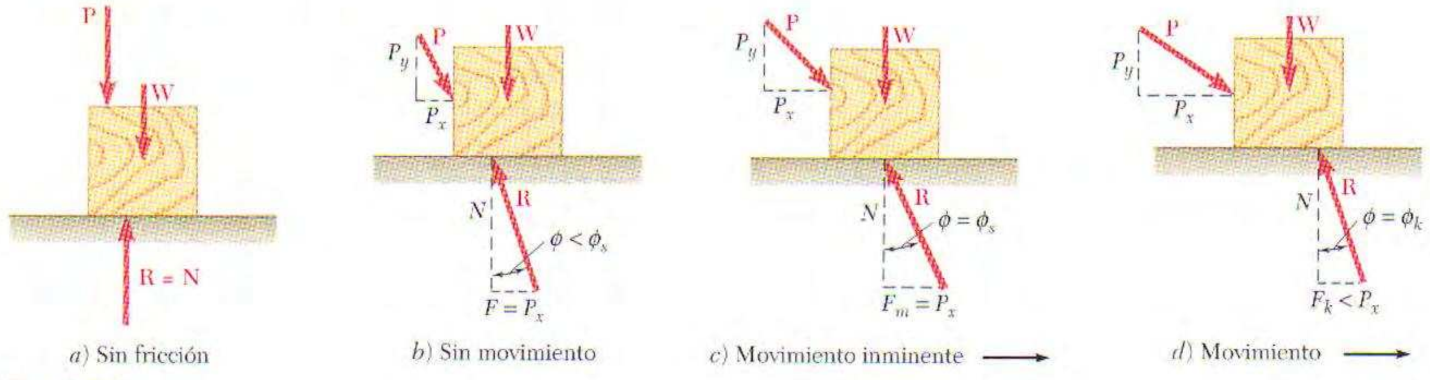
Si en realidad llega a ocurrir el movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción decae a F_k; en forma similar, el ángulo ϕ entre **R** y **N** decae a un valor menor ϕ_k, llamado *ángulo de fricción cinética* (figura 8.3*d*). Con base en la geometría de la figura 8.3*d*, se escribe

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \phi_k = \mu_k \tag{8.4}$$

Se demostrará con otro ejemplo cómo el ángulo de fricción se puede utilizar con ventaja para el análisis de cierto tipo de problemas. Considérese un bloque que descansa sobre una tabla y que está sujeto a las fuerzas correspondientes a su peso **W** y a la reacción **R** de la tabla. Se le puede dar a la tabla cualquier inclinación que se desee. Si la tabla permanece horizontal, la fuerza **R** ejercida por la tabla sobre el bloque es perpendicular a la tabla y equilibra al peso **W** (figura 8.4*a*). Si se le da a la tabla un pequeño ángulo de inclinación θ, la fuerza **R** se desviará de la perpendicular a la tabla por el mismo ángulo θ y continuará equilibrando a **W** (figura 8.4*b*); entonces, **R** tendrá una componente normal **N** de magnitud $N = W \cos \theta$ y una componente tangencial **F** de magnitud $F = W \operatorname{sen} \theta$.

Si se continúa incrementando el ángulo de inclinación el movimiento será inminente en poco tiempo. En ese momento, el ángulo



a) Sin fricción *b*) Sin movimiento *c*) Movimiento inminente *d*) Movimiento

Figura 8.3

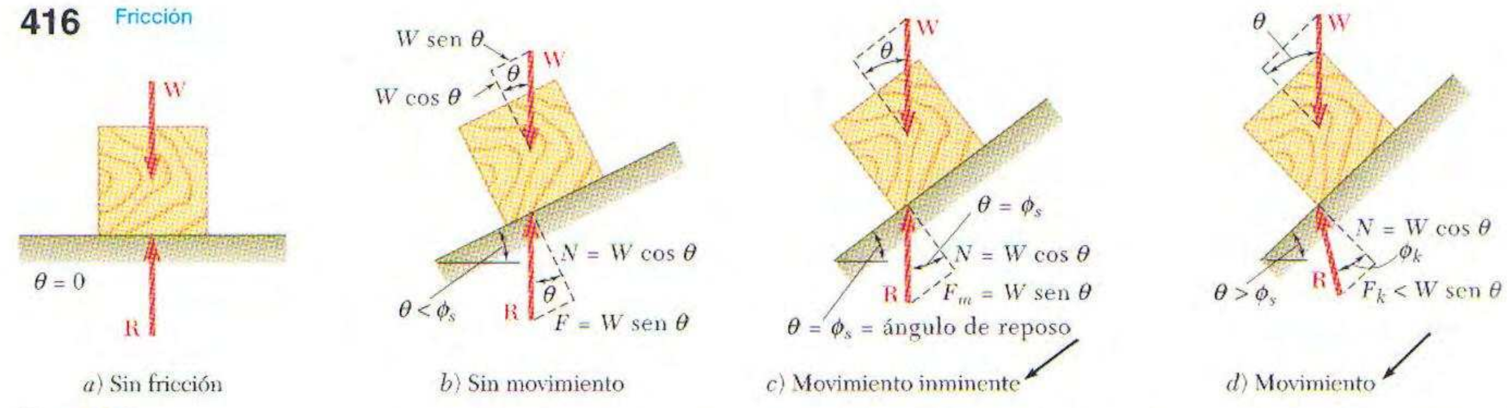


Figura 8.4

entre **R** y la normal habrá alcanzado su valor máximo ϕ_s (figura 8.4*c*). El valor del ángulo de inclinación correspondiente al movimiento inminente recibe el nombre de *ángulo de reposo*. Obviamente, el ángulo de reposo es igual al ángulo de fricción estática ϕ_s. Si se incrementa aún más el ángulo de inclinación θ, comienza el movimiento y el ángulo entre **R** y la normal decae al valor menor ϕ_k (figura 8.4*d*). La reacción **R** ya no es vertical y las fuerzas que actúan sobre el bloque están desequilibradas.



Fotografía 8.1 El coeficiente de fricción estática entre un paquete y la banda transportadora inclinada debe ser lo suficientemente grande para permitir que los paquetes sean transportados sin resbalar.

8.4. PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN FRICCIÓN SECA

En muchas aplicaciones de ingeniería se encuentran problemas que involucran fricción seca. Algunos tratan con situaciones simples como la del bloque que se desliza sobre un plano, que se describió en la sección anterior. Otros involucran situaciones más complicadas como en el problema resuelto 8.3; muchos tratan con la estabilidad de cuerpos rígidos en movimiento acelerado y serán estudiados en la parte de dinámica. Además, cierto número de máquinas y mecanismos comunes pueden analizarse aplicando las leyes de fricción seca. Éstos incluyen cuñas, tornillos, chumaceras, cojinetes de empuje y transmisiones de banda, los cuales serán estudiados en las secciones siguientes.

Los *métodos* que deben utilizarse para resolver problemas que involucran fricción seca son los mismos que se emplearon en los capítulos anteriores. Si un problema involucra sólo un movimiento de traslación, sin que sea posible una rotación, usualmente se puede tratar al cuerpo bajo consideración como si fuera una partícula y, por tanto, se pueden usar los métodos del capítulo 2. Si el problema involucra una posible rotación, el cuerpo se debe considerar como un cuerpo rígido y se pueden emplear los métodos del capítulo 4. Si la estructura que se estudia está hecha de varias partes, se debe utilizar el principio de acción y reacción como se hizo en el capítulo 6.

Si actúan más de tres fuerzas sobre el cuerpo bajo consideración (incluyendo las reacciones en las superficies de contacto), la reacción en cada superficie será representada por sus componentes **N** y **F** y el problema se resolverá con las ecuaciones de equilibrio. Si sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo considerado, puede ser más conveniente representar cada reacción por medio de la fuerza única **R** y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas.

La mayoría de los problemas que involucran la fricción pertenecen a uno de los siguientes *tres grupos*: en el *primer grupo* de problemas todas las fuerzas aplicadas están dadas y los coeficientes de fricción se conocen; en estos casos, se desea determinar si el cuerpo considerado permanecerá en reposo o se deslizará. La fuerza de fricción **F** *requerida para mantener el equilibrio* es desconocida (su mag-

nitud *no* es igual a $\mu_s N$) y debe determinarse, junto con la fuerza normal **N**, dibujando un diagrama de cuerpo libre y *resolviendo las ecuaciones de equilibrio* (figura 8.5*a*). Después, se compara el valor encontrado de la magnitud F de la fuerza de fricción con el valor máximo $F_m = \mu_s N$. Si F es menor o igual que F_m, el cuerpo permanecerá en reposo. Si el valor de F encontrado es mayor que F_m no se puede mantener el equilibrio y ocurre el movimiento; entonces, la magnitud real de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$.

En los problemas del *segundo grupo*, todas las fuerzas aplicadas están dadas y se sabe que el movimiento es inminente; se desea determinar el valor del coeficiente de fricción estática. Aquí, nuevamente se determina la fuerza de fricción y la fuerza normal dibujando un diagrama de cuerpo libre y resolviendo las ecuaciones de equilibrio (figura 8.5*b*). Como se sabe, el valor encontrado para F es el valor máximo F_m, se puede encontrar el coeficiente de fricción al escribir y resolver la ecuación $F_m = \mu_s N$.

En los problemas del *tercer grupo* se proporciona el coeficiente de fricción estática y se sabe que el movimiento en una dirección dada es inminente; se desea determinar la magnitud o la dirección de una de las fuerzas aplicadas. La fuerza de fricción se debe mostrar en el diagrama de cuerpo libre con un *sentido opuesto al del movimiento inminente* y con una magnitud $F_m = \mu_s N$ (figura 8.5*c*). Entonces se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio y se puede determinar la fuerza deseada.

Como se señaló antes, cuando sólo están involucradas tres fuerzas puede ser más conveniente representar la reacción de la superficie por medio de una sola fuerza **R** y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas. Una solución de este tipo se emplea en el problema resuelto 8.2.

Cuando dos cuerpos A y B están en contacto (figura 8.6*a*), las fuerzas de fricción ejercidas, respectivamente, por A sobre B y por B sobre A son iguales y opuestas (tercera ley de Newton). Al dibujar el diagrama de cuerpo libre correspondiente a uno de los cuerpos es importante incluir la fuerza de fricción apropiada con su sentido correcto. Por tanto, siempre se debe tener presente la siguiente regla: *el sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre* A *es opuesta al sentido del movimiento (o al del movimiento inminente) de* A *visto desde* B (figura 8.6*b*).[†] El sentido de la fuerza de fricción que actúa sobre B se determina en forma similar (figura 8.6*c*). Observe que el movimiento de A visto desde B es un *movimiento relativo*. Por ejemplo, si el cuerpo A está fijo y el cuerpo B está en movimiento, el cuerpo A tendrá un movimiento relativo con respecto a B. Además, si tanto B como A se están moviendo hacia abajo pero B se mueve más rápido que A, se observará que, visto desde B, el cuerpo A se mueve hacia arriba.

[†]En este sentido, es *el mismo que el del movimiento de B visto desde A*.

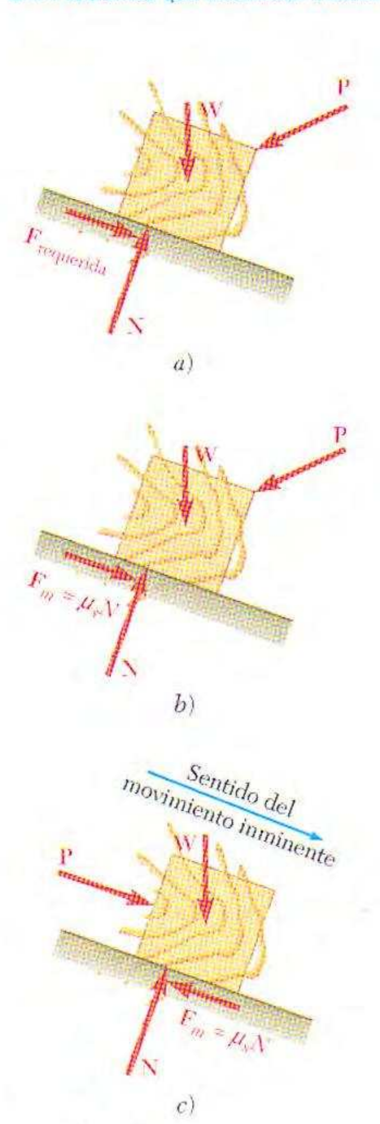
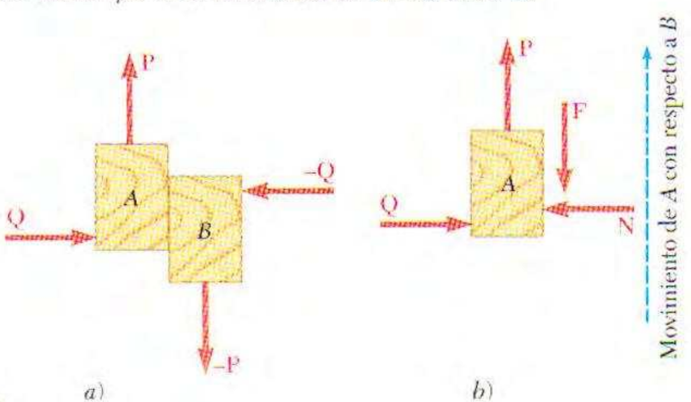
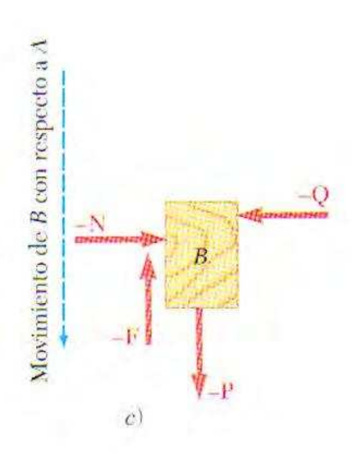
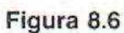
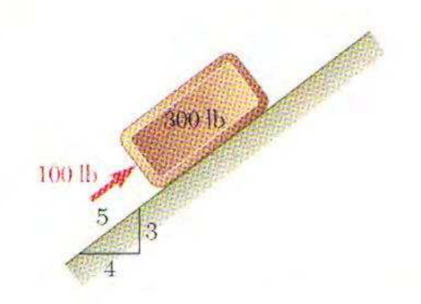


Figura 8.5



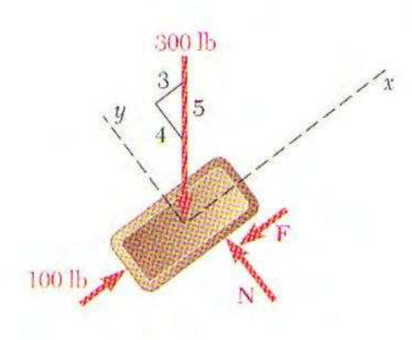



Figura 8.6



PROBLEMA RESUELTO 8.1

Como se muestra en la figura, una fuerza de 100 lb actúa sobre un bloque de 300 lb que está colocado sobre un plano inclinado. Los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Determine si el bloque está en equilibrio y encuentre el valor de la fuerza de fricción.



SOLUCIÓN

Fuerza requerida para mantener el equilibrio. Primero se determina el valor de la fuerza de fricción *requerida para mantener el equilibrio*. Si **F** está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque y se escribe

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0: \qquad 100 \text{ lb} - \tfrac{3}{5}(300 \text{ lb}) - F = 0$$
$$F = -80 \text{ lb} \qquad \mathbf{F} = 80 \text{ lb} \nearrow$$

$$+\nwarrow \Sigma F_y = 0: \qquad N - \tfrac{4}{5}(300 \text{ lb}) = 0$$
$$N = +240 \text{ lb} \qquad \mathbf{N} = 240 \text{ lb} \nwarrow$$

La fuerza **F** requerida para mantener el equilibrio es una fuerza de 80 lb dirigida hacia arriba y hacia la derecha; por tanto, el bloque tiende a moverse hacia abajo a lo largo del plano.

Fuerza máxima de fricción. La magnitud de la fuerza máxima de fricción que puede desarrollarse es

$$F_m = \mu_s N \qquad F_m = 0.25(240 \text{ lb}) = 60 \text{ lb}$$

Como el valor de la fuerza requerida para mantener el equilibrio (80 lb) es mayor que el valor máximo que se puede obtener (60 lb), no se mantendrá el equilibrio y *el bloque se deslizará hacia abajo a lo largo del plano*.

Valor real de la fuerza de fricción. La magnitud de la fuerza de fricción que realmente se tiene se determina de la siguiente forma:

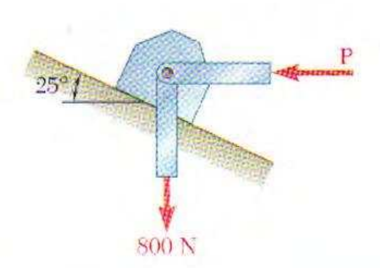
$$F_{\text{real}} = F_k = \mu_k N$$
$$= 0.20(240 \text{ lb}) = 48 \text{ lb}$$

El sentido de esta fuerza es opuesto al sentido del movimiento; por tanto, la fuerza está dirigida hacia arriba y hacia la derecha:

$$\mathbf{F}_{\text{real}} = 48 \text{ lb} \nearrow \quad ◀$$

Es necesario señalar que las fuerzas que actúan sobre el bloque no están en equilibrio; la resultante de dichas fuerzas es

$$\tfrac{3}{5}(300 \text{ lb}) - 100 \text{ lb} - 48 \text{ lb} = 32 \text{ lb} \swarrow$$



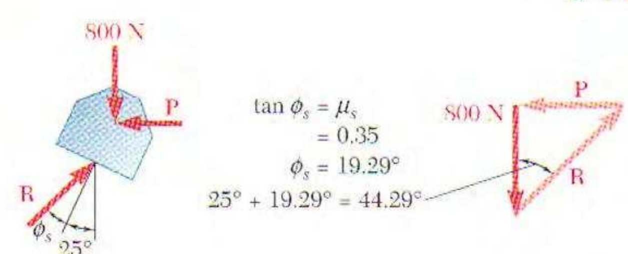
PROBLEMA RESUELTO 8.2

Dos fuerzas actúan sobre un bloque de apoyo como se muestra en la figura. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano inclinado son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine: *a*) la fuerza **P** que se requiere para hacer que el movimiento del bloque hacia arriba a lo largo del plano inclinado sea inminente, *b*) la fuerza de fricción cuando el bloque continúa moviéndose hacia arriba y *c*) la fuerza mínima **P** requerida para evitar que el bloque se deslice hacia abajo.

SOLUCIÓN

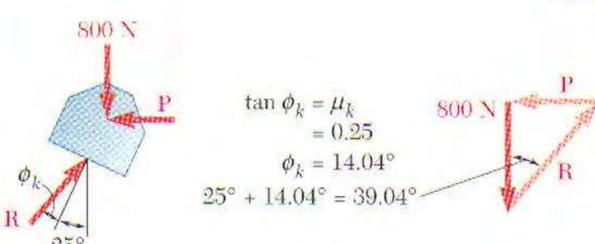
Diagrama de cuerpo libre. Para cada uno de los incisos se dibuja un diagrama de cuerpo libre del bloque y un triángulo de fuerzas que incluya la fuerza vertical de 800 N, la fuerza horizontal **P** y la fuerza **R** ejercida por el plano inclinado sobre el bloque. En cada uno de los casos considerados, se debe determinar la dirección de **R**. Es necesario señalar que como **P** es perpendicular a la fuerza de 800 N, el triángulo de fuerzas es un triángulo rectángulo, el cual puede resolverse de manera fácil para encontrar **P**. Sin embargo, en la mayoría de los problemas el triángulo de fuerzas será un triángulo oblicuo y deberá resolverse aplicando la ley de los senos.

a) Fuerza P para que el bloque empiece a moverse hacia arriba



$P = (800 \text{ N}) \tan 44.29°$ $\qquad$ **P** = 780 N ← ◀

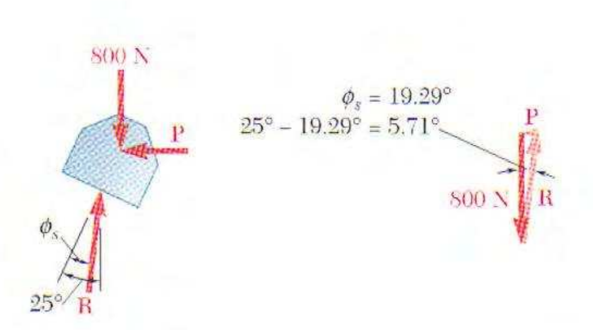
b) Fuerza P para mantener al bloque en movimiento



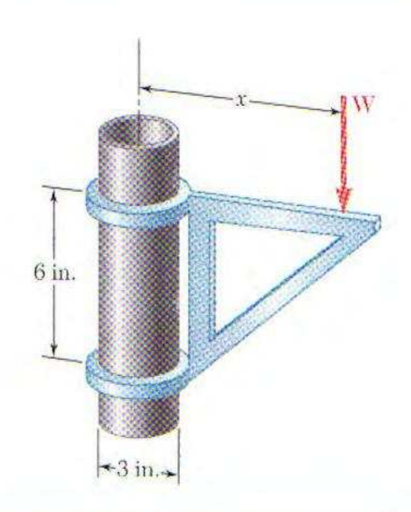
$P = (800 \text{ N}) \tan 39.04°$ $\qquad$ **P** = 649 N ← ◀

c) Fuerza P para evitar que el bloque se deslice hacia abajo

$P = (800 \text{ N}) \tan 5.71°$ $\qquad$ **P** = 80.0 N ← ◀



PROBLEMA RESUELTO 8.3



La ménsula móvil que se muestra en la figura puede colocarse a cualquier altura a lo largo del tubo de 3 in. de diámetro. Si el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la ménsula es de 0.25, determine la distancia mínima x a la cual se puede soportar la carga **W**, sin tomar en cuenta el peso de la ménsula.

SOLUCIÓN

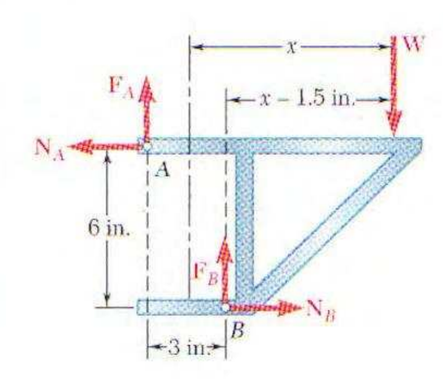


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la ménsula. Cuando **W** se coloca a la distancia mínima x medida desde el eje del tubo, la ménsula está a punto de deslizarse y las fuerzas de fricción en A y B han alcanzado sus valores máximos:

$$F_A = \mu_s N_A = 0.25 N_A$$
$$F_B = \mu_s N_B = 0.25 N_B$$

Ecuaciones de equilibrio

$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0$: $\quad N_B - N_A = 0$

$$N_B = N_A$$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad F_A + F_B - W = 0$

$$0.25N_A + 0.25N_B = W$$

Así, como se ha encontrado que N_B es igual a N_A,

$$0.50N_A = W$$
$$N_A = 2W$$

$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0$: $\quad N_A(6 \text{ in.}) - F_A(3 \text{ in.}) - W(x - 1.5 \text{ in.}) = 0$

$$6N_A - 3(0.25N_A) - Wx + 1.5W = 0$$
$$6(2W) - 0.75(2W) - Wx + 1.5W = 0$$

Al dividir entre W todos los términos de la ecuación anterior y resolver para x,

$$x = 12 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudiaron y se aplicaron las *leyes de fricción seca*. Anteriormente, sólo se habían encontrado: *a*) superficies sin fricción que podían moverse libremente una con respecto a la otra y *b*) superficies rugosas que no permitían un movimiento relativo de una superficie con respecto a la otra.

A. *Al resolver problemas que involucran fricción seca,* se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. *La reacción* R *ejercida por una superficie sobre un cuerpo libre* se puede descomponer en una componente normal **N** y una componente tangencial **F**. La componente tangencial se conoce como la *fuerza de fricción*. Cuando un cuerpo está en contacto con una superficie fija, la dirección de la fuerza de fricción **F** es opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo.

a) No ocurrirá movimiento siempre y cuando F no exceda el valor máximo $F_m = \mu_s N$, donde μ_s es el *coeficiente de fricción estática*.

b) Ocurrirá movimiento si se requiere un valor de F mayor que F_m para mantener el equilibrio. A medida que ocurra el movimiento, el valor real de F disminuye a $F_k = \mu_k N$, donde μ_k es el *coeficiente de fricción cinética* [problema resuelto 8.1].

2. *Cuando sólo están involucradas tres fuerzas* es preferible un enfoque alternativo para el análisis de la fricción [problema resuelto 8.2]. La reacción **R** se define por medio de su magnitud R y del ángulo ϕ que se forma con la normal a la superficie. No ocurrirá movimiento siempre y cuando ϕ no exceda el valor máximo ϕ_s, donde $\tan \phi_s = \mu_s$. Ocurrirá movimiento si se requiere un valor ϕ mayor que ϕ_s para mantener el equilibrio y el valor real de ϕ disminuirá a ϕ_k, donde $\tan \phi_k = \mu_k$.

3. *Cuando dos cuerpos están en contacto* se debe determinar el sentido del movimiento real o relativo inminente en el punto de contacto. Sobre cada uno de los dos cuerpos se debe mostrar una fuerza de fricción **F** en una dirección opuesta a la dirección del movimiento real o inminente del cuerpo visto desde el otro cuerpo.

B. *Métodos de solución.* El primer paso para encontrar la solución consiste en *dibujar un diagrama de cuerpo libre* del cuerpo en consideración, descomponiendo la fuerza ejercida sobre cada una de las superficies donde existe fricción en una componente normal **N** y en una fuerza de fricción **F**. Si están involucrados varios cuerpos, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de ellos representando y dirigiendo las fuerzas en cada superficie de contacto de la misma manera que se hizo cuando se analizaron armazones en el capítulo 6.

Los problemas que se deberán resolver en esta sección pueden pertenecer a una de las cinco categorías siguientes:

1. *Todas las fuerzas aplicadas y los coeficientes de fricción son conocidos y se debe determinar si el equilibrio se mantiene o no.* Obsérvese que en esta situación la fuerza de fricción es desconocida y *no se puede suponer que es igual* a $\mu_s N$.

a) Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio para determinar N y F.

b) Se debe calcular la fuerza máxima de fricción permisible, $F_m = \mu_s N$. Si $F \leq F_m$ se mantiene el equilibrio. Si $F > F_m$, ocurre el movimiento y la magnitud de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$ [problema resuelto 8.1].

(*continúa*)

2. *Todas las fuerzas aplicadas son conocidas y se debe encontrar el mínimo valor permisible de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.* Se debe suponer que el movimiento es inminente y se debe determinar el valor correspondiente de μ_s.

a) Se deben escribir las ecuaciones de equilibrio para determinar N y F.

b) Como el movimiento es inminente, $F = F_m$. Se sustituyen los valores encontrados para N y F en la ecuación $F_m = \mu_s N$ y se resuelve para μ_s.

3. *El movimiento del cuerpo es inminente y se conoce el valor de μ_s; se debe encontrar alguna cantidad desconocida,* como una distancia, un ángulo, la magnitud de una fuerza o la dirección de una fuerza.

a) Se debe suponer un posible movimiento del cuerpo y, en el diagrama de cuerpo libre, dibujar la fuerza de fricción en dirección opuesta a la dirección del movimiento supuesto.

b) Como el movimiento es inminente, $F = F_m = \mu_s N$. Si se sustituye μ_s por su valor conocido, se puede expresar F en términos de N en el diagrama de cuerpo libre, eliminándose de esta forma una incógnita.

c) Se deben escribir y resolver las ecuaciones de equilibrio para la incógnita que se está buscando [problema resuelto 8.3].

Problemas

8.1 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 25°$ y $P = 150$ lb.

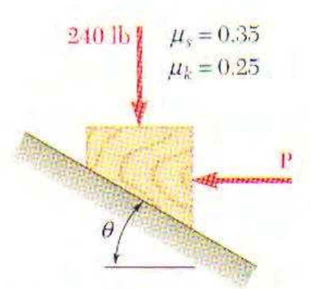


Figura P8.1 y P8.2

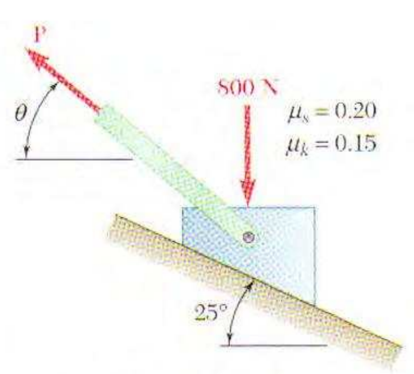
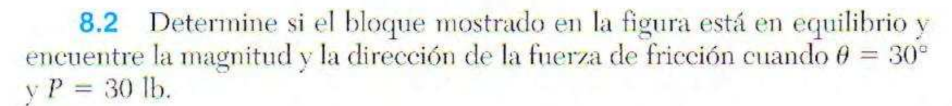
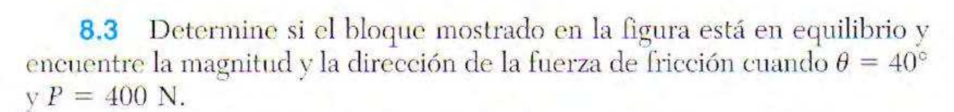


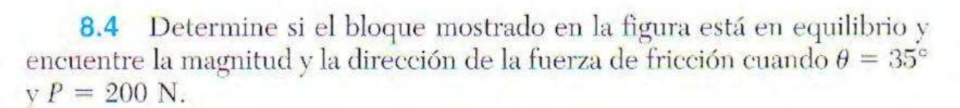
Figura P8.3, P8.4 y P8.5



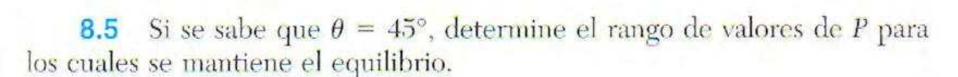
8.2 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 30°$ y $P = 30$ lb.



8.3 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 40°$ y $P = 400$ N.



8.4 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando $\theta = 35°$ y $P = 200$ N.



8.5 Si se sabe que $\theta = 45°$, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio.

8.6 Determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio del bloque que se muestra en la figura.

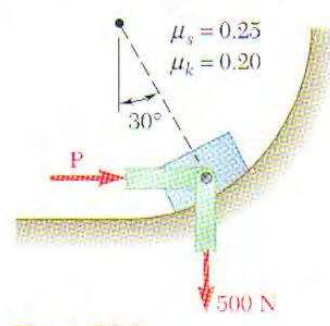


Figura P8.6

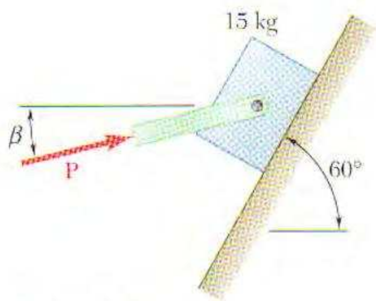


Figura P8.7

8.7 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 15 kg y el plano inclinado que se muestran en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine *a*) el valor mínimo de P necesario para mantener al bloque en equilibrio y *b*) el valor correspondiente de β.

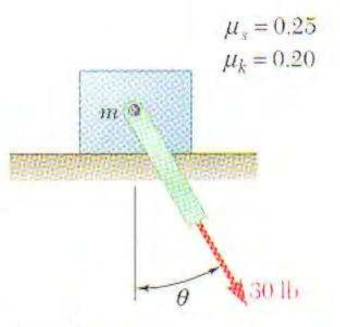


Figura *P8.8*

8.8 Determine el mínimo valor de θ requerido para que el bloque empiece a moverse hacia la derecha si *a*) $W = 75$ lb, *b*) $W = 100$ lb. Sólo considere valores de θ menores que 90°.

8.9 Los coeficientes de fricción entre el bloque y el riel son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$. Si se sabe que $\theta = 65°$, determine el mínimo valor de P necesario *a*) para que el bloque empiece a moverse hacia arriba sobre el riel, *b*) para evitar que el bloque se mueva hacia abajo.

Figura P8.9

8.10 El bloque A de 80 lb está unido al eslabón AB y descansa sobre una banda en movimiento. Si $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine la magnitud de la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse a la banda para mantener su movimiento *a*) hacia la derecha, *b*) hacia la izquierda.

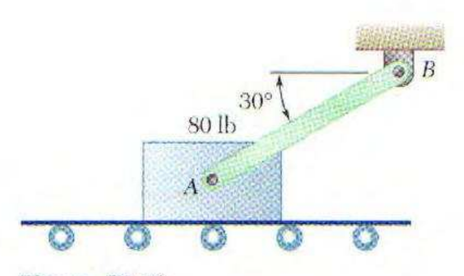


Figura *P8.10*

8.11 y 8.12 Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza mínima **P** requerida para que el bloque de 30 kg comience a moverse si el cable AB *a*) está unido como se muestra en las figuras y *b*) se retira.

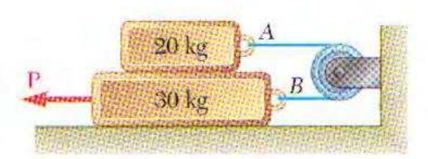


Figura P8.11

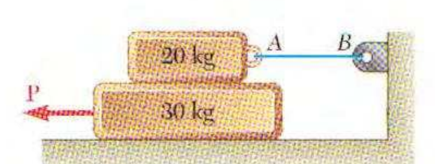


Figura P8.12

8.13 Tres paquetes A, B y C de 4 kg se colocan sobre una banda transportadora que se encuentra en reposo. Entre la banda y los dos paquetes A y C, los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.20$; entre el paquete B y la banda los coeficientes son $\mu_s = 0.10$ y $\mu_k = 0.08$. Los paquetes se colocan sobre la banda de forma que están en contacto entre sí y se encuentran en reposo. Determine si alguno de los paquetes se moverá y la fuerza de fricción que actúa sobre cada paquete.

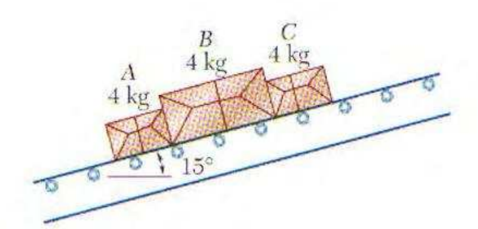


Figura *P8.13*

8.14 Retome el problema 8.13, y ahora suponga que el paquete B se coloca a la derecha de los dos paquetes A y C.

8.15 En la figura se muestra un gabinete de 120 lb que se monta sobre ruedas, las cuales se pueden fijar para evitar su rotación. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Si $h = 32$ in., determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento del gabinete hacia la derecha si *a*) todas las ruedas están fijas, *b*) las ruedas en *B* están fijas y las ruedas en *A* pueden girar libremente y *c*) las ruedas en *A* están fijas y las ruedas en *B* pueden girar libremente.

8.16 En la figura se muestra un gabinete de 120 lb que se monta sobre ruedas, las cuales se pueden fijar para evitar que giren. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Ahora suponga que las ruedas en *A* y *B* están fijas y determine *a*) la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento del gabinete hacia la derecha y *b*) el máximo valor permisible de *h* para que el gabinete no se vuelque.

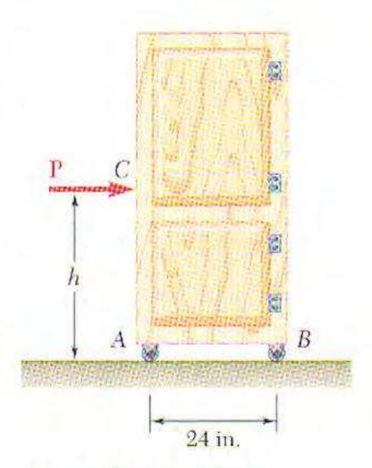


Figura P8.15 y P8.16

8.17 El cilindro de peso *W* y radio *r* que se muestra en la figura tiene el mismo coeficiente de fricción estática μ_s en *A* y en *B*. Determine la magnitud del par máximo **M** que puede aplicarse al cilindro sin que éste rote.

8.18 En la figura se muestra un cilindro de peso *W* y radio *r*. Exprese en términos de *W* y *r* la magnitud del par máximo **M** que puede aplicarse al cilindro sin que rote. Suponga que el coeficiente de fricción estática es *a*) cero en *A* y 0.30 en *B* y *b*) 0.25 en *A* y 0.30 en *B*.

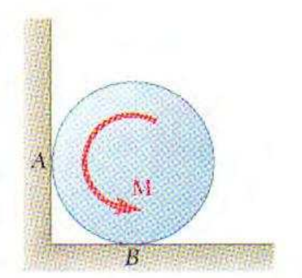


Figura P8.17 y P8.18

8.19 El cilindro hidráulico mostrado en la figura ejerce una fuerza de 3 kN dirigida hacia la derecha sobre el punto *B* y hacia la izquierda sobre el punto *E*. Determine la magnitud del par **M** requerido para rotar el tambor a velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj.

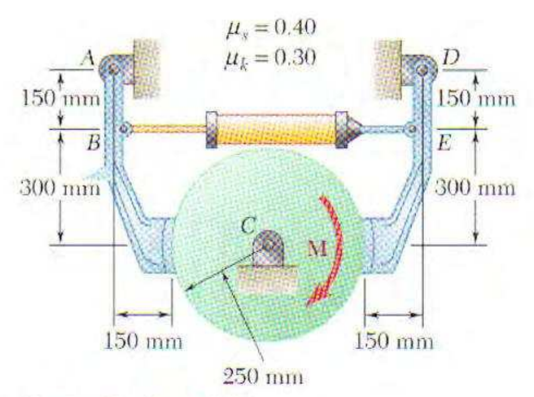


Figura P8.19 y P8.20

8.20 Un par **M** de 100 N · m de magnitud se aplica sobre el tambor como se muestra en la figura. Determine la fuerza mínima que debe ejercer el cilindro hidráulico sobre las uniones en *B* y *E* si el tambor no debe rotar.

8.21 La escalera *AB* de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Suponga que el coeficiente de fricción estática μ_s en *B* es cero y determine el valor mínimo de μ_s en *A* para que la escalera se mantenga en equilibrio.

8.22 La escalera *AB* de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Si el coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en *A* y *B*, determine el valor mínimo de μ_s para que la escalera se mantenga en equilibrio.

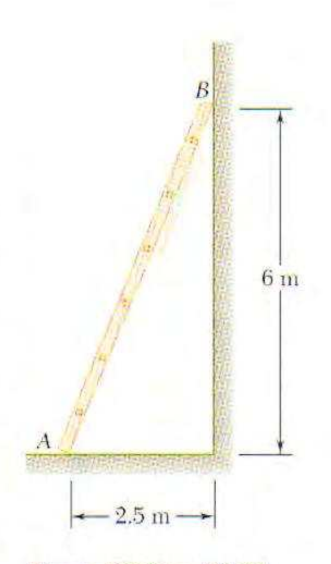


Figura P8.21 y *P8.22*

8.23 y *8.24* El extremo A de la barra ligera y uniforme de longitud L y peso W mostrada en la figura se apoya sobre una superficie horizontal, mientras que su extremo B se sostiene mediante la cuerda BC. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, determine *a*) el valor máximo de θ para que el movimiento sea inminente y *b*) el valor correspondiente de la tensión en la cuerda.

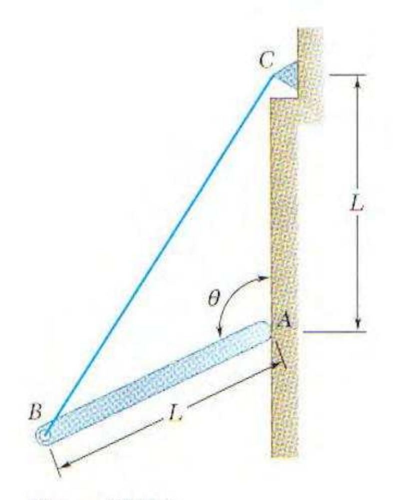


Figura P8.23

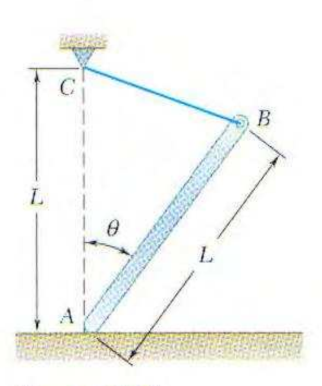


Figura *P8.24*

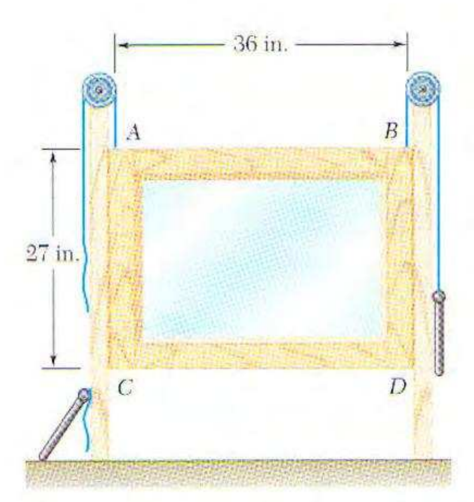


Figura P8.25

8.25 Una ventana corrediza que pesa 10 lb se sostiene normalmente mediante dos contrapesos de 5 lb. Si se sabe que la ventana permanece abierta después de que uno de los contrapesos se rompe, determine el valor mínimo posible del coeficiente de fricción estática. (Suponga que los contrapesos son ligeramente más pequeños que el marco y que éstos sólo están atados en los puntos A y D.)

8.26 El par de tenazas que se muestra en la figura se usa para levantar un bloque de concreto de 500 N. Determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre el bloque y las tenazas en F y G.

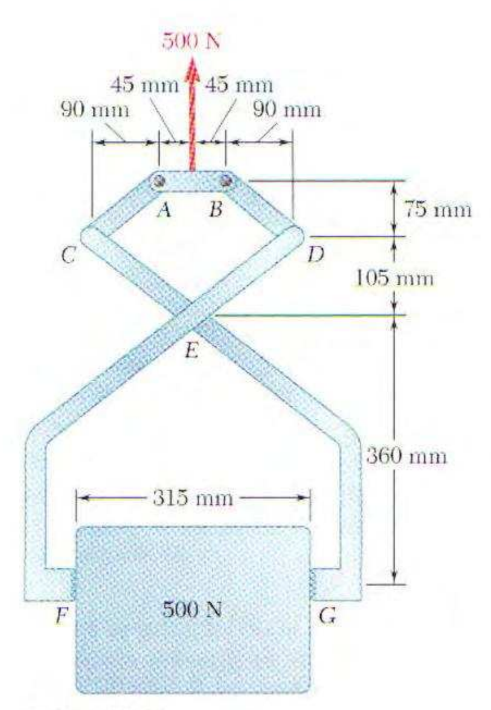


Figura P8.26

8.27 La prensa que se muestra en la figura se utiliza para estampar un pequeño sello en E. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la guía vertical y el dado de estampado D es 0.30, determine la fuerza ejercida por el dado sobre el sello.

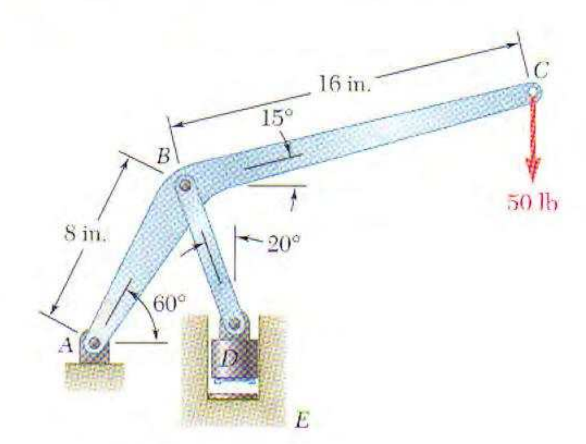


Figura P8.27

8.28 Una leva de 100 mm de radio se usa para controlar el movimiento de la placa CD como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la leva y la placa es de 0.45 y sin tomar en cuenta la fricción en los apoyos del rodillo, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mantener el movimiento de la placa de espesor igual a 20 mm y *b*) el espesor máximo de la placa para que el mecanismo sea autobloqueante (es decir, que la placa no se mueva sin importar cuán grande sea el valor de **P**).

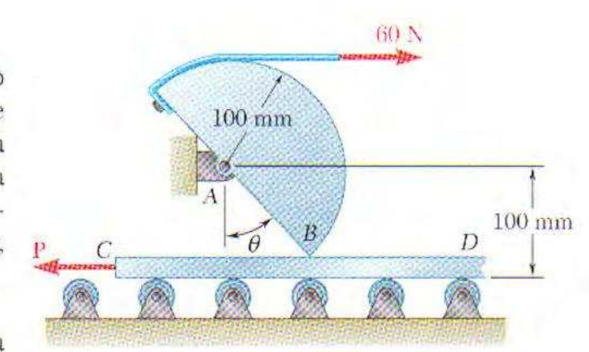


Figura P8.28

8.29 En la figura se muestra una barra delgada de longitud L colocada entre la clavija C y la pared vertical, la cual sostiene una carga **P** en su extremo A. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20 tanto en B como en C, determine el rango de valores de la relación L/a para los cuales se mantiene el equilibrio.

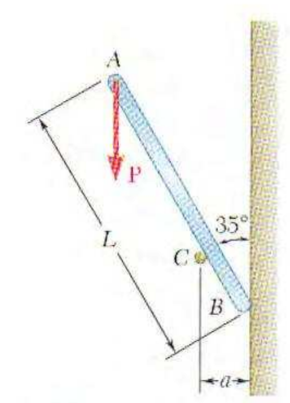


Figura P8.29

8.30 La placa $ABCD$ de 50 lb se fija en A y D a collarines, los cuales pueden deslizarse libremente sobre la barra vertical como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre los collarines y la barra es de 0.40, determine si la placa se mantendrá en equilibrio en la posición mostrada, cuando la magnitud de la fuerza vertical en E es *a*) $P = 0$ y *b*) $P = 20$ lb.

8.31 En el problema 8.30 determine el rango de valores para la magnitud P de la fuerza vertical aplicada en E con los cuales la placa se moverá hacia abajo.

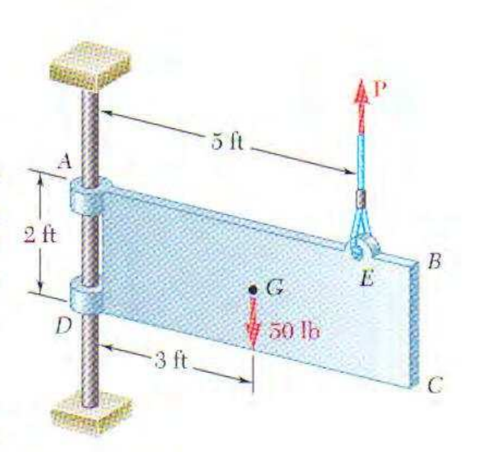


Figura P8.30

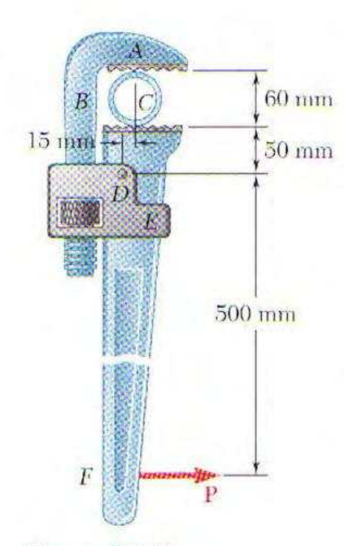


Figura *P8.32*

8.32 En la figura se muestra un tubo de 60 mm de diámetro que se aprieta mediante una llave Stillson. Las porciones AB y DE de la llave están unidas rígidamente entre sí y la porción CF se conecta mediante un perno en D. Si la llave debe quedar autobloqueada al apretar el tubo, determine el coeficiente de fricción mínimo requerido en A y en C.

8.33 Retome el problema 8.32, y ahora suponga que el diámetro del tubo es de 30 mm.

8.34 Una viga de 10 ft, que pesa 1 200 lb, se va a mover hacia la izquierda sobre la plataforma. Se aplica una fuerza horizontal **P** sobre una carretilla que está montada sobre ruedas sin fricción. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$, y en un inicio $x = 2$ ft. Si se sabe que la superficie superior de la carretilla es un poco más alta que la plataforma, determine la fuerza **P** requerida para que la viga inicie su movimiento. (*Sugerencia*: La viga está apoyada en A y en D.)

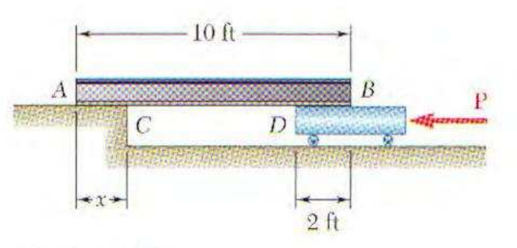


Figura P8.34

8.35 *a*) Demuestre que la viga del problema 8.34 *no se puede* mover si la superficie superior de la carretilla es un poco *más baja* que la plataforma. *b*) Demuestre que la viga *se puede* mover si dos trabajadores de 175 lb se paran sobre la viga en B y determine hasta qué distancia se puede mover la viga hacia la izquierda.

8.36 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es de 0.35, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $\theta = 50°$ y $M = 20$ N · m.

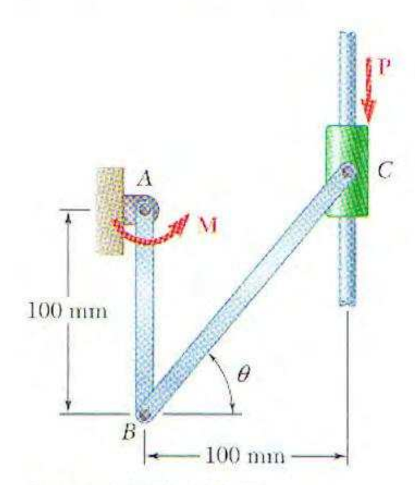


Figura P8.36 y P8.37

8.37 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es de 0.40, determine el rango de valores de M para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $\theta = 60°$ y $P = 200$ N.

8.38 En la figura se muestra una barra delgada AB de longitud l = 600 mm, unida a un collarín en B y apoyada sobre una rueda pequeña localizada a una distancia horizontal a = 80 mm medida desde la barra vertical sobre la cual se desliza el collarín. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra vertical es de 0.25 y sin tomar en cuenta el radio de la rueda, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio cuando Q = 100 N y $\theta = 30°$.

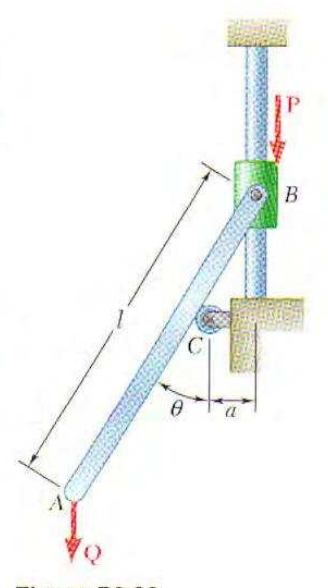


Figura P8.38

8.39 Dos bloques A y B de 10 lb están conectados por una barra delgada de peso despreciable. El coeficiente de fricción estática es de 0.30 entre todas las superficies de contacto y la barra forma un ángulo $\theta = 30°$ con la vertical. *a*) Muestre que el sistema está en equilibrio cuando P = 0. Determine el máximo valor de P para el cual se mantiene el equilibrio.

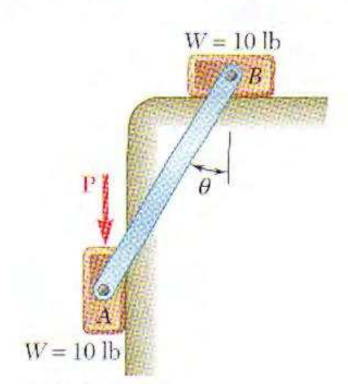


Figura P8.39

8.40 Dos tablas uniformes idénticas, cada una con un peso de 40 lb, se recargan temporalmente una contra la otra como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es de 0.40, determine *a*) la magnitud máxima de la fuerza **P** para la cual se mantiene el equilibrio, *b*) la superficie en la que el movimiento será inminente.

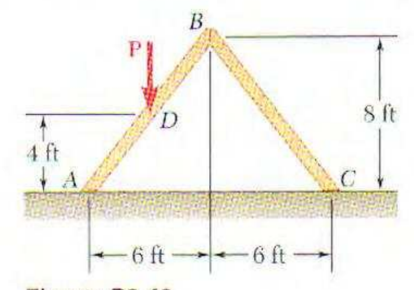


Figura *P8.40*

8.41 Dos barras idénticas de 5 ft de largo están conectadas mediante un pasador en B y se colocan entre dos paredes y una superficie horizontal, como se muestra en la figura. Si se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática en A, B y C, determine el valor mínimo de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.

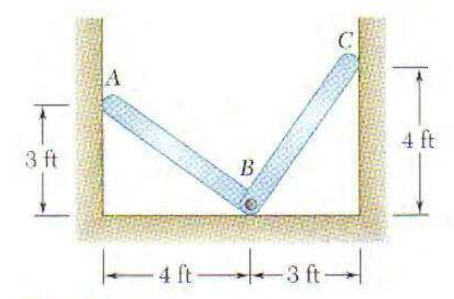


Figura P8.41

8.42 Dos bloques A y B de 8 kg, que descansan sobre anaqueles, están conectados mediante una barra de masa despreciable. Si se sabe que la magnitud de una fuerza horizontal **P** aplicada en C se incrementa lentamente desde cero, determine el valor de P para el que se inicia el movimiento, y cuál es dicho movimiento, cuando el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es *a*) $\mu_s = 0.40$, *b*) $\mu_s = 0.50$.

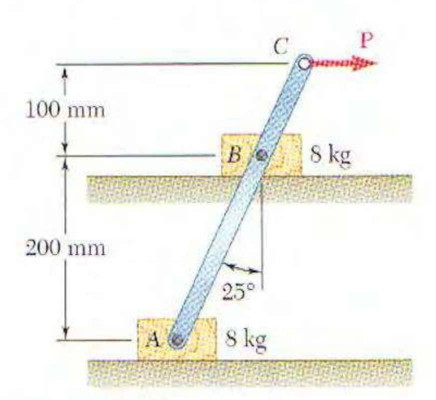


Figura P8.42

8.43 Una barra delgada de acero de 225 mm de longitud se coloca dentro de un tubo como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la barra y el tubo es de 0.20, determine el valor máximo de θ para el cual la barra no cae dentro del tubo.

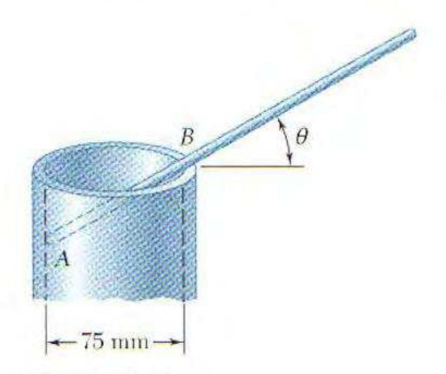


Figura P8.43

8.44 En el problema 8.43, determine el valor mínimo de θ para el cual la barra no cae fuera del tubo.

8.45 En la figura se muestran dos barras delgadas de peso despreciable unidas mediante un perno en C y conectadas a los bloques A y B con un peso W cada uno. Si se sabe que $\theta = 80°$ y que el coeficiente de fricción estática entre los bloques y la superficie horizontal es de 0.30, determine el valor máximo de P para el cual se mantiene el equilibrio.

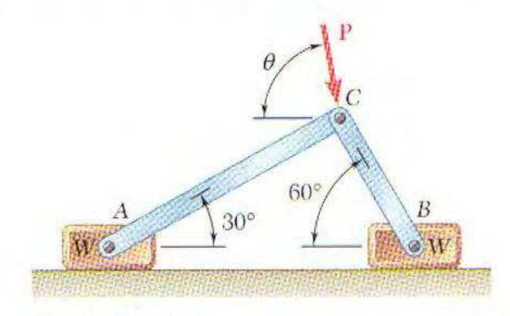


Figura P8.45

8.5. CUÑAS

Las cuñas son máquinas simples que se utilizan para levantar grandes bloques de piedra y otras cargas pesadas. Estas cargas se pueden levantar aplicándole a la cuña una fuerza que es menor que el peso de la carga. Además, debido a la fricción entre las superficies en contacto, una cuña con una forma apropiada permanecerá en su lugar después que ha sido forzada bajo la carga. Por tanto, las cuñas se pueden utilizar para hacer pequeños ajustes en la posición de piezas pesadas de maquinaria.

Considere el bloque A mostrado en la figura 8.7*a*. Dicho bloque descansa sobre una pared vertical B y debe levantarse un poco forzando una cuña C entre el bloque A y una segunda cuña D. Se desea encontrar el valor mínimo de la fuerza **P** que debe aplicarse a la cuña C para mover el bloque. Se supondrá que el peso **W** del bloque es conocido, ya sea en libras o determinado en newtons a partir de la masa del bloque expresada en kilogramos.

Los diagramas de cuerpo libre del bloque A y de la cuña C se han dibujado en la figura 8.7*b* y *c*. Las fuerzas que actúan sobre el bloque incluyen su peso y las fuerzas normal y de fricción en las superficies de contacto con la pared B y con la cuña C. Las magnitudes de las fuerzas de fricción $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son iguales, respectivamente, a $\mu_s N_1$ y $\mu_s N_2$ puesto que debe iniciarse el movimiento del bloque. Es importante mostrar las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza $\mathbf{F}_1$ ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia abajo. Por otra parte, como la cuña C se mueve hacia la derecha, el movimiento relativo de A con respecto a C es hacia la izquierda y la fuerza $\mathbf{F}_2$ ejercida por C sobre A debe estar dirigida hacia la derecha.

Ahora, considerando al cuerpo libre C en la figura 8.7*c*, se observa que las fuerzas que actúan sobre C incluyen la fuerza aplicada **P** y a las fuerzas normales y de fricción en las superficies de contacto con A y con D. El peso de la cuña es pequeño en comparación con las otras fuerzas que están involucradas y, por tanto, puede no tomarse en cuenta. Las fuerzas ejercidas por A sobre C son iguales y opuestas a las fuerzas $\mathbf{N}_2$ y $\mathbf{F}_2$ ejercidas por C sobre A y se representan, respectivamente, por $-\mathbf{N}_2$ y $-\mathbf{F}_2$; por tanto, la fuerza de fricción $-\mathbf{F}_2$ debe estar dirigida hacia la izquierda. Se puede comprobar que la fuerza $\mathbf{F}_3$ ejercida por D también está dirigida hacia la izquierda.

El número total de incógnitas involucradas en los dos diagramas de cuerpo libre pueden reducirse a cuatro si las fuerzas de fricción se expresan en términos de las fuerzas normales. Expresar que el bloque A y la cuña C están en equilibrio, proporcionará cuatro ecuaciones que pueden resolverse para obtener la magnitud de **P**. Se debe señalar que en este ejemplo es más conveniente reemplazar cada par de fuerzas normal y de fricción por su resultante. Entonces, cada cuerpo libre está sometido a tres fuerzas y el problema se puede resolver dibujando los triángulos de fuerzas correspondientes (véase problema resuelto 8.4).

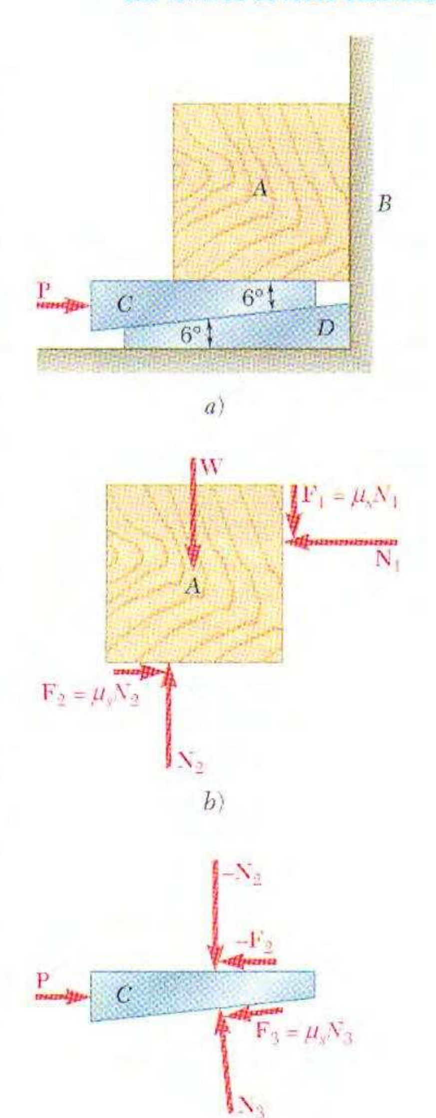


Figura 8.7

8.6. TORNILLOS DE ROSCA CUADRADA

Los tornillos de rosca cuadrada se utilizan en gatos, prensas y otros mecanismos. Su estudio es similar al análisis de un bloque que se desliza a lo largo de un plano inclinado.

En el gato mostrado en la figura 8.8 el tornillo soporta una carga **W** y está apoyado en la base del gato. El contacto entre el tornillo y la base ocu-

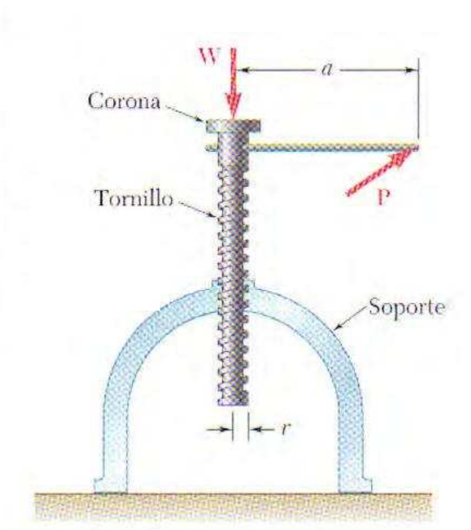


Figura 8.8

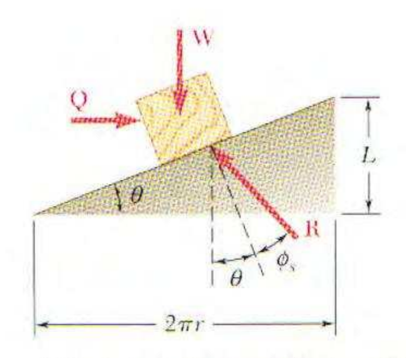
rre a lo largo de una porción de sus roscas. Si se aplica una fuerza **P** sobre el mango, se puede hacer que el tornillo gire y levante a la carga **W**.

La rosca de la base ha sido desenvuelta y se muestra como una línea recta en la figura 8.9*a*. La pendiente correcta de la línea recta se obtuvo al representar de manera horizontal el producto $2\pi r$, donde r es el radio promedio de la rosca y verticalmente el *avance* L del tornillo, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta. El ángulo θ que esta línea forma con la horizontal es el *ángulo de avance*. Como la fuerza de fricción entre dos superficies en contacto no depende del área de contacto, se puede suponer que el área de contacto entre las dos roscas es menor que su valor real y, por tanto, puede representarse al tornillo por medio del bloque que se muestra en la figura 8.9*a*. Sin embargo, es necesario señalar que en este análisis del gato no se toma en cuenta la fricción entre la corona y el tornillo.

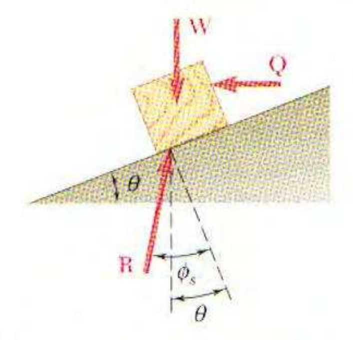


Fotografía 8.2 Como se muestra en la fotografía, las cuñas se emplean para partir troncos de árbol porque las fuerzas normales ejercidas por las cuñas sobre la madera son mucho más grandes que las fuerzas requeridas para insertarlas en el tronco.

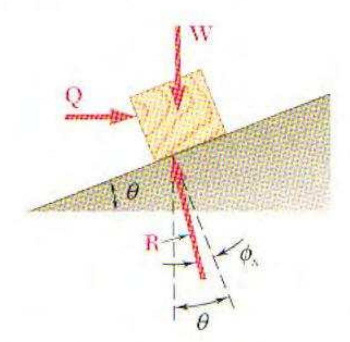
El diagrama de cuerpo libre del bloque debe incluir la carga **W**, la reacción **R** de la rosca de la base y la fuerza horizontal **Q** que tiene el mismo efecto que la fuerza **P** ejercida sobre el mango. La fuerza **Q** debe tener el mismo momento que **P** alrededor del eje del tornillo y, por tanto, su magnitud debe ser $Q = Pa/r$. De esta forma, se puede obtener la fuerza **Q** y, por consiguiente, la fuerza **P** requerida para levantar a la carga **W**, a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 8.9*a*. El ángulo de fricción se toma igual a ϕ_s puesto que se presume que la carga será levantada a través de una serie de golpes pequeños sucesivos. En los mecanismos que proporcionan una rotación continua de un tornillo, puede ser deseable distinguir entre la fuerza requerida para comenzar el movimiento (utilice ϕ_s) y la fuerza requerida para mantener el movimiento (utilice ϕ_k).



a) Movimiento inminente hacia arriba



b) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s > \theta$



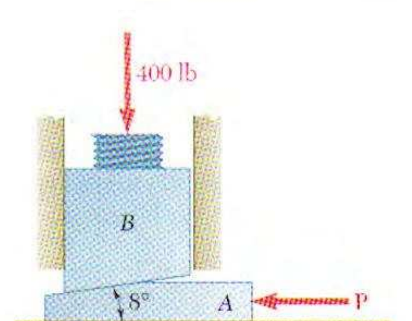
c) Movimiento inminente hacia abajo con $\phi_s < \theta$

Figura 8.9 Análisis de un tornillo como un bloque y un plano inclinado.

Si el ángulo de fricción ϕ_s es mayor que el ángulo de avance θ, se dice que el tornillo es *autobloqueante*; el tornillo permanecerá en su lugar bajo la acción de la carga. Entonces, para bajar la carga, se debe aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9*b*. Si ϕ_s es menor que θ, el tornillo descenderá bajo la acción de la carga; entonces es necesario aplicar la fuerza mostrada en la figura 8.9*c* para mantener el equilibrio.

El avance de un tornillo no se debe confundir con su *paso*. El avance se definió como la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta; el paso es la distancia medida entre dos roscas consecutivas. A pesar de que el avance y el paso son iguales en el caso de tornillos de *rosca simple*, serán diferentes en el caso de tornillos de *rosca múltiple*, esto es, tornillos que tienen varias roscas independientes. Se puede comprobar fácilmente que para tornillos de rosca doble el avance es el doble del paso; para tornillos de rosca triple, el avance es el triple del paso y así de manera sucesiva.

PROBLEMA RESUELTO 8.4

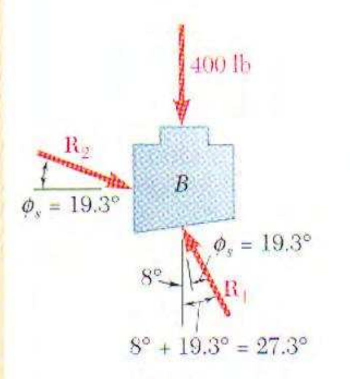


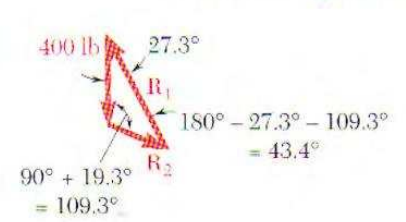
La posición del bloque B de una máquina se ajusta moviendo la cuña A. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es 0.35, determine la fuerza **P** requerida *a*) para elevar el bloque B, *b*) para bajar el bloque B.

SOLUCIÓN

Para cada uno de los incisos del problema se dibujan los diagramas de cuerpo libre del bloque B y de la cuña A con los triángulos de fuerza correspondientes y se emplea la ley de los senos para encontrar las fuerzas deseadas. Se observa que como $\mu_s = 0.35$, el ángulo de fricción es

$$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.3°$$



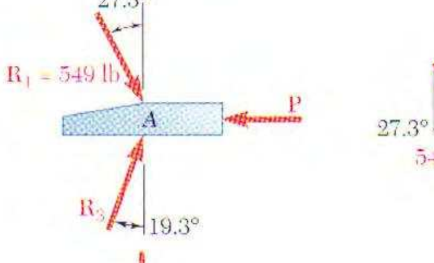


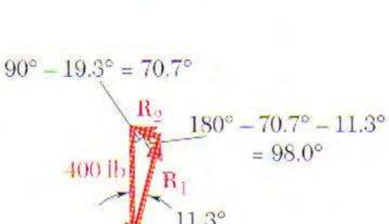
a) Fuerza P para elevar el bloque

Cuerpo libre: Bloque B

$$\frac{R_1}{\text{sen } 109.3°} = \frac{400 \text{ lb}}{\text{sen } 43.4°}$$

$$R_1 = 549 \text{ lb}$$





Cuerpo libre: Cuña A

$$\frac{P}{\text{sen } 46.6°} = \frac{549 \text{ lb}}{\text{sen } 70.7°}$$

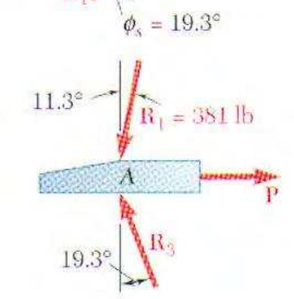
$$P = 423 \text{ lb} \qquad \mathbf{P} = 423 \text{ lb} \leftarrow$$ ◀

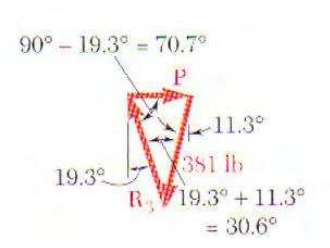
b) Fuerza P para bajar el bloque

Cuerpo libre: Bloque B

$$\frac{R_1}{\text{sen } 70.7°} = \frac{400 \text{ lb}}{\text{sen } 98.0°}$$

$$R_1 = 381 \text{ lb}$$





Cuerpo libre: Cuña A

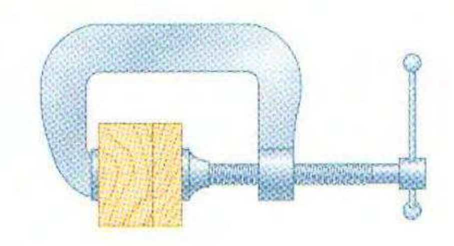
$$\frac{P}{\text{sen } 30.6°} = \frac{381 \text{ lb}}{\text{sen } 70.7°}$$

$$P = 206 \text{ lb} \qquad \mathbf{P} = 206 \text{ lb} \rightarrow$$ ◀

11.3° R1 = 381 lb A P 19.3° R3

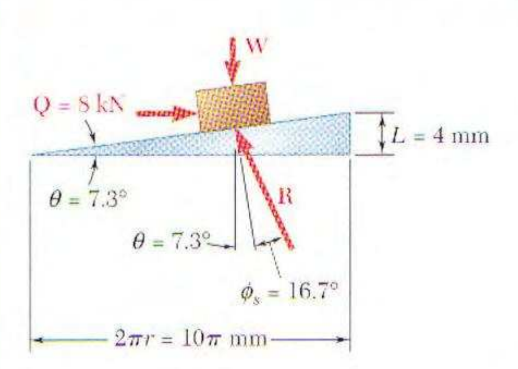
90° – 19.3° = 70.7° P 11.3° 381 lb 19.3° R3 19.3° + 11.3° = 30.6°

PROBLEMA RESUELTO 8.5



Una prensa se utiliza para mantener juntas dos piezas de madera, como se muestra en la figura. La prensa tiene una rosca cuadrada doble cuyo diámetro medio es igual a 10 mm y cuyo paso es de 2 mm. El coeficiente de fricción entre las roscas es $\mu_s = 0.30$. Si se aplica un momento torsional máximo de 40 N · m al apretar la prensa, determine: *a*) la fuerza ejercida sobre las piezas de madera y *b*) el momento torsional requerido para aflojar la prensa.

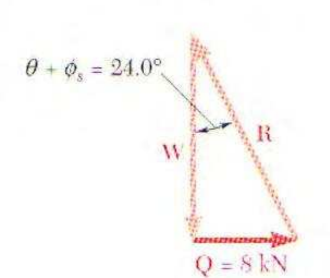
SOLUCIÓN



a) Fuerza ejercida por la prensa. El radio promedio del tornillo es $r = 5$ mm. Como el tornillo es de rosca doble, el avance L es igual al doble del paso: $L = 2(2 \text{ mm}) = 4$ mm. El ángulo de avance θ y el ángulo de fricción ϕ_s se obtienen escribiendo

$$\tan \theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4 \text{ mm}}{10\pi \text{ mm}} = 0.1273 \qquad \theta = 7.3°$$

$$\tan \phi_s = \mu_s = 0.30 \qquad \phi_s = 16.7°$$

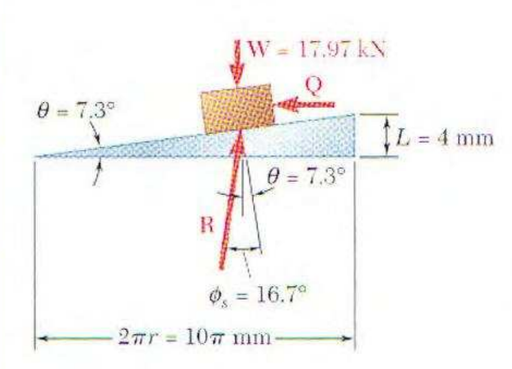


La fuerza **Q** que debe aplicarse al bloque que representa al tornillo se obtiene expresando que su momento Qr con respecto al eje del tornillo es igual al momento torsional aplicado.

$$Q(5 \text{ mm}) = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$Q = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \text{ mm}} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 8\,000 \text{ N} = 8 \text{ kN}$$

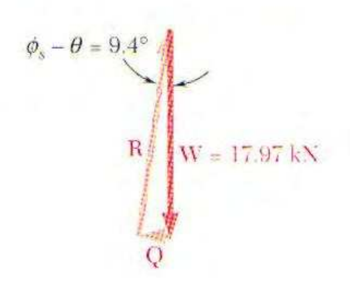
Ahora se pueden dibujar el diagrama de cuerpo libre y el triángulo de fuerzas correspondiente para el bloque; la magnitud de la fuerza **W** ejercida sobre las piezas de madera se obtiene resolviendo el triángulo.



$$W = \frac{Q}{\tan(\theta + \phi_s)} = \frac{8 \text{ kN}}{\tan 24.0°}$$

$W = 17.97$ kN ◀

b) Momento torsional requerido para aflojar la prensa. La fuerza **Q** requerida para aflojar la prensa y el momento torsional correspondiente se obtienen a partir del diagrama de cuerpo libre y del triángulo de fuerzas mostrados.



$$Q = W \tan(\phi_s - \theta) = (17.97 \text{ kN}) \tan 9.4° = 2.975 \text{ kN}$$

$$\text{Momento torsional} = Qr = (2.975 \text{ kN})(5 \text{ mm}) = (2.975 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 14.87 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Momento torsional = 14.87 N · m ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a aplicar las leyes de fricción para la solución de problemas que involucran *cuñas* y *tornillos de rosca cuadrada.*

1. Cuñas. Cuando se resuelve un problema que involucra una cuña se debe tener presente lo siguiente:

a) Primero se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la cuña y de todos los demás cuerpos involucrados. Se debe observar con cuidado el sentido del movimiento relativo de todas las superficies de contacto y se debe mostrar cada una de las fuerzas de fricción actuando en *dirección opuesta* a la dirección del movimiento relativo.

b) Se debe mostrar la fuerza de fricción estática máxima $\mathbf{F}_m$ en cada una de las superficies si la cuña va a ser insertada o removida, *puesto que el movimiento será inminente en cada uno de estos casos.*

c) La reacción R y el ángulo de fricción se pueden utilizar en muchas aplicaciones en lugar de la fuerza normal y la fuerza de fricción. Entonces, se pueden dibujar uno o más triángulos de fuerzas y determinar las cantidades desconocidas, ya sea gráficamente o por medio de la trigonometría [problema resuelto 8.4].

2. *Tornillos de rosca cuadrada.* El análisis de tornillos de rosca cuadrada es equivalente al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado. Para dibujar el plano inclinado correcto, se debe desenrollar la rosca del tornillo y representarla por una línea recta [problema resuelto 8.5]. Cuando se resuelve un problema que involucra un tornillo de rosca cuadrada, se debe tomar en consideración lo siguiente:

a) No confundir el paso de un tornillo con el avance de un tornillo. El *paso* de un tornillo es la distancia entre dos roscas consecutivas mientras que el *avance* de un tornillo es la distancia que avanza el tornillo en una vuelta completa. El avance y el paso son iguales sólo en tornillos de rosca simple. En un tornillo de rosca doble, el avance es el doble del paso.

b) El momento torsional requerido para apretar un tornillo es diferente al momento torsional requerido para aflojarlo. Además, los tornillos que se utilizan en gatos y prensas usualmente son *autobloqueantes*; esto es, el tornillo permanecerá estacionario mientras no se le aplique un momento torsional y es necesario que éste se aplique sobre el tornillo para poder aflojarlo [problema resuelto 8.5].

Problemas

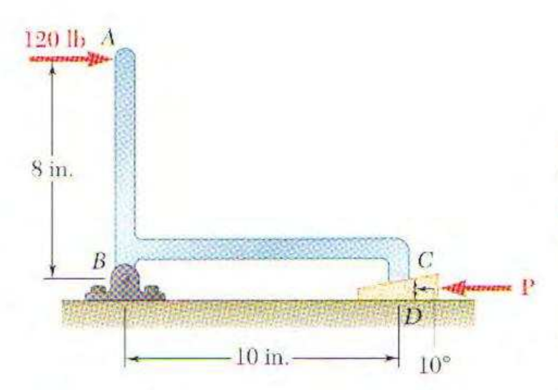


Figura P8.46

8.46 La parte de máquina ABC se sostiene mediante una bisagra sin fricción en B y por medio de una cuña de 10° en C. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.20 en ambas superficies de la cuña, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mover la cuña hacia la izquierda y *b*) las componentes de la reacción correspondiente en B.

8.47 Retome el problema 8.46, y ahora suponga que la cuña debe moverse hacia la derecha.

8.48 y 8.49 Dos cuñas de 8° con masa despreciable se usan para mover y colocar en posición un bloque de 800 kg. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.30, determine la fuerza mínima **P** que debería aplicarse a una de las cuñas, como se muestra en la figura.

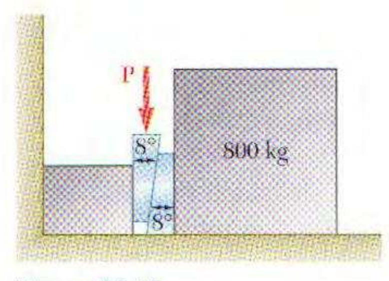


Figura P8.48

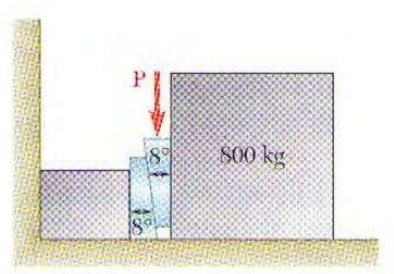


Figura P8.49

8.50* y *8.51 Como se muestra en las figuras, la altura del extremo de la viga de acero que está sostenida por el piso de concreto se ajusta mediante las cuñas E y F. La base de la placa CD se suelda al patín inferior de la viga y también se conoce que la reacción sobre el extremo de la misma es de 100 kN. El coeficiente de fricción estática entre las superficies de acero es de 0.30 y entre el concreto y el acero es de 0.60. Si el movimiento horizontal de la viga se evita mediante la fuerza **Q**, determine *a*) la fuerza **P** requerida para levantar la viga y *b*) la fuerza **Q** correspondiente.

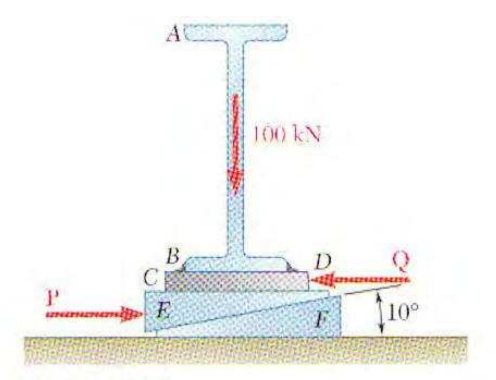


Figura *P8.50*

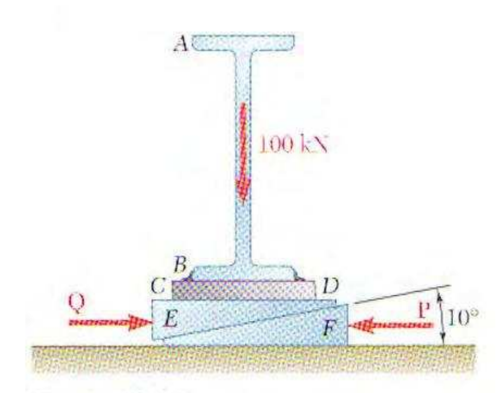


Figura *P8.51*

8.52 Una cuña A de peso despreciable se va a meter entre dos placas B y C de 100 lb. El coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.35. Determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento de la cuña *a*) si las placas tienen la misma libertad para moverse, *b*) si la placa C se atornilla de manera segura a la superficie.

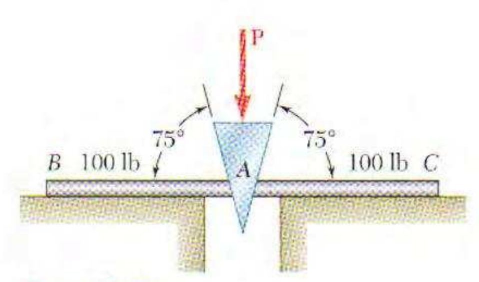


Figura P8.52

8.53 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y que $\theta = 45°$, determine la fuerza mínima **P** requerida para levantar el bloque A.

8.54 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y que $\theta = 45°$, determine la fuerza mínima **P** para la cual se mantiene el equilibrio.

8.55 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuña B. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25. Si $\mathbf{P} = 0$, determine *a*) el ángulo θ para el cual el deslizamiento es inminente, *b*) la fuerza correspondiente ejercida por la pared vertical sobre el bloque.

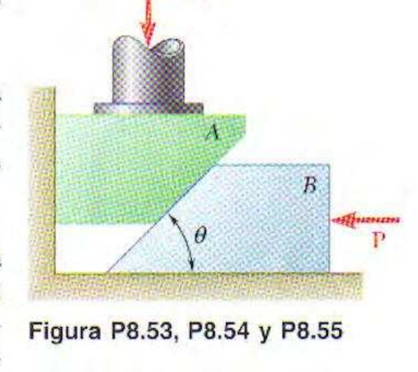


Figura P8.53, P8.54 y P8.55

8.56 Una cuña de 12° se usa para separar un anillo partido. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el anillo es de 0.30. Si se sabe que fue necesaria una fuerza **P** con magnitud de 25 lb para insertar la cuña, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas por la cuña sobre el anillo después de su inserción.

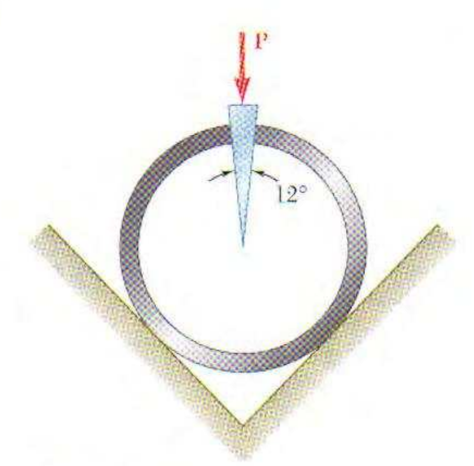


Figura P8.56

8.57 Una cuña de 10° debe insertarse debajo del extremo B de la barra AB de 5 kg que se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre la cuña y la barra y de 0.20 entre la cuña y el piso, determine la fuerza mínima **P** requerida para levantar el extremo B de la barra.

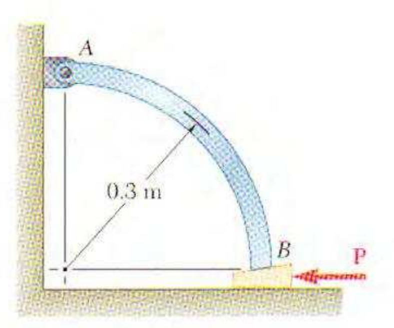


Figura P8.57

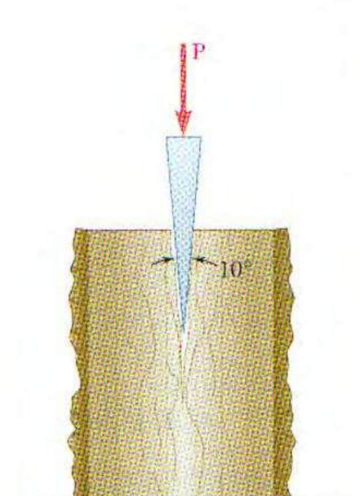


Figura *P8.58*

8.58 En la figura se muestra una cuña de 10° que se usa para partir un tronco. El coeficiente de fricción estática entre la cuña y el tronco es de 0.35. Si se sabe que se requirió una fuerza **P** de 600 lb de magnitud para insertar la cuña, determine la magnitud de las fuerzas ejercidas por la cuña sobre la madera después de que fue insertada.

8.59 En la figura se muestra una cuña de forma cónica colocada entre dos placas horizontales que se mueven lentamente una hacia la otra. Muestre qué le pasará a la cuña si *a*) $\mu_s = 0.20$ y *b*) $\mu_s = 0.30$.

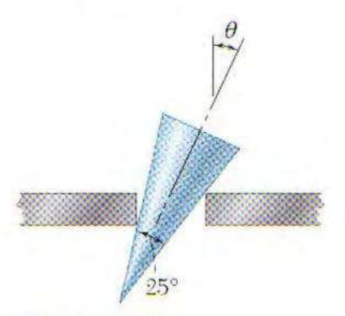


Figura *P8.59*

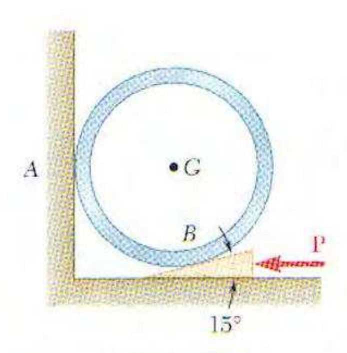


Figura P8.60 y P8.61

8.60 Una cuña de 15° se introduce por debajo de un tubo de 50 kg como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies es de 0.20. *a*) Demuestre que se presentará deslizamiento entre el tubo y la pared vertical. *b*) Determine la fuerza **P** requerida para mover la cuña.

8.61 Una cuña de 15° se introduce por debajo de un tubo de 50 kg como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en ambas superficies de la cuña es de 0.20, determine el coeficiente máximo de fricción estática entre el tubo y la pared vertical para que ocurra deslizamiento en *A*.

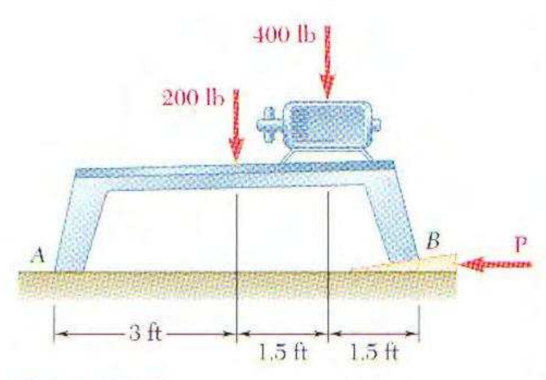


Figura P8.62

8.62 En la figura se muestra una cuña de 8° que debe insertarse por debajo de una base para máquina en *B*. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.15, *a*) determine la fuerza **P** requerida para iniciar el movimiento de la cuña y *b*) indique si la base para máquina se deslizará sobre el piso.

8.63 Retome el problema 8.62, y ahora suponga que la cuña debe insertarse debajo de la base para máquina en *A* en lugar de en *B*.

***8.64** Un bloque de 200 N se apoya sobre una cuña de peso despreciable, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en ambas superficies de la cuña, y la fricción entre el bloque y la pared vertical se puede despreciar. Si se sabe que $P = 100$ N, determine el valor de μ_s para el cual el movimiento es inminente. (*Sugerencia*: Resuelva por prueba y error la ecuación obtenida.)

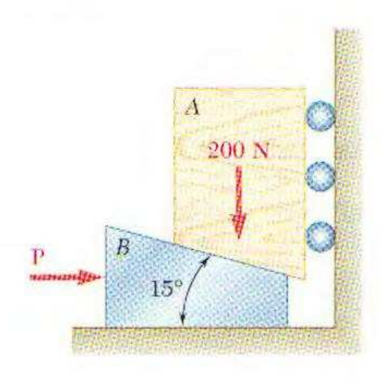


Figura P8.64

***8.65** Retome el problema 8.64, y ahora suponga que los rodillos se retiran y que μ_s es el coeficiente de fricción para todas la superficies de contacto.

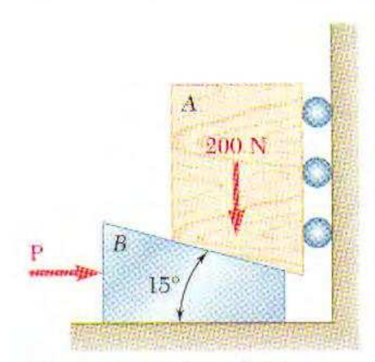


Figura P8.64 (*repetida*)

8.66 Deduzca las siguientes fórmulas que relacionan la carga **W** y la fuerza **P** ejercida sobre el mango del gato que se expuso en la sección 8.6. *a*) $P = (Wr/a) \tan (\theta + \phi_s)$, para levantar la carga; *b*) $P = (Wr/a) \tan (\phi_s - \theta)$, para bajar la carga si el tornillo es autobloqueante y *c*) $P = (Wr/a) \tan (\theta + \phi_s)$, para sostener la carga si el tornillo no es autobloqueante.

8.67 El engrane sinfín de rosca cuadrada que se muestra en la figura tiene un radio medio de 1.5 in. y un avance de 0.375 in. El engrane más grande está sometido a un par de torsión constante de 7.2 kip · in. en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre los dos engranes es de 0.12, determine el par de torsión que debe aplicarse al eje *AB* para que el engrane más grande rote en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj. No tome en cuenta la fricción de los cojinetes en *A*, *B* y *C*.

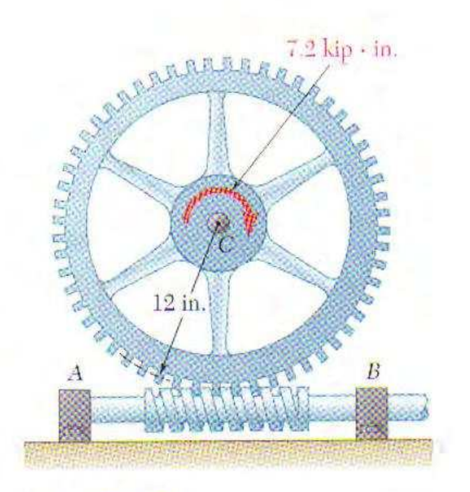


Figura ***P8.67***

8.68 En el problema 8.67 determine el par de torsión que debe aplicarse al eje *AB* para que el engrane más grande rote en el sentido de las manecillas del reloj.

8.69 Los pernos de alta resistencia se emplean comúnmente en la construcción de muchas estructuras de acero. Si la tensión mínima requerida en un perno de 24 mm de diámetro nominal es de 210 kN y se supone que el coeficiente de fricción estática es de 0.40, determine el par de torsión requerido que debe aplicarse en el perno y en la tuerca mostrados en la figura. El diámetro medio de la rosca del perno es de 22.6 mm, y su avance es de 3 mm. No tome en cuenta la fricción entre la tuerca y la arandela y suponga que el perno es de rosca cuadrada.

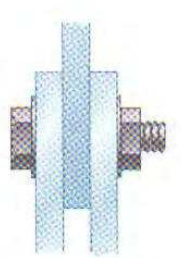


Figura P8.69

8.70 En la figura se muestran dos barras fijas *A* y *B* cuyos extremos fueron hechos con forma de tornillo de rosca sencilla de 6 mm de radio medio y un paso de 2 mm. La barra *A* tiene rosca derecha mientras que la barra *B* tiene rosca izquierda. El coeficiente de fricción estática entre las barras y el manguito roscado es de 0.12. Determine la magnitud del par que debe aplicarse en el manguito para que las dos barras se unan.



Figura P8.70

8.71 Suponga que en el problema 8.70 se usa una rosca derecha en *las dos* barras *A* y *B*. Determine la magnitud del par que debe aplicarse en el manguito para poder girarlo.

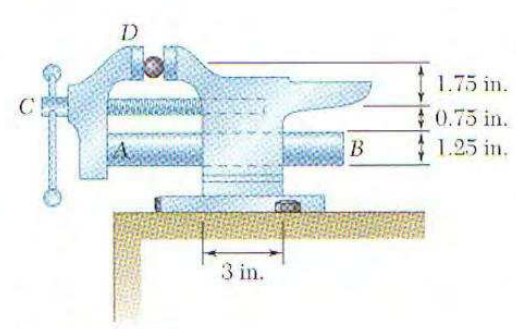


Figura P8.72

8.72 En la prensa de mecánico que se muestra en la figura, la quijada D está rígidamente unida a la lengüeta AB, que entra de manera holgada en el cuerpo fijo de la prensa. El tornillo tiene rosca sencilla y entra en la base fija con un diámetro medio de 0.75 in. y un paso de 0.25 in. El coeficiente de fricción estática es de 0.25 entre las roscas y también entre la lengüeta y el cuerpo. Desprecie la fricción de apoyo entre el tornillo y la quijada móvil y determine el par que debe aplicarse al mango para producir una fuerza de compresión de 1 kip.

8.73 En el problema 8.72 se obtuvo una fuerza de compresión de 1 kip al apretar la prensa. Determine el par que debe aplicarse al tornillo para aflojar la prensa.

8.74 En la figura se muestra un sistema de extracción de engranes en el cual el tornillo AB de rosca cuadrada tiene un radio medio de 15 mm y un avance de 4 mm. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.10, determine el par de torsión que debe aplicarse al tornillo para generar una fuerza de 3 kN sobre el engrane. No tome en cuenta la fricción en el extremo A del tornillo.

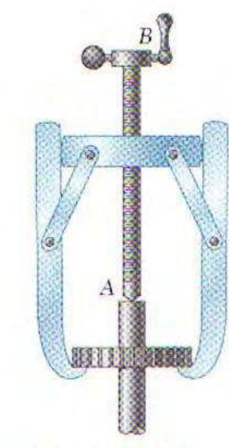


Figura *P8.74*

*8.7. CHUMACERAS. FRICCIÓN EN EJES

Las chumaceras se utilizan para proporcionar soporte lateral a flechas y ejes en rotación. Los cojinetes de empuje, que se estudiarán en la siguiente sección, se usan para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes. Si la chumacera está totalmente lubricada, la resistencia por fricción depende de la velocidad de rotación, del juego entre el eje y la chumacera, y de la viscosidad del lubricante. Como se indicó en la sección 8.1, los problemas de este tipo se estudian en la mecánica de fluidos. Sin embargo, los métodos de este capítulo pueden aplicarse al estudio de la fricción en ejes cuando la chumacera no está lubricada o sólo se lubrica parcialmente. Entonces, se puede suponer que el eje y la chumacera están en contacto directo a lo largo de una sola línea recta.

Considere dos ruedas, cada una de peso $\mathbf{W}$, las cuales están montadas rígidamente sobre un eje soportado de manera simétrica por dos chumaceras (figura 8.10*a*). Si las ruedas giran, se encuentra que, para mantenerlas rotando a una velocidad constante, es necesario aplicarle a cada una un par $\mathbf{M}$. El diagrama de cuerpo libre de la figura 8.10*c* representa la proyección de una de las ruedas y de la mitad del eje correspondiente sobre un plano perpendicular al eje. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre incluyen el peso $\mathbf{W}$ de la rueda, el par $\mathbf{M}$ requerido para mantener su movimiento, y una fuerza $\mathbf{R}$ que representa la reacción de la chumacera. Esta última fuerza es vertical, igual y opuesta a $\mathbf{W}$, pero no pasa por el centro O del eje; $\mathbf{R}$ está localizada a la derecha de O a una distancia tal que su momento respecto a O equilibra el momento $\mathbf{M}$ del par. Por tanto, el contacto entre el eje y la chumacera no ocurre en el punto A más bajo cuando el eje está girando. El contacto ocurre en el punto B (figura 8.10*b*) o, mejor dicho, a lo largo de una línea recta que interseca al plano de la figura en el punto B. Físicamente, esto se explica por el hecho de que, cuando las ruedas se ponen en movimiento, el eje "se eleva" en la chumacera hasta que ocurre un deslizamiento. Después de resbalarse un poco hacia atrás, el eje queda más o menos en la posición mostrada. Esta posición es tal que el ángulo entre la reacción $\mathbf{R}$ y la normal a la superficie del cojinete es igual al ángulo de fricción cinética ϕ_k. Por tanto, la distancia desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{R}$ es igual a r sen

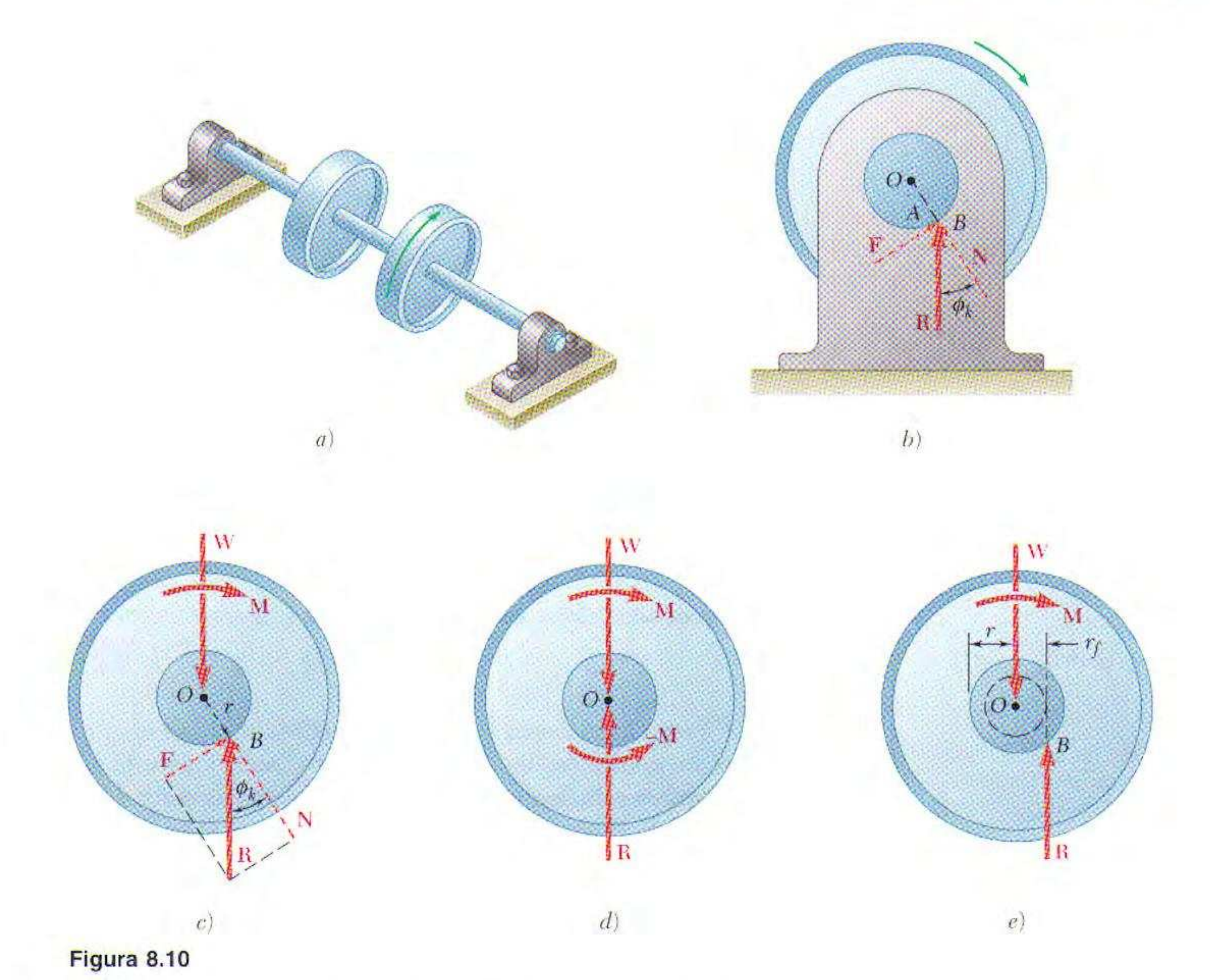


Figura 8.10

ϕ_k, donde r es el radio del eje. Si se escribe que $\Sigma M_O = 0$ para las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre considerado, se obtiene la magnitud del par **M** requerido para vencer la resistencia por fricción de una de las chumaceras:

$$M = Rr \text{ sen } \phi_k \qquad (8.5)$$

Observe que para valores pequeños del ángulo de fricción, sen ϕ_k se puede reemplazar por tan ϕ_k, esto es, por μ_k, se escribe la fórmula aproximada

$$M \approx Rr\mu_k \qquad (8.6)$$

En la solución de ciertos problemas puede ser más conveniente hacer que la línea de acción de **R** pase a través de O, como lo hace cuando el eje no está girando. Entonces, se debe agregar a la reacción **R** un par $-\mathbf{M}$ de la misma magnitud que el par **M** pero de sentido opuesto (figura 8.10*d*), dicho par representa la resistencia por fricción de la chumacera.

En caso de que se prefiera una solución gráfica, la línea de acción de **R** se puede dibujar fácilmente (figura 8.10*e*) si se observa que ésta debe ser tangente a un círculo que tiene su centro en O y cuyo radio está dado por

$$r_f = r \text{ sen } \phi_k \approx r\mu_k \qquad (8.7)$$

Dicho círculo recibe el nombre de *círculo de fricción* del eje y la chumacera y es independiente de las condiciones de carga del eje.

*8.8. COJINETES DE EMPUJE. FRICCIÓN EN DISCOS

Para proporcionarle soporte axial a las flechas y a los ejes que giran se utilizan dos tipos de cojinetes de empuje: 1) *cojinetes de tope* o *frontales* y 2) *cojinetes de collar* o *radiales* (figura 8.11). En el caso de los cojinetes de collar se desarrollan fuerzas de fricción entre las dos áreas en forma de anillo que están en contacto. En el caso de los cojinetes de tope la fricción ocurre sobre áreas circulares completas o sobre áreas en forma de anillo cuando el extremo de la flecha es hueco. La fricción entre áreas circulares, denominada *fricción en discos*, también ocurre en otros mecanismos como los *embragues de disco*.

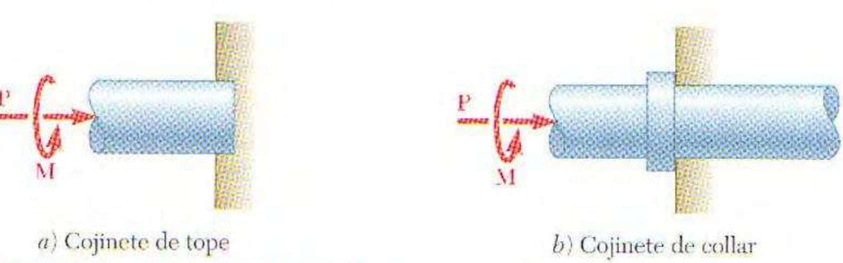


Figura 8.11 Cojinetes de empuje.

Para obtener una fórmula que sea válida en el caso más general de fricción en discos, considere una flecha hueca que está girando. Un par **M** mantiene la flecha girando a una velocidad constante mientras que una fuerza **P** la mantiene en contacto con un cojinete fijo (figura 8.12).

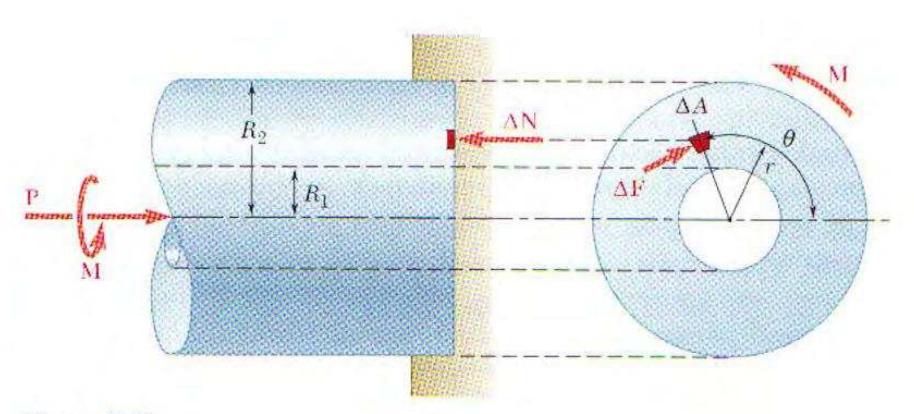


Figura 8.12

El contacto entre la flecha y el cojinete ocurre sobre un área en forma de anillo que tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2. Suponiendo que la presión entre las dos superficies en contacto es uniforme, se encuentra que la magnitud de la fuerza normal $\Delta\mathbf{N}$ ejercida sobre un elemento de área ΔA está dada por $\Delta N = P\,\Delta A/A$, donde $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ y que la magnitud de la fuerza de fricción $\Delta\mathbf{F}$ que actúa sobre ΔA es $\Delta F = \mu_k\,\Delta N$. Si se representa con r la distancia desde el eje de la flecha hasta el elemento de área ΔA, se expresa la magnitud ΔM del momento de $\Delta\mathbf{F}$ con respecto al eje de la flecha de la siguiente forma:

$$\Delta M = r\,\Delta F = \frac{r\mu_k P\,\Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

El equilibrio de la flecha requiere que el momento **M** del par aplicado a ésta sea igual en magnitud a la suma de los momentos de las fuerzas de fricción $\Delta\mathbf{F}$. Reemplazando ΔA por el elemento infinitesimal $dA = r\, d\theta\, dr$ que se utiliza con las coordenadas polares e integrando sobre el área de contacto se obtiene la siguiente expresión para la magnitud del par **M** que se requiere para vencer la resistencia por fricción del cojinete:

$$M = \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{3}(R_2^3 - R_1^3)\, d\theta$$

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k P \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \tag{8.8}$$

Cuando el contacto ocurre sobre un círculo completo de radio R, la fórmula (8.8) se reduce a

$$M = \tfrac{2}{3}\mu_k P R \tag{8.9}$$

Entonces el valor de M es el mismo que el que se hubiera obtenido si el contacto entre la flecha y el cojinete hubiera ocurrido en un solo punto localizado a una distancia de $2R/3$ desde el eje de la flecha.

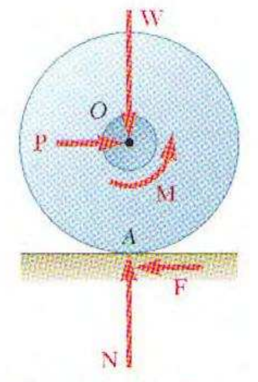
El momento torsional máximo que puede ser transmitido por un embrague de disco sin causar deslizamiento está dado por una fórmula similar a la ecuación (8.9), donde μ_k se reemplaza por el coeficiente de fricción estática μ_s.



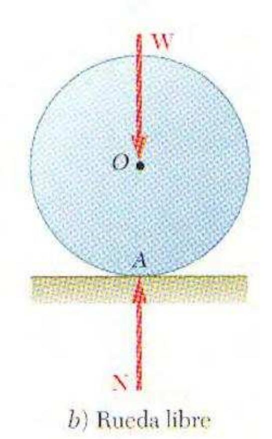
*8.9. FRICCIÓN EN RUEDAS. RESISTENCIA A LA RODADURA O RODAMIENTO

La rueda es uno de los inventos más importantes de nuestra civilización. Su uso hace que sea posible mover cargas pesadas con un esfuerzo relativamente pequeño. Debido a que el punto de la rueda que está en contacto con el suelo en cualquier instante no tiene un movimiento relativo con respecto del suelo, la rueda elimina las grandes fuerzas de fricción que se presentarían si la carga estuviera en contacto directo con el suelo. Sin embargo, existe cierta resistencia al movimiento de la rueda. Dicha resistencia tiene dos causas distintas: 1) el efecto combinado de la fricción en el eje y de la fricción en el aro y 2) el hecho de que la rueda y el suelo se deforman, ocasionando que el contacto entre la rueda y el suelo ocurra sobre una cierta área en lugar de ocurrir en un solo punto.

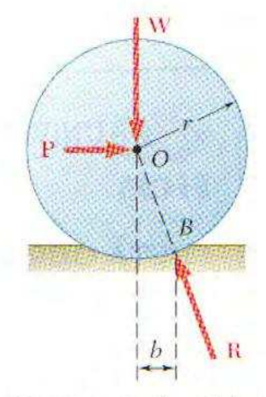
Para comprender mejor la primera causa de resistencia al movimiento de una rueda, considérese un vagón de ferrocarril que está soportado por ocho ruedas que están montadas en ejes y cojinetes. Se supone que el vagón se está moviendo hacia la derecha a una velocidad constante a lo largo de una vía horizontal recta. El diagrama de cuerpo libre de una de las ruedas se muestra en la figura 8.13*a*. Las fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre incluyen la car-



a) Efecto de la fricción en ejes



b) Rueda libre



c) Resistencia a la rodadura

Figura 8.13

ga **W** soportada por la rueda y la reacción normal **N** de la vía. Como **W** está dibujada a través del centro *O* del eje, la resistencia por fricción del cojinete debe representarse con un par **M** que tiene un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (véase sección 8.7). Para mantener al cuerpo en equilibrio, se deben agregar dos fuerzas iguales y opuestas **P** y **F**, las cuales forman un par con un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj que tiene un momento $-\mathbf{M}$. La fuerza **F** es la fuerza de fricción ejercida por la vía sobre la rueda y **P** representa la fuerza que debe aplicarse a la rueda para que ésta se mantenga rodando a velocidad constante. Observe que las fuerzas **P** y **F** no existirían en el caso de que no hubiera fricción entre la rueda y la vía. Entonces, el par **M** que representa la fricción en el eje sería igual a cero; por tanto, la rueda se deslizaría sobre la vía sin girar en su cojinete.

El par **M** y las fuerzas **P** y **F** también se reducen a cero cuando no existe fricción en el eje. Por ejemplo, una rueda que no está sostenida por cojinetes y que rueda libremente a una velocidad constante sobre un piso horizontal (figura 8.13*b*) estará sujeta únicamente a dos fuerzas: su propio peso **W** y la reacción normal **N** del piso. Sin importar cuál sea el valor del coeficiente de fricción entre la rueda y el piso, no actuará una fuerza de fricción sobre la rueda. Por tanto, una rueda que gira libremente sobre una superficie horizontal debería continuar rodando indefinidamente.

Sin embargo, la experiencia indica que la rueda irá disminuyendo su velocidad hasta detenerse. Lo anterior se debe al segundo tipo de resistencia mencionado al principio de esta sección, el cual se conoce como la *resistencia a la rodadura*. Bajo la acción de la carga **W**, tanto la rueda como el piso se deforman ligeramente y ocasiona que el contacto entre la rueda y el piso ocurra sobre cierta área. La evidencia experimental muestra que la resultante de las fuerzas ejercidas por el piso sobre la rueda a lo largo de dicha área es una fuerza **R** aplicada en un punto *B*, el cual no está localizado directamente por debajo del centro *O* de la rueda, sino que se encuentra ligeramente hacia el frente de la rueda (figura 8.13*c*). Para equilibrar el momento de **W** con respecto a *B* y para mantener a la rueda rodando a velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza horizontal **P** en el centro de la rueda. Si se escribe $\Sigma M_B = 0$, se obtiene

$$Pr = Wb \tag{8.10}$$

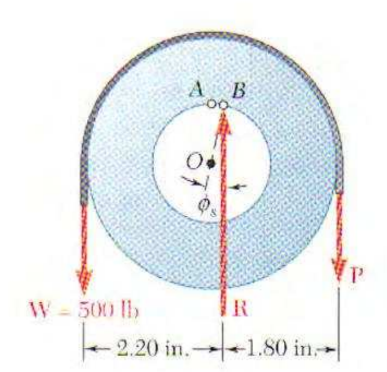
donde r = radio de la rueda
b = distancia horizontal entre O y B

La distancia b recibe el nombre de *coeficiente de resistencia a la rodadura*. Es necesario señalar que b no es un coeficiente adimensional puesto que representa una longitud; por lo general, se expresa a b en pulgadas o en milímetros. El valor de b depende de varios parámetros en forma que aún no se ha establecido claramente. Los valores del coeficiente de resistencia a la rodadura varían desde alrededor de 0.01 in. o 0.25 mm para una rueda de acero en un riel de acero hasta 5.0 in. o 125 mm para la misma rueda sobre un piso blando.

PROBLEMA RESUELTO 8.6

Una polea que tiene un diámetro de 4 in. puede girar alrededor de una flecha fija que tiene un diámetro de 2 in. El coeficiente de fricción estática entre la polea y la flecha es de 0.20. Determine: *a*) la fuerza vertical mínima **P** requerida para comenzar a levantar una carga de 500 lb, *b*) la fuerza vertical mínima **P** requerida para sostener la carga y *c*) la fuerza horizontal mínima **P** requerida para comenzar a levantar la misma carga.

SOLUCIÓN

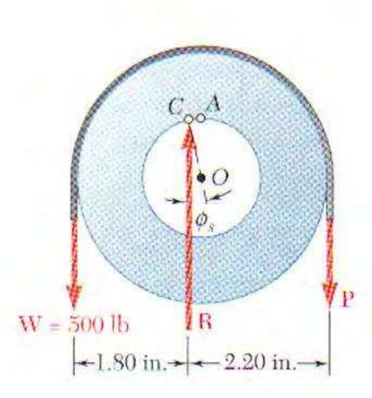


***a*) Fuerza vertical P requerida para comenzar a levantar la carga.** Cuando las fuerzas en ambas partes de la cuerda son iguales, el contacto entre la flecha y la polea ocurre en *A*. Cuando se incrementa la fuerza **P**, la polea gira ligeramente alrededor de la flecha y el contacto ocurre en *B*. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea cuando el movimiento es inminente. La distancia perpendicular desde el centro *O* de la polea hasta la línea de acción de **R** es

$$r_f = r \text{ sen } \phi_s \approx r\mu_s \qquad r_f \approx (1 \text{ in.})0.20 = 0.20 \text{ in.}$$

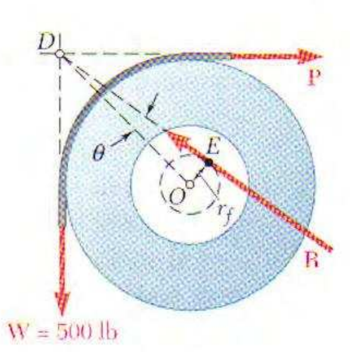
Sumando momentos con respecto a *B*, se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \qquad (2.20 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (1.80 \text{ in.})P = 0$$
$$P = 611 \text{ lb} \qquad \mathbf{P} = 611 \text{ lb} \downarrow \blacktriangleleft$$



***b*) Fuerza vertical P para sostener la carga.** A medida que la fuerza **P** disminuye, la polea gira alrededor de la flecha y el contacto ocurre en *C*. Considerando la polea como un cuerpo libre y sumando momentos con respecto a *C*, se escribe

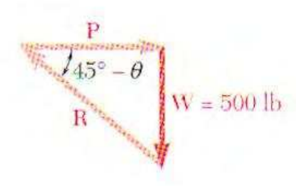
$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \qquad (1.80 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (2.20 \text{ in.})P = 0$$
$$P = 409 \text{ lb} \qquad \mathbf{P} = 409 \text{ lb} \downarrow \blacktriangleleft$$



***c*) Fuerza horizontal P para comenzar a levantar la carga.** Como las tres fuerzas **W**, **P** y **R** no son paralelas, éstas deben ser concurrentes. Por tanto, la dirección de **R** se determina a partir del hecho de que su línea de acción debe pasar a través del punto de intersección *D* de las líneas de acción de **W** y **P** y debe ser tangente al círculo de fricción. Si recordamos que el radio del círculo de fricción es $r_f = 0.20$ in., se escribe



$$\text{sen } \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{0.20 \text{ in.}}{(2 \text{ in.})\sqrt{2}} = 0.0707 \qquad \theta = 4.1°$$



A partir del triángulo de fuerzas, se obtiene

$$P = W \cot (45° - \theta) = (500 \text{ lb}) \cot 40.9°$$
$$= 577 \text{ lb} \qquad \mathbf{P} = 577 \text{ lb} \rightarrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendieron varias aplicaciones de ingeniería adicionales de las leyes de fricción.

1. ***Chumaceras y fricción en ejes.*** En las chumaceras la *reacción no pasa a través del centro de la flecha o eje* que está siendo soportado. La distancia desde el centro de la flecha o eje hasta la línea de acción de la reacción (figura 8.10) está definida por la ecuación

$$r_f = r \text{ sen } \phi_k \approx r\mu_k$$

si existe movimiento, y por la ecuación

$$r_f = r \text{ sen } \phi_s \approx r\mu_s$$

si el movimiento es inminente.

Cuando ya se ha determinado la línea de acción de la reacción, se puede dibujar un *diagrama de cuerpo libre* y utilizar las ecuaciones de equilibrio correspondientes para completar la solución [problema resuelto 8.6]. En algunos problemas es útil observar que la línea de acción de la reacción debe ser tangente a un círculo de radio $r_f \approx r\mu_k$, o $r_f \approx r\mu_s$, que se conoce como el *círculo de fricción* [problema resuelto 8.6, inciso *c*)].

2. ***Cojinetes de empuje y fricción en discos.*** En un *cojinete de empuje* la magnitud del par requerido para vencer a la resistencia por fricción es igual a la suma de los momentos de las *fuerzas de fricción cinética* ejercidas sobre los elementos del extremo de la flecha [ecuaciones (8.8) y (8.9)].

Un ejemplo de fricción en discos es el *embrague de disco*. Éste se analiza de la misma forma que un cojinete de empuje, con la diferencia de que para determinar el momento torsional máximo que se puede transmitir, debe calcularse la suma de los momentos de las *fuerzas de fricción estática máximas* ejercidas sobre el disco.

3. ***Fricción en ruedas y resistencia a la rodadura.*** Se vio que la resistencia a la rodadura de una rueda es ocasionada por deformaciones tanto de la rueda como del suelo. La línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda intersecta al suelo a una distancia horizontal b a partir del centro de la rueda. La distancia b se conoce como el *coeficiente de resistencia a la rodadura* y se expresa en pulgadas o milímetros.

4. ***En problemas que involucran tanto resistencia a la rodadura como fricción en ejes,*** el diagrama de cuerpo libre debe mostrar que la línea de acción de la reacción **R** del suelo sobre la rueda es tangente al círculo de fricción del eje e intersecta al suelo a una distancia horizontal a partir del centro de la rueda que es igual al coeficiente de resistencia a la rodadura.

Problemas

8.75 Una polea de 6 in. de radio y una masa de 5 lb se fija a un eje de 1.5 in. de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo mostrado en la figura. Se observa que la polea comenzará a rotar si se agrega una masa de 0.5 lb al bloque *A*. Determine el coeficiente de fricción estática entre el eje y el cojinete.

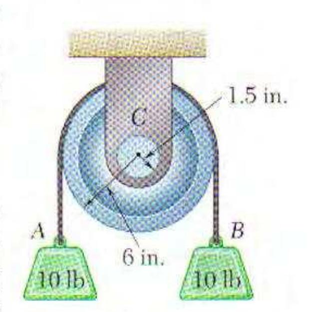


Figura P8.75

8.76 y 8.77 La polea doble mostrada en la figura se fija en un eje de 10 mm de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el cojinete casi sin lubricar, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para comenzar a levantar la carga.

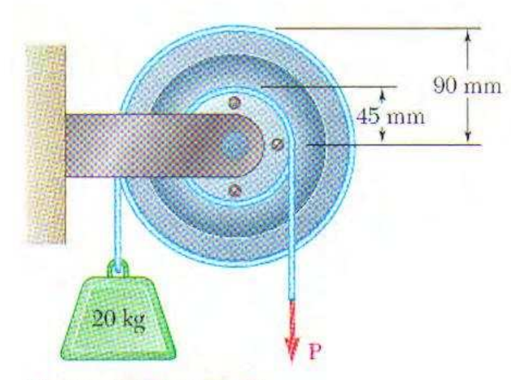


Figura P8.76 y P8.78

8.78 y 8.79 La polea doble mostrada en la figura se fija en un eje de 10 mm de radio, el cual se ajusta holgadamente al cojinete fijo. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el cojinete casi sin lubricar, determine la magnitud de la fuerza mínima **P** requerida para mantener el equilibrio.

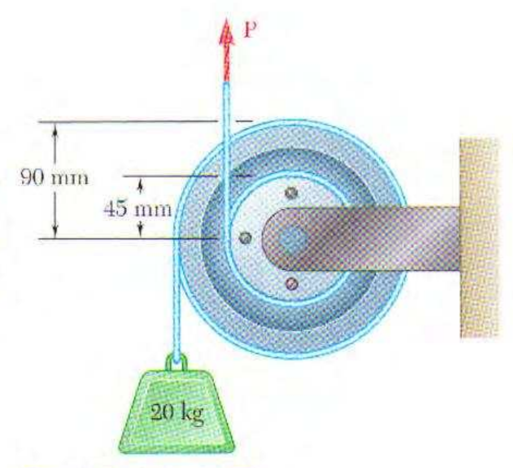


Figura P8.77 y P8.79

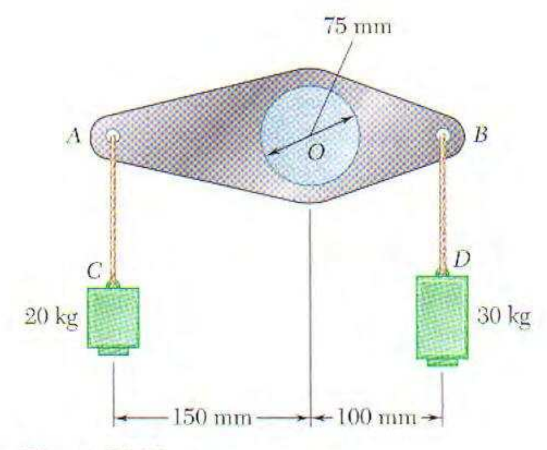


Figura P8.80

8.80 Una palanca de peso despreciable se ajusta holgadamente a un eje fijo de 75 mm de diámetro. Se observa que la palanca iniciará su rotación justo al agregar una masa de 3 kg en *C*. Determine el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca.

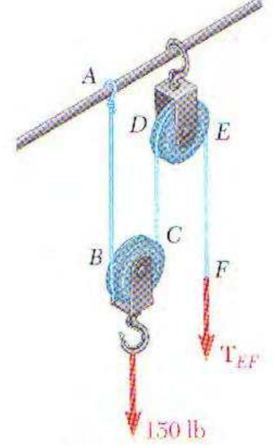
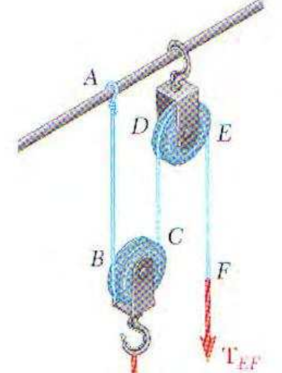



Figura *P8.81* y P.8.82

8.81 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para levantar una carga de 150 lb. Cada una de las poleas de 3 in. de diámetro gira sobre un eje de 0.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada porción de la cuerda conforme la carga se eleva lentamente.

8.82 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para bajar una carga de 150 lb. Cada una de las poleas de 3 in. de diámetro gira sobre un eje de 0.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada porción de la cuerda conforme la carga se baja lentamente.

8.83 Un vagón de ferrocarril cargado tiene una masa de 30 Mg y se sostiene por medio de ocho ruedas de 800 mm de diámetro con ejes de 125 mm de diámetro. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.020$ y $\mu_k = 0.015$, determine la fuerza horizontal requerida para *a*) que el vagón comience a moverse y *b*) mantener al vagón en movimiento a velocidad constante. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y las vías.

***8.84* y 8.85** En las figuras se muestra una palanca *AB* de peso despreciable que se ajusta holgadamente a un eje fijo de 2.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza **P** necesaria para que se inicie la rotación de la palanca en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

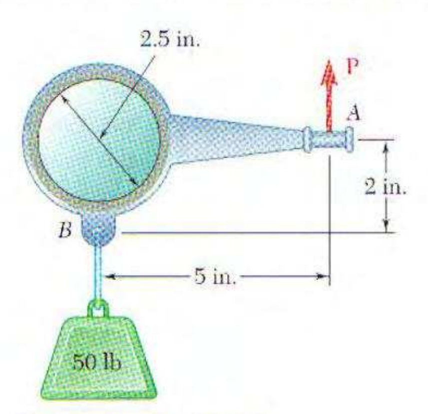


Figura *P8.84* y P.8.86

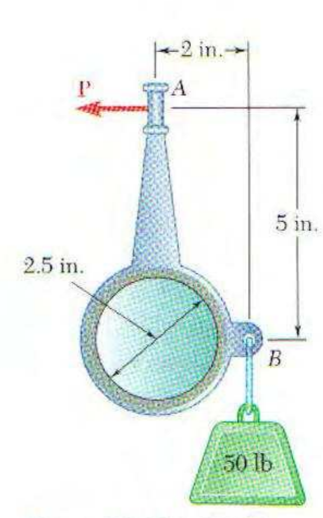


Figura P8.85 y P.8.87

8.86 y 8.87 En las figuras se muestra una palanca *AB* de peso despreciable que se ajusta holgadamente a un eje fijo de 2.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza **P** necesaria para que se inicie la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj.

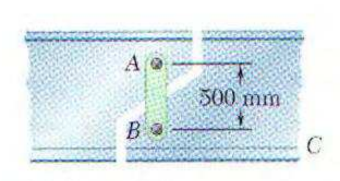


Figura P8.88

8.88 El arreglo de eslabón mostrado en la figura se emplea frecuentemente en los puentes de las carreteras para permitir la expansión de los elementos debido a los cambios de temperatura. El coeficiente de fricción estática en cada uno de los pernos *A* y *B* de 60 mm de diámetro es de 0.20. Si se sabe que la componente vertical de la fuerza ejercida por *BC* sobre el eslabón es de 200 kN, determine *a*) la fuerza horizontal que debe aplicarse sobre la viga *BC* para que el eslabón comience a moverse y *b*) el ángulo que la fuerza resultante ejercida por la viga *BC* sobre el eslabón forma con la vertical.

8.89 Se desea diseñar una patineta que pueda descender con velocidad constante sobre una superficie con inclinación de 2 por ciento. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre los ejes de 25 mm de diámetro y los cojinetes es de 0.10, determine el diámetro que deben tener las ruedas. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y el suelo.

8.90 En la figura se muestra una pulidora de pisos eléctrica de 50 lb que se emplea sobre una superficie con un coeficiente de fricción cinética de 0.25. Si la fuerza normal por unidad de área entre el disco y el piso se distribuye uniformemente, determine la magnitud Q de las fuerzas horizontales requeridas para evitar que la pulidora se mueva.

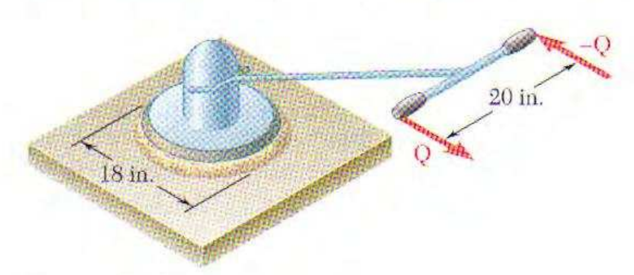


Figura P8.90

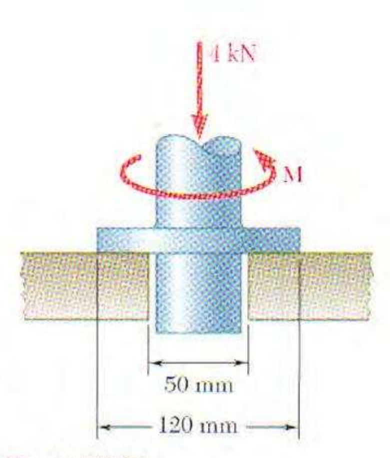


Figura P8.91

8.91 Si se sabe que es necesario aplicar un par con 30 N · m de magnitud para que el eje vertical comience a moverse, determine el coeficiente de fricción estática entre las superficies de contacto anulares.

***8.92** En las chumaceras la resistencia por fricción decrece a medida que las superficies de los ejes y de los cojinetes sufren desgaste. Por lo general se supone que el desgaste es directamente proporcional a la distancia recorrida por cualquier punto dado del eje y, en consecuencia, a la distancia r desde el punto al centro del eje. Entonces, si se supone que la fuerza normal por unidad de área es inversamente proporcional a r, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de uno de los extremos desgastados del cojinete (con contacto en toda el área circular) es igual al 75 por ciento del valor dado en la fórmula (8.9) para un cojinete nuevo.

***8.93** Suponga que los cojinetes se desgastan como se indica en el problema 8.92, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción de un cojinete de collarín desgastado es:

$$M = \frac{1}{2}\mu_k P(R_1 + R_2)$$

donde P = magnitud de la fuerza axial total
R_1, R_2 = radios interno y externo del collarín

***8.94** Si se supone que la presión entre las superficies de contacto es uniforme, demuestre que la magnitud M del par requerido para contrarrestar la resistencia por fricción del cojinete cónico mostrado en la figura es:

$$M = \frac{2}{3}\frac{\mu_k P}{\operatorname{sen}\theta}\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

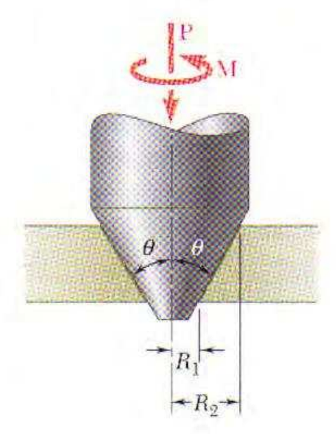
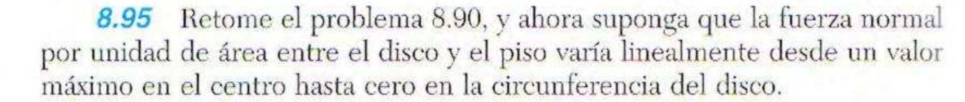


Figura *P8.94*



8.95 Retome el problema 8.90, y ahora suponga que la fuerza normal por unidad de área entre el disco y el piso varía linealmente desde un valor máximo en el centro hasta cero en la circunferencia del disco.

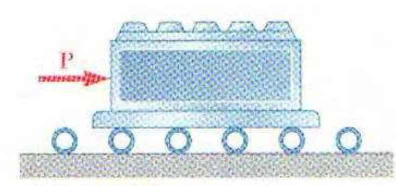


Figura P8.96

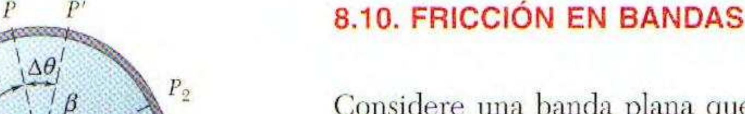
8.96 Como se muestra en la figura, la base de una máquina de 900 kg se mueve sobre el piso de concreto mediante una serie de tubos de acero de 100 mm de diámetro exterior. Si se sabe que el coeficiente de resistencia a la rodadura entre los tubos y la base es de 0.5 mm y entre los tubos y el piso de concreto es de 1.25 mm, determine la magnitud de la fuerza **P** requerida para mover lentamente la base a lo largo del piso.

8.97 Si se sabe que un disco de 6 in. de diámetro rueda con velocidad constante hacia abajo sobre una superficie inclinada 2 por ciento, determine el coeficiente de resistencia a la rodadura entre el disco y el plano inclinado.

8.98 Determine la fuerza horizontal requerida para mover un automóvil de 2 500 lb con velocidad constante a lo largo de una carretera horizontal si sus llantas son de 23 in. de diámetro. No tome en cuenta cualquier forma de fricción excepto la resistencia a la rodadura y suponga que el coeficiente de resistencia a la rodadura es de 0.05 in.

8.99 Retome el problema 8.83, y ahora incluya el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 0.5 mm.

8.100 Retome el problema 8.89, y ahora incluya el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 1.75 mm.



8.10. FRICCIÓN EN BANDAS

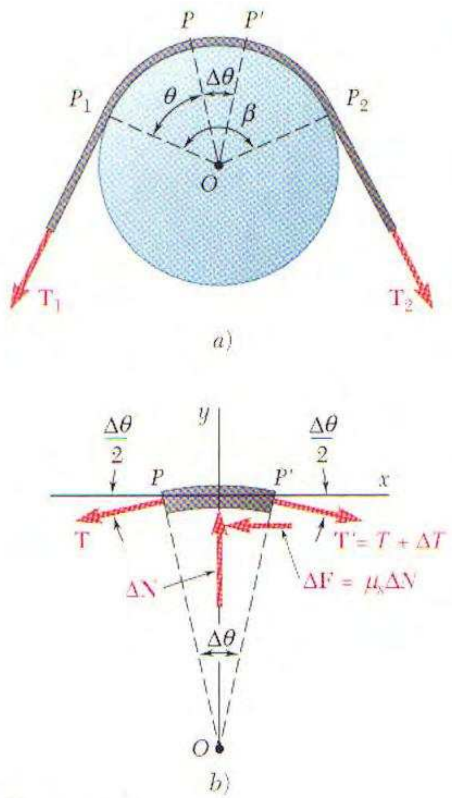


Figura 8.14

Considere una banda plana que pasa sobre un tambor cilíndrico fijo (figura 8.14*a*). Se desea determinar la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión presente en las dos partes de la banda cuando ésta se encuentra a punto de deslizarse hacia la derecha.

Un pequeño elemento PP' que abarca un ángulo $\Delta\theta$ se separa de la banda. Si la tensión presente en P se denota con T y con $T + \Delta T$ la tensión en P' puede trazarse el diagrama de cuerpo libre del elemento de la banda (figura 8.14*b*). Además de las dos fuerzas de tensión, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la componente normal $\Delta\mathbf{N}$ de la reacción del tambor y la fuerza de fricción $\Delta\mathbf{F}$. Como se supone que el movimiento es inminente, se tiene $\Delta F = \mu_s \Delta N$. Es necesario señalar que si se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a cero, las magnitudes ΔN y ΔF y la *diferencia* ΔT entre la tensión en P y la tensión en P', también tenderán a cero; sin embargo, el valor T de la tensión en P continuará sin alterar. Esta observación ayuda a comprender la selección de notación que se ha hecho.

Al seleccionar los ejes coordenados que se muestran en la figura 8.14*b* se escriben las ecuaciones de equilibrio para el elemento PP':

$$\Sigma F_x = 0: \qquad (T + \Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \qquad (8.11)$$

$$\Sigma F_y = 0: \qquad \Delta N - (T + \Delta T)\,\text{sen}\,\frac{\Delta\theta}{2} - T\,\text{sen}\,\frac{\Delta\theta}{2} = 0 \qquad (8.12)$$

olver la ecuación (8.12) para ΔN y sustituir la ecuación (8.11), se e la siguiente ecuación después de realizar simplificaciones

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s(2T + \Delta T) \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

se dividen ambos términos entre $\Delta\theta$. En el caso del primer tér- esto se hace dividiendo ΔT entre $\Delta\theta$. La división del segundo no se lleva a cabo dividiendo entre 2 los términos que están en- réntesis y dividiendo al seno entre $\Delta\theta/2$. Así se escribe

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s\left(T + \frac{\Delta T}{2}\right) \frac{\operatorname{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

ra se hace que $\Delta\theta$ se aproxime a 0, el coseno tiende a 1 y, como aló anteriormente, $\Delta T/2$ tiende a cero. Además, de acuerdo con na que se deriva en todos los libros de cálculo, el cociente de sen) sobre $\Delta\theta/2$ tiende a 1. Como el límite de $\Delta T/\Delta\theta$ es por defi- igual a la derivada $dT/d\theta$, se escribe

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0 \qquad \frac{dT}{T} = \mu_s d\theta$$

se integrarán ambos miembros de la última ecuación desde P_1 P_2 (figura 8.14*a*). En P_1, se tiene que $\theta = 0$ y que $T = T_1$; en P_2, ne que $\theta = \beta$ y que $T = T_2$. Así, integrando entre estos límites, ribe

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu_s \, d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_s\beta$$

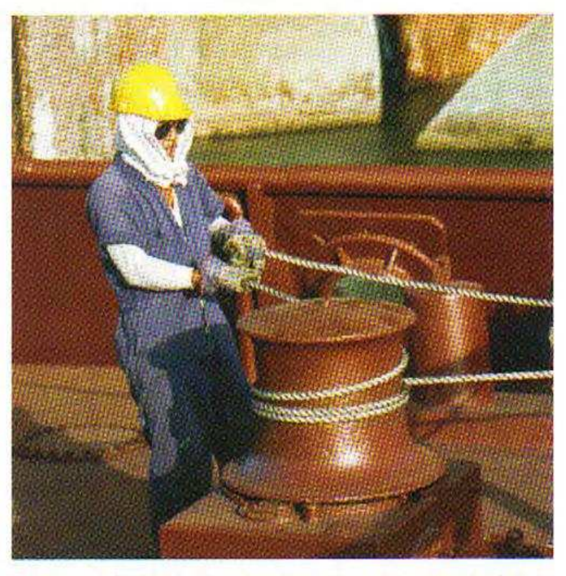
ervando que el lado izquierdo es igual al logaritmo natural del te de T_2 y T_1,

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s\beta \tag{8.13}$$

elación también se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta} \tag{8.14}$$

rmulas que se han derivado se pueden aplicar tanto a problemas volucran bandas planas que pasan sobre tambores cilíndricos fi- mo a problemas que involucran cuerdas enrolladas alrededor de ste o de un cabrestante. Además, dichas fórmulas también pue- tilizarse para resolver problemas que involucran frenos de ban- n este tipo de problemas, el cilindro es el que está a punto de gi- entras que la banda permanece fija. Por otra parte, las fórmulas én pueden aplicarse en problemas que involucran transmisiones nda.



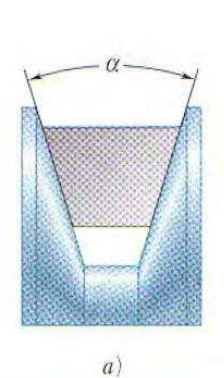
Fotografía 8.3 Al enrollar la cuerda alrededor del bolardo, la fuerza ejercida por el trabajador para controlar la cuerda es menor que la tensión en la porción tirante de la cuerda.

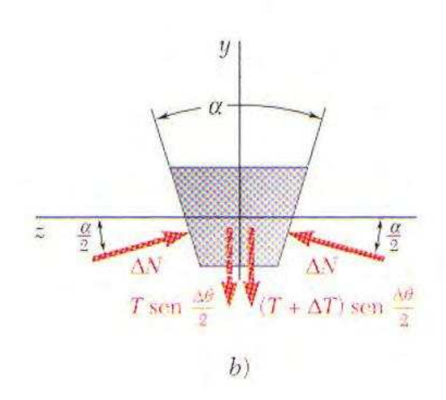
En estos problemas giran tanto la polea como la banda, entonces, se desea determinar si la banda se deslizará, esto es, si la banda se moverá *con respecto* a la polea.

Las fórmulas (8.13) y (8.14) sólo deben utilizarse si la banda, la cuerda o el freno están *a punto de deslizarse*. Se utilizará la fórmula (8.14) si se desea determinar T_1 o T_2; se preferirá la fórmula (8.13) si se desea determinar el valor de μ_s o si se desea determinar el ángulo de contacto β. Es necesario señalar que T_2 siempre es mayor que T_1; por tanto, T_2 representa la tensión en aquella parte que *jala*, mientras que T_1 es la tensión en aquella parte que *resiste*. También se debe mencionar que el ángulo de contacto β debe expresarse en *radianes*. El ángulo β puede ser mayor que 2π; por ejemplo, si una cuerda está enrollada n veces alrededor de un poste, β será igual a $2\pi n$.

Si la banda, la cuerda o el freno están deslizándose, deben utilizarse fórmulas similares a las ecuaciones (8.13) y (8.14) pero que involucren el coeficiente de fricción cinética μ_k. Si la banda, la cuerda o el freno no están deslizándose y tampoco están a punto de deslizarse, no se pueden utilizar las fórmulas mencionadas antes.

Las bandas que se utilizan en las transmisiones por lo general tienen forma en V. En la banda en V que se muestra en la figura 8.15*a* el contacto entre ésta y la polea ocurre a lo largo de los lados de la ranura. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda (figura 8.15*b* y *c*), se puede obtener la relación que existe entre los valores T_1 y T_2 de la tensión en las dos partes de la banda cuando ésta está a punto de deslizarse. De esta forma se derivan fórmulas similares a las ecuaciones (8.11) y (8.12), pero ahora la magnitud de la fuerza de fricción total que actúa sobre el elemento es igual a 2 ΔF, y la suma de las componentes y de las fuerzas normales es igual a 2 ΔN sen $(\alpha/2)$. Procediendo de la misma forma en la que se hizo antes, se obtiene





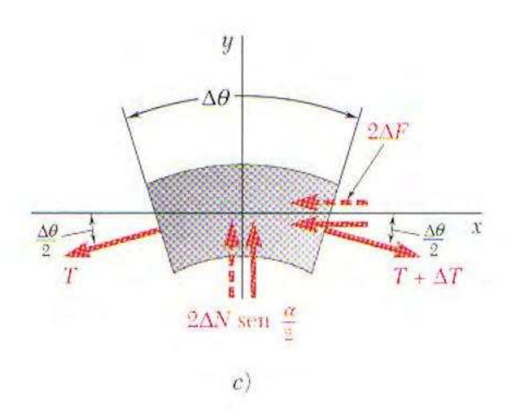


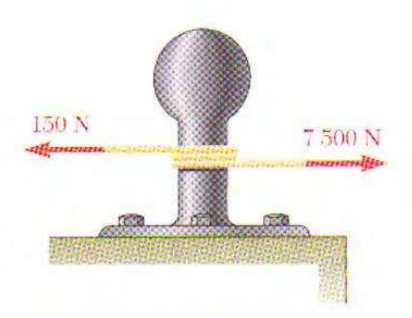
Figura 8.15

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_s \beta}{\text{sen }(\alpha/2)} \tag{8.15}$$

o,

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta/\text{sen }(\alpha/2)} \tag{8.16}$$

PROBLEMA RESUELTO 8.7



Un cable de romolque lanzado desde un barco a un muelle se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo o noray. La tensión en el cable es de 7 500 N, que ejerce una fuerza de 150 N sobre el extremo libre del cable, un trabajador del muelle apenas puede evitar que el cable se deslice; determine: *a*) el coeficiente de fricción entre el cable y el bolardo o noray, y *b*) la tensión en el cable que podría ser resistida por la fuerza de 150 N si el cable estuviera enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo o noray.

SOLUCIÓN

***a*) Coeficiente de fricción.** Como el deslizamiento del cable es inminente, se usa la ecuación (8.13):

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

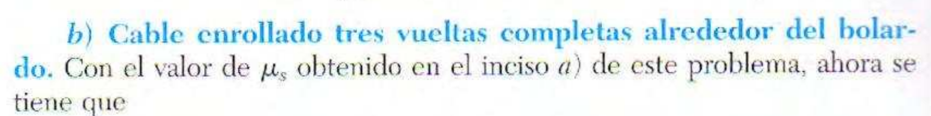
Como el cable está enrollado dos vueltas completas alrededor del bolardo, se tiene que

$$\beta = 2(2\pi \text{ rad}) = 12.57 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad T_2 = 7\,500 \text{ N}$$

Por tanto,

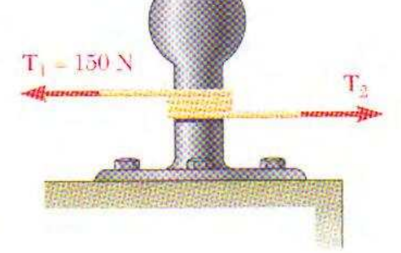
$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1}$$
$$\mu_s(12.57 \text{ rad}) = \ln \frac{7\,500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = \ln 50 = 3.91$$
$$\mu_s = 0.311$$

$\mu_s = 0.311$ ◄



***b*) Cable enrollado tres vueltas completas alrededor del bolardo.** Con el valor de μ_s obtenido en el inciso *a*) de este problema, ahora se tiene que

$$\beta = 3(2\pi \text{ rad}) = 18.85 \text{ rad}$$
$$T_1 = 150 \text{ N} \qquad \mu_s = 0.311$$



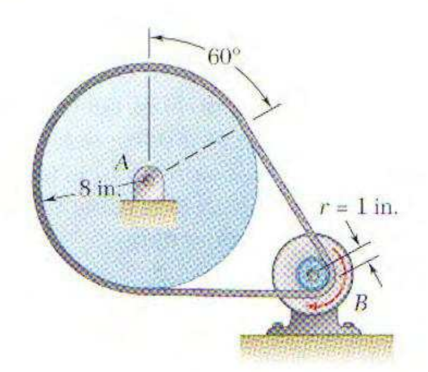
Sustituyendo estos valores en la ecuación (8.14) se obtiene

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$
$$\frac{T_2}{150 \text{ N}} = e^{(0.311)(18.85)} = e^{5.862} = 351.5$$
$$T_2 = 52\,725 \text{ N}$$



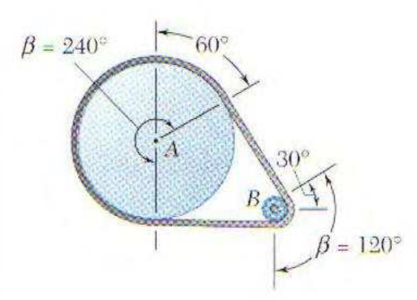
$T_2 = 52.7$ kN ◄

PROBLEMA RESUELTO 8.8

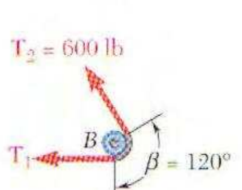


Una banda plana conecta una polea A que mueve una máquina herramienta, con una polea B, la cual está unida a la flecha de un motor eléctrico. Los coeficientes de fricción entre ambas poleas y la banda son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Si se sabe que la tensión máxima permisible en la banda es de 600 lb, determine el momento torsional máximo que puede ejercer la banda sobre la polea A.

SOLUCIÓN



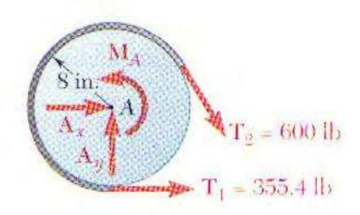
Debido a que la resistencia al deslizamiento depende tanto del ángulo de contacto β entre la polea y la banda como del coeficiente de fricción estática μ_s y puesto que μ_s es el mismo para ambas poleas, el deslizamiento ocurrirá primero en la polea B, para la cual β es menor.



Polea B. Con el uso de la ecuación (8.14) con $T_2 = 600$ lb, $\mu_s = 0.25$ y $\beta = 120° = 2\pi/3$ rad, se escribe

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad \frac{600 \text{ lb}}{T_1} = e^{0.25(2\pi/3)} = 1.688$$

$$T_1 = \frac{600 \text{ lb}}{1.688} = 355.4 \text{ lb}$$



Polea A. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea A. El par $\mathbf{M}_A$ se aplica a la polea por la máquina herramienta a la cual está unida la polea y es igual y opuesto al momento torsional ejercido por la banda. Así se escribe

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad M_A - (600 \text{ lb})(8 \text{ in.}) + (355.4 \text{ lb})(8 \text{ in.}) = 0$$

$$M_A = 1\,957 \text{ lb} \cdot \text{in.} \qquad M_A = 163.1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad ◀$$

Nota. Se puede comprobar que la banda no se desliza sobre la polea A calculando el valor de μ_s requerido para evitar el deslizamiento en A y verificando que éste es menor que el valor real de μ_s. A partir de la ecuación (8.13) se tiene que

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{600 \text{ lb}}{355.4 \text{ lb}} = 0.524$$

y, como $\beta = 240° = 4\pi/3$ rad,

$$\frac{4\pi}{3}\mu_s = 0.524 \qquad \mu_s = 0.125 < 0.25$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la sección anterior se aprendió acerca de la *fricción en bandas*. Los problemas que se tendrán que resolver incluyen bandas que pasan sobre tambores fijos, frenos de banda en los cuales el tambor gira mientras que la banda permanece fija y transmisiones de banda.

1. ***Los problemas que involucran fricción en bandas*** pertenecen a una de las dos categorías siguientes:

a) Problemas en los cuales el deslizamiento es inminente. En estos casos puede utilizarse una de las siguientes fórmulas que involucran al *coeficiente de fricción estática* μ_s:

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \qquad (8.13)$$

o

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad (8.14)$$

b) Problemas en los que ya ocurre el deslizamiento. Las fórmulas que deben utilizarse se pueden obtener a partir de las ecuaciones (8.13) y (8.14) reemplazando μ_s por el *coeficiente de fricción cinética* μ_k.

2. ***Cuando se comience a resolver un problema de fricción en bandas,*** es necesario recordar lo siguiente:

a) El ángulo β debe estar expresado en radianes. En un problema que involucra una banda y un tambor, éste es el ángulo subtendido en el arco del tambor sobre el cual está enrollada la banda.

b) La tensión más grande siempre se representa con T_2 y la tensión más pequeña con T_1.

c) La tensión más grande ocurre en el extremo de la banda que está en la dirección del movimiento, o del movimiento inminente de la banda con respecto al tambor.

3. ***En cada uno de los problemas que deberán resolverse,*** tres de las cuatro cantidades T_1, T_2, β y μ_s (o μ_k) serán proporcionadas como dato o se podrán encontrar fácilmente y, entonces, se deberá resolver la ecuación apropiada para encontrar la cuarta cantidad. En esta sección se encontrarán dos tipos de problemas:

a) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar el valor de μ_s entre la banda y el tambor: con base en los datos proporcionados, se determinan T_1, T_2 y β; entonces se sustituyen dichos valores en la ecuación (8.13) y se resuelve esta última para μ_s [problema resuelto 8.7, inciso *a*)]. Se sigue el mismo procedimiento para encontrar el *valor mínimo* de μ_s para el cual no ocurrirá el deslizamiento.

b) Si el deslizamiento es inminente, se debe encontrar la magnitud de una fuerza o de un par que está aplicado a la banda o al tambor. Los datos proporcionados deben incluir μ_s y β. Si también incluyen a T_1 o T_2 se utiliza la ecuación (8.14) para encontrar el valor de la otra tensión. Si no se conoce T_1 ni T_2, pero se proporcionan otros datos, se utiliza el diagrama de cuerpo libre del sistema constituido por la banda y el tambor para escribir una ecuación de equilibrio que tendrá que resolverse simultáneamente con la ecuación (8.14) para determinar los valores de T_1 o T_2. Entonces se podrá encontrar la magnitud de la fuerza o del par especificado a partir del diagrama de cuerpo libre del sistema. Se sigue el mismo procedimiento para determinar el *valor máximo* de una fuerza o de un par que puede ser aplicado a la banda o al tambor si el deslizamiento no debe ocurrir [problema resuelto 8.8].

Problemas

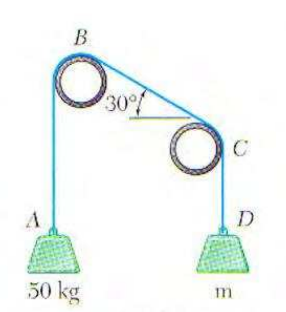


Figura P8.102 y P.8.103

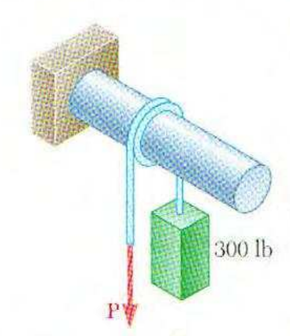


Figura P8.104

8.101 Un cabo se enrolla dos vueltas completas alrededor de un bolardo. Al ejercer una fuerza de 80 lb sobre el extremo libre del cabo un marinero puede resistir una fuerza de 5 000 lb en el otro extremo del cabo. Determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el cabo y el bolardo y *b*) el número de veces que debe enrollarse el cabo alrededor del poste si se debe resistir una fuerza de 20 000 lb al ejercer la misma fuerza de 80 lb.

8.102 Una cuerda *ABCD* pasa sobre dos tubos como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.25, determine *a*) el valor mínimo de la masa m con el que se puede lograr el equilibrio, *b*) la tensión correspondiente en la parte *BC* de la cuerda.

8.103 Una cuerda *ABCD* pasa sobre dos tubos como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.25, determine *a*) el valor máximo de la masa m con el que se puede lograr el equilibrio, *b*) la tensión correspondiente en la parte *BC* de la cuerda.

8.104 En la figura se muestra un bloque de 300 lb sostenido mediante una cuerda que está enrollada $1\frac{1}{2}$ veces alrededor de una barra horizontal. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la barra es de 0.15, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio.

8.105 El coeficiente de fricción estática entre el bloque B y la superficie horizontal y entre la cuerda y el soporte C, que se muestran en la figura, es de 0.40. Si se sabe que $m_A = 12$ kg, determine la masa mínima del bloque B para el cual se mantiene el equilibrio.

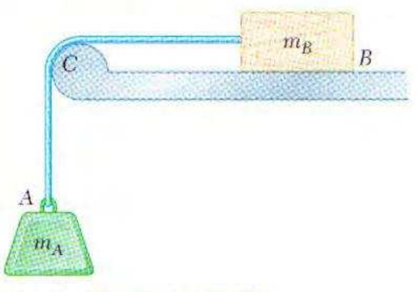


Figura *P8.105* y *P.8.106*

8.106 El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo entre el bloque B y la superficie horizontal y entre la cuerda y el soporte C, que se muestran en la figura. Si se sabe que $m_A = m_B$, determine el valor mínimo de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.

8.107 Una banda plana se utiliza para transmitir un par del tambor B al tambor A. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 y que la tensión permisible en la banda es de 450 N, determine el par máximo que puede ejercerse sobre el tambor A.

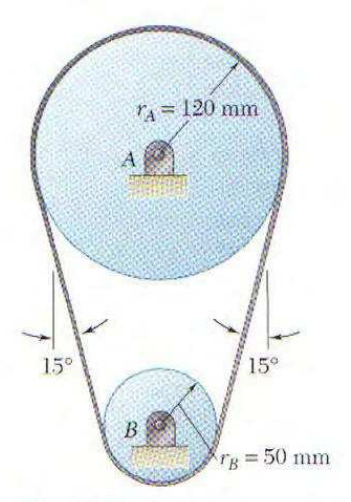


Figura P8.107

8.108 Una banda plana se utiliza para transmitir un par de la polea *A* a la polea *B*. Como se muestra en la figura, cada una de las poleas tiene un radio de 60 mm y sobre el eje de la polea *A* se aplica una fuerza con una magnitud $P = 900$ N. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.35, determine *a*) el par máximo que puede ser transmitido y *b*) el valor máximo correspondiente de la tensión en la banda.

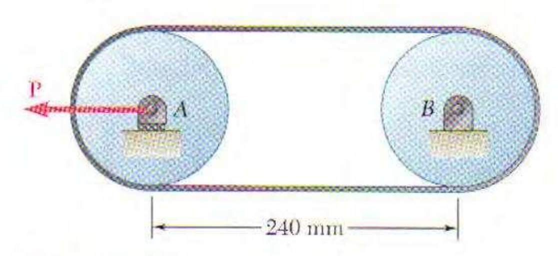


Figura P8.108

8.109 Retome el problema 8.108, y ahora suponga que la banda está colocada alrededor de las poleas de tal manera que se crea una figura en forma de ocho.

8.110 En la figura se muestra el soporte de un motor de 175 lb al cual se le aplica el peso **W** para mantener tensa la banda motriz. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la banda plana y los tambores *A* y *B* es de 0.40 y sin tomar en cuenta el peso de la plataforma *CD*, determine el par máximo que puede ser transmitido al tambor *B* cuando el tambor motriz *A* gira en el sentido de las manecillas del reloj.

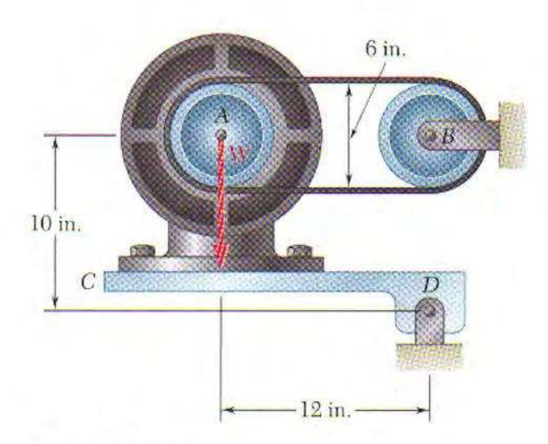


Figura P8.110

8.111 Retome el problema 8.110, y ahora suponga que el tambor motriz *A* gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

8.112 En la figura se muestra un freno de banda que se emplea para controlar la velocidad de un volante. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$. Determine la magnitud del par aplicado sobre el volante, si se sabe que $P = 45$ N y que el volante gira con velocidad constante en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

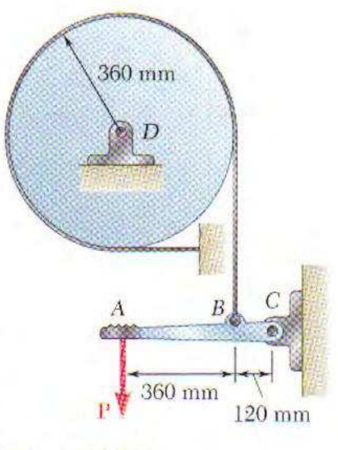


Figura P8.112

8.113 La velocidad del freno de tambor que se muestra en la figura se controla mediante una banda unida a la barra de control AD. Se aplica una fuerza **P** con magnitud de 25 lb sobre la barra de control en A. Determine la magnitud del par aplicado al tambor, si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es de 0.25, que $a = 4$ in. y que el tambor gira a velocidad constante *a*) en sentido contrario al de las manecillas del reloj y *b*) en el sentido de las manecillas del reloj.

8.114 Si $a = 4$ in., determine el valor máximo del coeficiente de fricción estática para el cual el freno no es autobloqueante cuando el tambor gira en sentido inverso al de las manecillas del reloj.

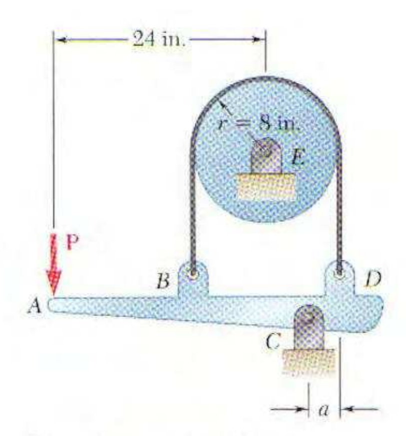


Figura ***P8.113, P8.114* y P8.115**

8.115 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.30 y que el freno del tambor gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine el valor mínimo de a para el cual el freno no es autobloqueante.

8.116 La cubeta A y el bloque C mostrados en la figura se conectan mediante un cable que pasa sobre el tambor B. Sabiendo que el tambor gira lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj y que los coeficientes de fricción en todas las superficies son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine la masa mínima combinada m de la cubeta y su contenido para que el bloque C *a*) permanezca en reposo, *b*) comience a moverse hacia arriba del plano inclinado y *c*) continúe su movimiento hacia arriba del plano inclinado con velocidad constante.

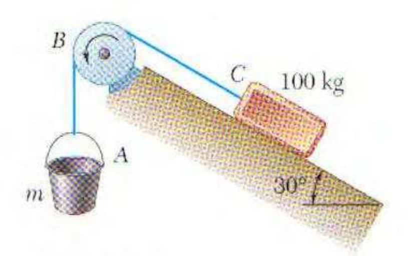


Figura P8.116

8.117 Retome el problema 8.116, y ahora suponga que el tambor B está fijo y no puede girar.

***8.118* y 8.120** Un cable se coloca alrededor de tres tubos paralelos como se muestra en la figura. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) el peso W mínimo para el cual se mantiene el equilibrio, *b*) el peso W máximo que puede levantarse si el tubo B se gira lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj mientras que los tubos A y C permanecen fijos.

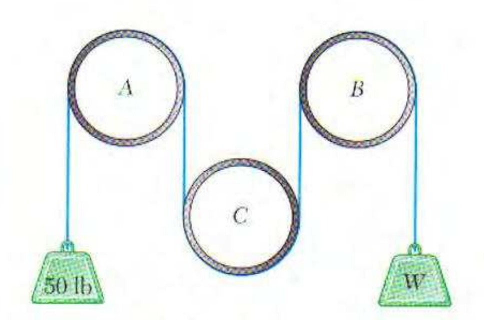


Figura *P8.118* y *P8.119*

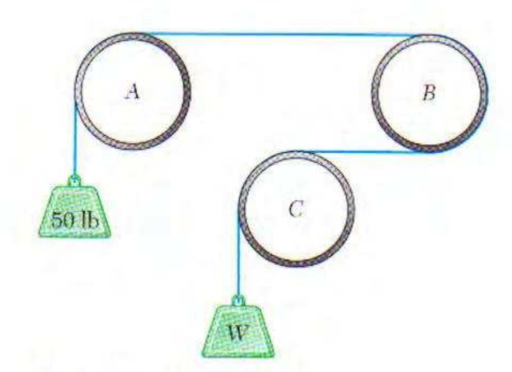
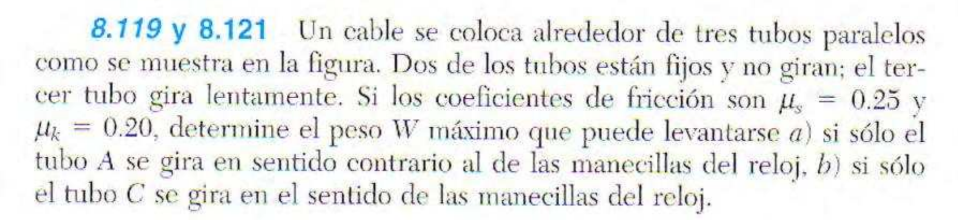


Figura P8.120 y P8.121



***8.119* y 8.121** Un cable se coloca alrededor de tres tubos paralelos como se muestra en la figura. Dos de los tubos están fijos y no giran; el tercer tubo gira lentamente. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine el peso W máximo que puede levantarse *a*) si sólo el tubo A se gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, *b*) si sólo el tubo C se gira en el sentido de las manecillas del reloj.

8.122 En la figura se muestra una cinta de grabación que pasa sobre el tambor motriz B de 20 mm de radio y bajo el tambor giratorio C. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre la cinta y los tambores son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$ y que el tambor C puede girar libremente, determine el valor mínimo permisible de P para que la cinta y el tambor B no se deslicen entre sí.

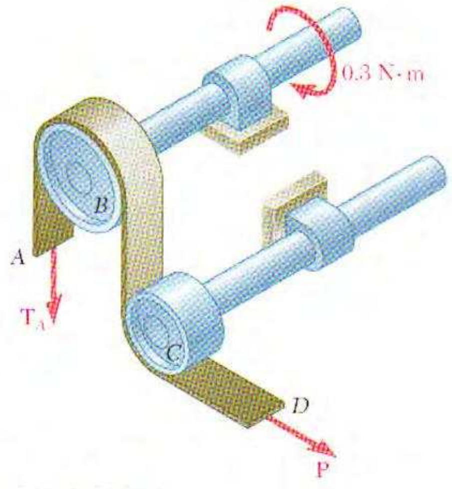


Figura P8.122

8.123 Retome el problema 8.122, y ahora suponga que el tambor giratorio C está fijo y no puede rotar.

8.124 En la figura se muestra una barra AE de 10 lb suspendida de un cable que pasa sobre un tambor de 5 in. de radio. El movimiento vertical del extremo E de la barra se evita mediante los dos topes mostrados. Si se sabe que $\mu_s = 0.30$ entre el cable y el tambor, determine *a*) el máximo par $\mathbf{M}_0$ con sentido contrario al de las manecillas del reloj que puede aplicarse al tambor si no debe ocurrir deslizamiento, *b*) la fuerza correspondiente que se ejerce sobre el extremo E de la barra.

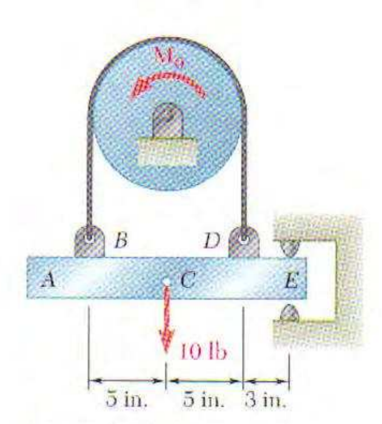


Figura P8.124

8.125 Retome el problema 8.124, y ahora suponga que, sobre el tambor, se aplica un par $\mathbf{M}_0$ en el sentido de las manecillas del reloj.

8.126 En la figura se muestra una llave de correa que se emplea para sujetar fuertemente el tubo sin dañar la superficie externa del mismo. Si el coeficiente de fricción estática es el mismo para todas las superficies de contacto, determine el valor mínimo de μ_s para el cual la llave se autobloqueará cuando a = 200 mm, r = 30 mm y θ = 65°.

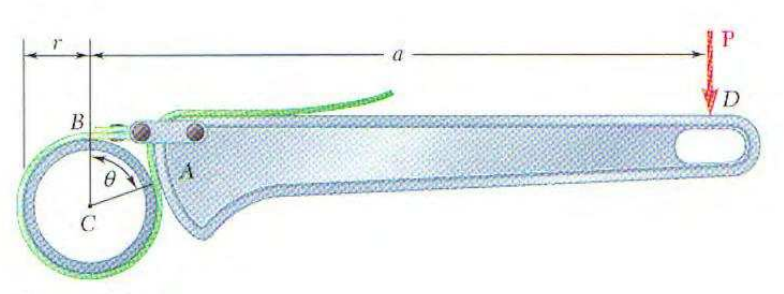


Figura P8.126

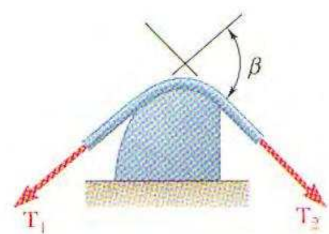
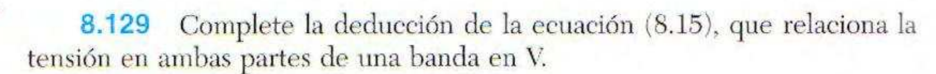


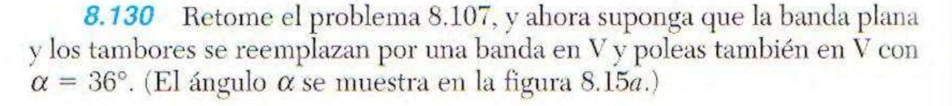
Figura P8.128

8.127 Retome el problema 8.126, y ahora suponga que θ = 75°.

8.128 Demuestre que las ecuaciones (8.13) y (8.14) son válidas para cualquier forma que tenga la superficie mostrada en la figura, siempre y cuando el coeficiente de fricción sea el mismo en todos los puntos de contacto.



8.129 Complete la deducción de la ecuación (8.15), que relaciona la tensión en ambas partes de una banda en V.



8.130 Retome el problema 8.107, y ahora suponga que la banda plana y los tambores se reemplazan por una banda en V y poleas también en V con α = 36°. (El ángulo α se muestra en la figura 8.15*a*.)

8.131 Retome el problema 8.108, y ahora suponga que la banda plana y las poleas se reemplazan por una banda en V y poleas también en V con α = 36°. (El ángulo α se muestra en la figura 8.15*a*.)

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 8

Este capítulo estuvo dedicado al estudio de la *fricción seca*, esto es, a problemas que involucran cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de *superficies que no están lubricadas*.

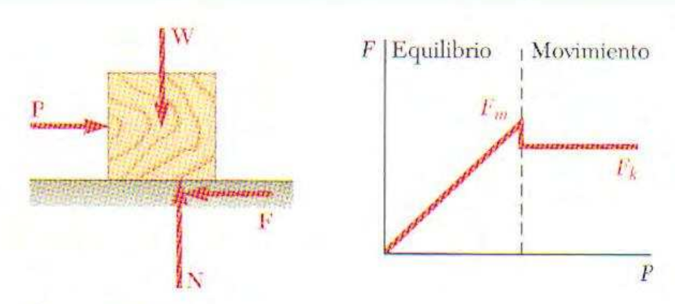


Figura 8.16

Fricción estática y cinética

Al aplicar una fuerza horizontal **P** a un bloque que descansa sobre una superficie horizontal [sección 8.2], se observa que al principio el bloque no se mueve. Lo anterior hace evidente que se debe haber desarrollado una *fuerza de fricción* **F** para equilibrar la fuerza **P** (figura 8.16). Conforme se incrementa la magnitud de **P**, la magnitud de **F** también se incrementa hasta que alcanza un valor máximo F_m. Si **P** se incrementa aún más, el bloque comienza a deslizarse y la magnitud de **F** disminuye súbitamente de F_m a un valor menor F_k. La evidencia experimental muestra que F_m y F_k son proporcionales a la componente normal N de la reacción de la superficie. Por tanto, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \qquad F_k = \mu_k N \qquad (8.1, 8.2)$$

donde μ_s y μ_k reciben el nombre de *coeficiente de fricción estática* y de *coeficiente de fricción cinética*, respectivamente. Estos coeficientes dependen de la naturaleza y de la condición de las superficies que están en contacto. En la tabla 8.1 se proporcionan valores aproximados para los coeficientes de fricción estática.

Ángulos de fricción

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal **N** y la fuerza de fricción **F** por su resultante **R** (figura 8.17). A medida que la fuerza de fricción se incrementa y alcanza su valor máximo $F_m = \mu_s N$, el ángulo ϕ que **R** forma con la normal a la superficie se incrementa y alcanza un valor máximo ϕ_s, llamado *ángulo de fricción estática*. Si en realidad ocurre el movimiento, la magnitud de **F** disminuye súbitamente a F_k; en forma similar, el ángulo ϕ decae a un valor menor ϕ_k, el cual recibe el nombre de *ángulo de fricción cinética*. Como se demostró en la sección 8.3, se tiene que

$$\tan \phi_s = \mu_s \qquad \tan \phi_k = \mu_k \qquad (8.3, 8.4)$$

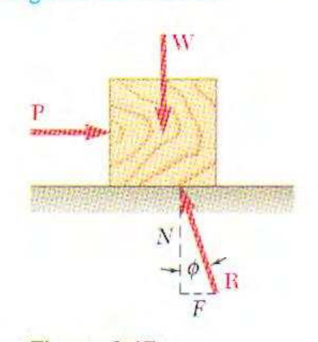


Figura 8.17

Problemas que involucran fricción

Cuando se resuelven problemas de equilibrio que involucran fricción, se debe resordar que la magnitud F de la fuerza de fricción es igual a $F_m = \mu_s N$ *sólo si el cuerpo está a punto de deslizarse* [sección 8.4]. *Si el movimiento no es inminente*, F y N deben considerarse como *incógnitas independientes*, las cuales deben de-

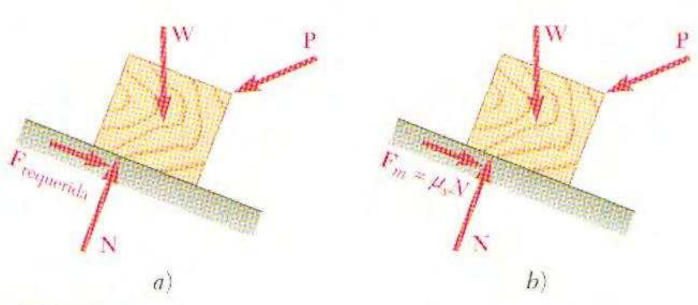


Figura 8.18

terminarse a partir de las ecuaciones de equilibrio (figura 8.18*a*). También se debe comprobar que el valor de F requerido para mantener el equilibrio no es mayor que F_m; si el valor de F llegara a ser mayor que F_m, el cuerpo se movería y la magnitud de la fuerza de fricción sería $F_k = \mu_k N$ [problema resuelto 8.1]. Por otra parte, *si se sabe que el movimiento es inminente*, F ha alcanzado su valor máximo $F_m = \mu_s N$ (figura 8.18*b*) y la expresión anterior puede sustituirse en lugar de F en las ecuaciones de equilibrio [problema resuelto 8.3]. Cuando sólo están involucradas tres fuerzas en un diagrama de cuerpo libre, incluyendo la reacción **R** de la superficie en contacto con el cuerpo, es más conveniente resolver el problema con un triángulo de fuerzas [problema resuelto 8.2].

Cuando un problema involucra el análisis de las fuerzas ejercidas entre sí por *dos cuerpos* A y B, es importante mostrar las fuerzas de fricción con sus sentidos correctos. Por ejemplo, el sentido correcto para la fuerza de fricción ejercida por B sobre A es opuesto al sentido del *movimiento relativo* (o movimiento inminente) de A con respecto a B [figura 8.6].

Cuñas y tornillos

En la segunda parte del capítulo se considera cierto número de aplicaciones específicas de ingeniería en las cuales la fricción seca juega un papel importante. En el caso de *cuñas*, las cuales son máquinas simples que se utilizan para levantar cargas pesadas [sección 8.5], se dibujaron dos o más diagramas de cuerpo libre y se tuvo cuidado de mostrar cada fueza de fricción con su sentido correcto [problema resuelto 8.4]. El análisis de *tornillos de rosca cuadrada*, los cuales se utilizan con frecuencia en gatos, prensas y otros mecanismos, se redujo al análisis de un bloque que se desliza sobre un plano inclinado al desenrollar la rosca del tornillo y mostrarla como una línea recta [sección 8.6]. Lo anterior se hace nuevamente en la figura 8.19, donde r representa el *radio promedio de la rosca*, L es el *avance del tornillo*, esto es, la distancia a través de la cual avanza el tornillo en una vuelta, **W** es la carga y Qr es igual al momento torsional ejercido sobre el tornillo. Se señaló que en el caso de tornillos de rosca múltiple, el avance L del tornillo *no* es igual a su paso, el cual es la distancia medida entre dos roscas consecutivas.

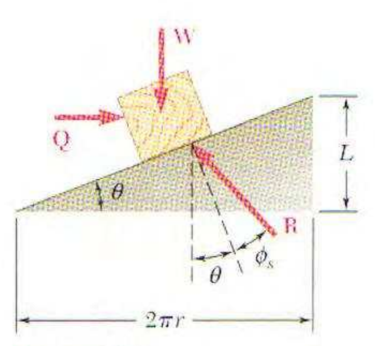


Figura 8.19

Otras aplicaciones de ingeniería que se consideraron en este capítulo fueron las *chumaceras* y la *fricción en ejes* [sección 8.7], los *cojinetes de empuje* y la *fricción en discos* [sección 8.8], la *fricción en ruedas* y la *resistencia a la rodadura* [sección 8.9] y la *fricción en bandas* [sección 8.10].

Fricción en bandas

Al resolver problemas que involucran a una *banda plana* que pasa sobre un cilindro fijo, es importante determinar primero la dirección en la que se desliza o está a punto de deslizarse la banda. Si el tambor está girando, el movimiento o el movimiento inminente de la banda se debe determinar *relativo* al tambor. Por ejemplo, si la banda mostrada en la figura 8.20 está a punto de deslizarse hacia la derecha con respecto al tambor, las fuerzas de fricción ejer-

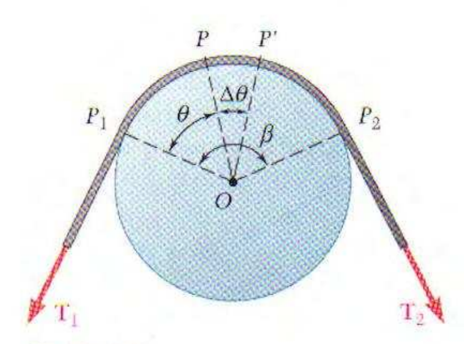


Figura 8.20

cidas por el tambor sobre la banda estarán dirigidas hacia la izquierda y la tensión será más grande en la porción del lado derecho de la banda que en la porción del lado izquierdo de la misma. Representando a la tensión más grande con T_2, a la tensión más pequeña con T_1, al coeficiente de fricción estática con μ_s, y al ángulo (en radianes) subtendido por la banda con β, en la sección 8.10 se derivaron las siguientes fórmulas

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta \tag{8.13}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \tag{8.14}$$

las cuales se utilizaron para resolver los problemas resueltos 8.7 y 8.8. Si realmente la banda se desliza sobre el tambor, se puede reemplazar en ambas ecuaciones el coeficiente de fricción estática μ_s por el coeficiente de fricción cinética μ_k.

Problemas de repaso

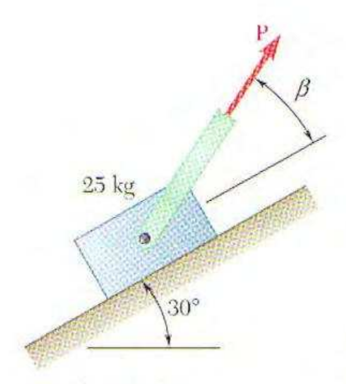


Figura P8.132

8.132 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 25 kg y el plano inclinado que se muestra en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine *a*) el valor mínimo P necesario para que el bloque empiece a moverse hacia arriba por el plano inclinado y *b*) el valor correspondiente de β.

8.133 El bloque A de 20 lb y el bloque B de 30 lb están sostenidos por un plano inclinado que se mantiene en la posición mostrada. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.15, determine el valor de θ para el cual el movimiento es inminente.

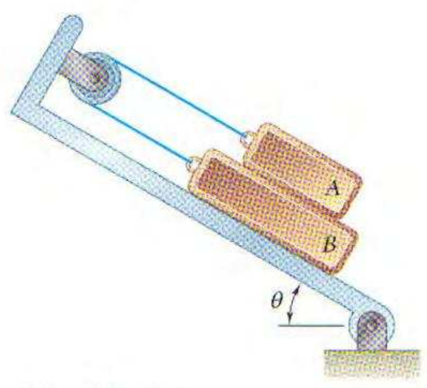


Figura P8.133

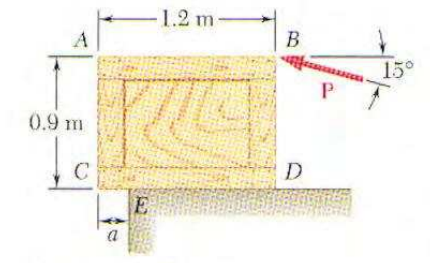


Figura *P8.134*

8.134 Un trabajador mueve lentamente una caja de 50 kg hacia la izquierda y a lo largo de una plataforma de carga, para hacerlo aplica una fuerza **P** en la esquina B como se muestra en la figura. Si la caja empieza a voltearse cerca del borde E de la plataforma de carga cuando $a = 200$ mm, determine *a*) el coeficiente de fricción cinética entre la caja y la plataforma, *b*) la magnitud P de la fuerza correspondiente.

8.135 En la figura se muestra una barra delgada de longitud L, colocada entre la clavija C y la pared vertical, que sostiene una carga **P** en su extremo A. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la clavija y la barra es de 0.15 y se desprecia la fricción en el rodillo, determine el rango de valores de la relación L/a para los cuales se mantiene el equilibrio.

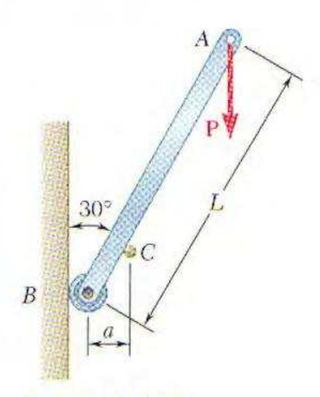


Figura P8.135

8.136 Un dispositivo de seguridad usado por trabajadores que escalan escaleras fijas a estructuras altas, consiste en un riel unido a la escalera y un mango que puede deslizarse sobre la aleta del riel. Una cadena conecta el cinturón del trabajador con el extremo de una leva excéntrica que puede girar alrededor de un eje unido al mango en C. Determine el valor común mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre la aleta del riel, los pasadores en A y B y la leva excéntrica si el mango no se desliza hacia abajo cuando la cadena es jalada verticalmente en dicha dirección.

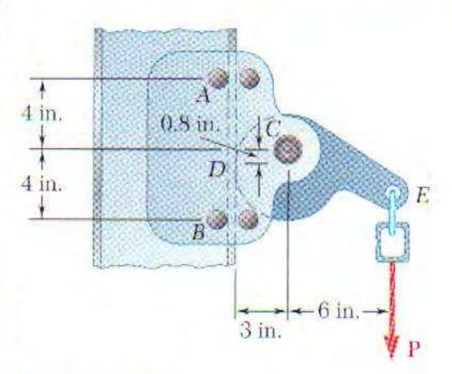


Figura P8.136

8.137 Para tener un uso práctico, el mango de seguridad descrito en el problema anterior debe tener libertad para deslizarse a lo largo del riel cuando es jalado hacia arriba. Determine el valor máximo permisible del coeficiente de fricción estática entre la aleta del riel y los pasadores en A y B, si el mango puede deslizarse libremente cuando es jalado del modo que se muestra en la figura, suponga que *a*) $\theta = 60°$, *b*) $\theta = 50°$, *c*) $\theta = 40°$.

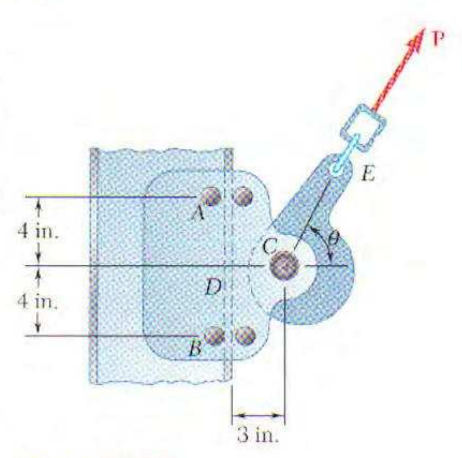


Figura *P8.137*

8.138 La barra AB está unida a collarines que pueden deslizarse sobre las barras inclinadas que se muestran en la figura. Se aplica una fuerza **P** en el punto D ubicado a una distancia a del extremo A. Si el coeficiente de fricción estática μ_s entre cada collarín y la barra sobre la que se desliza es de 0.30 y se desprecian los pesos de la barra y los collarines, determine el valor mínimo de la relación a/L para el cual se mantiene el equilibrio.

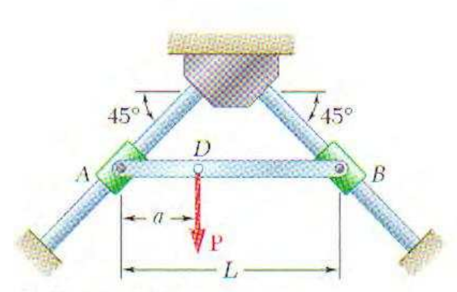


Figura P8.138

8.139 La parte de máquina ABC se sostiene mediante una bisagra sin fricción en B y una cuña de 10° en C. Si el coeficiente de fricción estática en ambas superficies de la cuña es de 0.20, determine *a*) la fuerza **P** requerida para mover la cuña, *b*) las componentes de la reacción correspondiente en B.

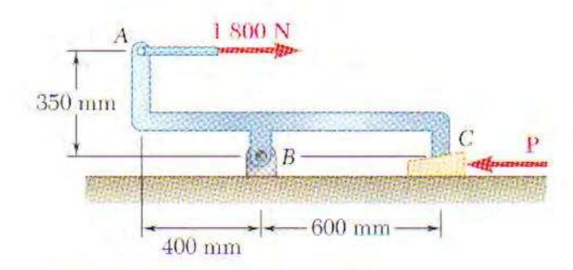


Figura P8.139

8.140 En la figura se muestra una cuña A de peso despreciable que será introducida entre dos bloques B y C de 100 lb, los cuales descansan sobre una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.35, determine la mínima fuerza **P** requerida para que la cuña se empiece a mover *a*) si los bloques son igualmente libres de moverse, *b*) si el bloque C es atornillado de manera segura a la superficie horizontal.

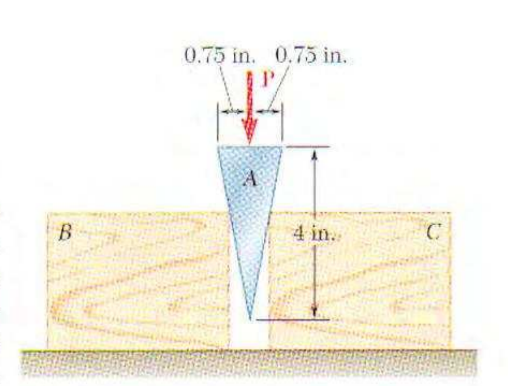


Figura P8.140

8.141 La posición del gato mecánico para automóvil mostrado en la figura se controla mediante el tornillo ABC que tiene una rosca sencilla en sus extremos (rosca derecha en A y rosca izquierda en C). Cada rosca tiene un paso de 0.1 in. y un diámetro medio de 0.375 in. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.15, determine la magnitud del par **M** que debe aplicarse para levantar el automóvil.

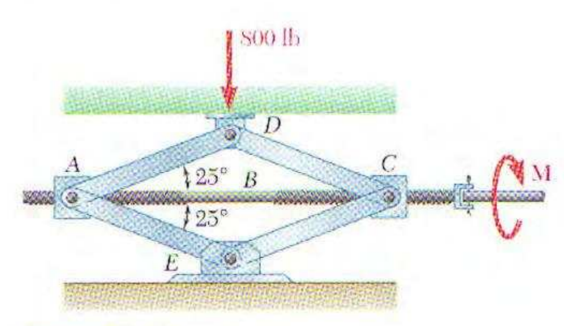


Figura *P8.141*

8.142 Una palanca de peso despreciable se ajusta holgadamente a un eje de 30 mm de radio que se encuentra fijo al eje, como se muestra en la figura. Si se sabe que, para iniciar la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj, es necesaria una fuerza **P** con magnitud de 275 N, determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca, *b*) la mínima fuerza **P** necesaria para que la palanca no comience a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

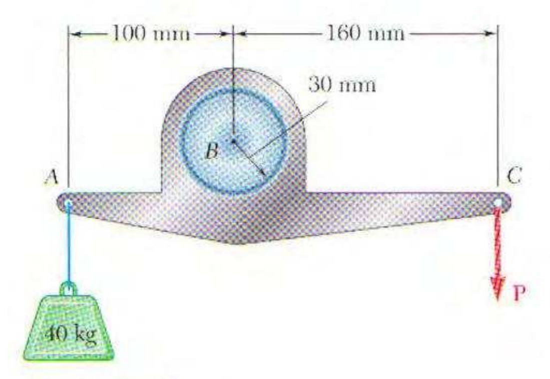


Figura P8.142

8.143 Un par $\mathbf{M}_B$ se aplica al tambor motriz B para mantener una velocidad constante en la banda pulidora que se muestra en la figura. Si $\mu_k = 0.45$ entre la banda y el bloque de 15 kg que se está puliendo y $\mu_s = 0.30$ entre la banda y el tambor motriz B, determine *a*) el par $\mathbf{M}_B$, *b*) la tensión mínima en la parte inferior de la banda si no debe ocurrir deslizamiento entre la banda y el tambor motriz.

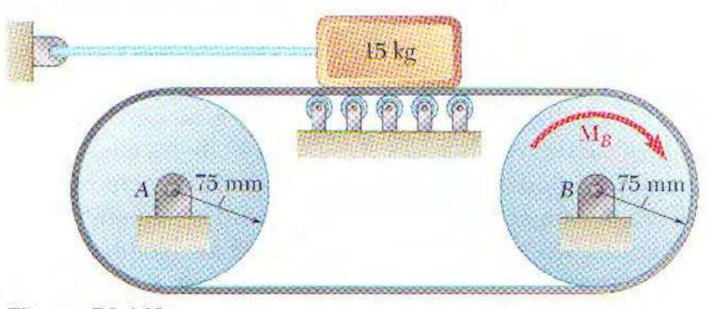


Figura *P8.143*

Problemas de computadora

8.C1 La posición de la barra AB de 10 kg se controla mediante el bloque de 2 kg que se desplaza lentamente hacia la izquierda al aplicarle la fuerza **P** mostrada en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies de contacto es de 0.25, use software para calcular la magnitud P de la fuerza como una función de x, para valores que van desde 900 mm hasta 100 mm con decrementos de 50 mm. Con decrementos más pequeños determine el valor máximo de P y el valor correspondiente de x.

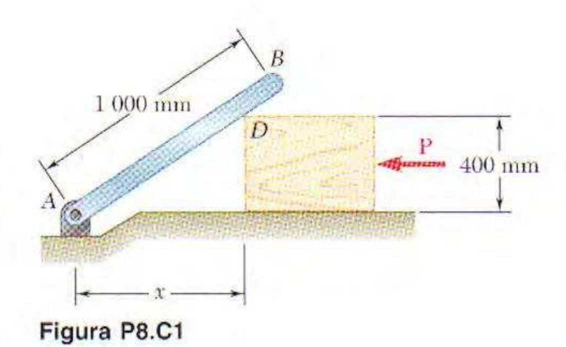


Figura P8.C1

8.C2 Un soporte inclinado que se mantiene en la posición mostrada en la figura, sostiene a los bloques A y B. Si se sabe que el bloque A pesa 20 lb y que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.15, utilice software a fin de calcular el valor de θ para el cual el movimiento es inminente, considerando que el peso del bloque B varía desde 0 hasta 100 lb y usando incrementos de 10 lb.

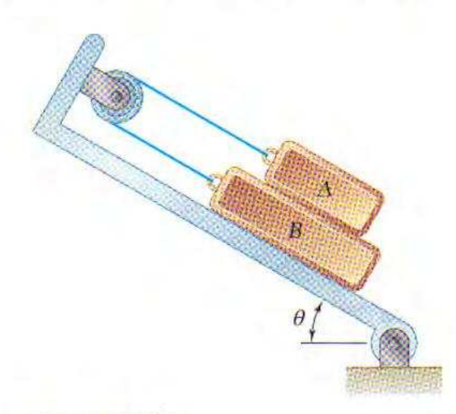


Figura P8.C2

8.C3 El cilindro C de 300 g se apoya sobre el cilindro D como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática μ_s tiene el mismo valor en A y en B, utilice software para determinar el valor máximo del par **M** que debe aplicarse al cilindro D, en un sentido contrario al de las manecillas del reloj, para que dicho cilindro no rote. Considere valores de μ_s desde 0 hasta 0.40 con incrementos de 0.05.

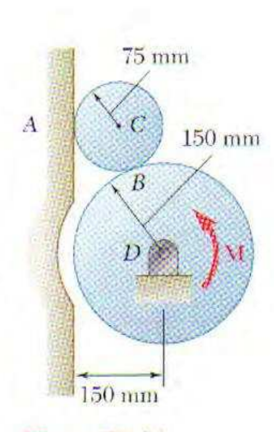


Figura P8.C3

8.C4 Dos barras están conectadas mediante un bloque deslizante D y se mantienen en equilibrio por medio del par $\mathbf{M}_A$ como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra AC y el bloque deslizante es de 0.40, use software para determinar el rango de valores de M_A para los cuales se mantiene el equilibrio. Considere valores de θ entre 0 y 120° con incrementos de 10°.

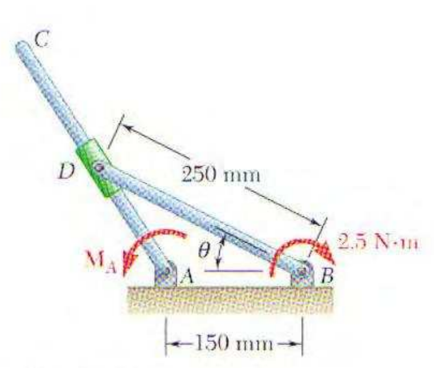


Figura P8.C4

8.C5 El bloque A de 10 lb se mueve lentamente hacia arriba sobre la superficie cilíndrica mediante un cable que pasa por un pequeño tambor cilíndrico en B. Se sabe que hay un coeficiente de fricción cinética de 0.30 entre el bloque y la superficie y entre el cable y el tambor. Utilice software a fin de calcular la fuerza $\mathbf{P}$ requerida para mantener el movimiento, considerando valores de θ entre 0 y 90° con incrementos de 10°. Para los mismos valores de θ calcule la magnitud de la reacción entre el bloque y la superficie. [Observe que el ángulo de contacto entre el cable y el tambor fijo es $\beta = \pi - (\theta/2)$.]

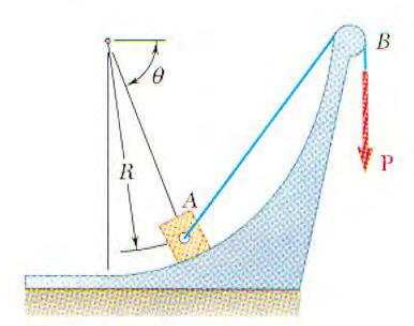


Figura P8.C5

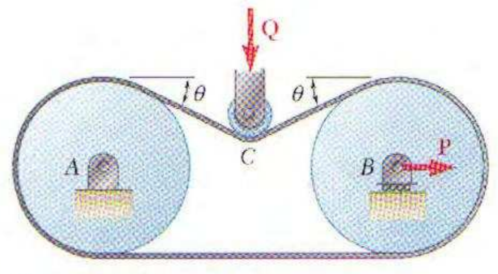


Figura P8.C6

8.C6 En la figura se muestra una banda plana que se utiliza para transmitir un par desde el tambor A hasta el tambor B, cada uno con un radio de 80 mm. El sistema se equipa con una rueda giratoria C que se emplea para incrementar el contacto entre la banda y los tambores. La tensión permisible en la banda es de 200 N, y el coeficiente de fricción estática entre la banda y los tambores es de 0.30. Utilice software para calcular el par máximo que puede ser transmitido para valores de θ entre 0 y 30°, con incrementos de 5°.

8.C7 Dos collarines A y B que se deslizan sobre barras verticales con fricción despreciable, están conectados mediante una cuerda de 30 in. que pasa sobre un eje fijo en C. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el eje fijo es de 0.30. Si el peso del collarín B es de 8 lb, utilice software a fin de determinar los pesos máximo y mínimo del collarín A para los cuales se mantiene el equilibrio. Considere valores de θ entre 0 y 60° con incrementos de 10°.

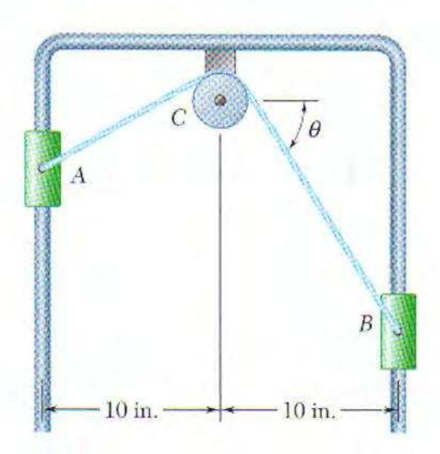


Figura P8.C7

8.C8 El extremo B de una viga uniforme con longitud L se jala mediante una grúa estacionaria. En un inicio la viga se encuentra en el suelo con el extremo A directamente debajo de la polea C. A medida que el cable se jala lentamente, primero la viga se desliza hacia la izquierda con $\theta = 0$ hasta que se mueve una distancia x_0. En una segunda fase, el extremo B se eleva, mientras que el extremo A se desliza hacia la izquierda hasta que x alcanza su valor máximo x_m y θ el valor correspondiente θ_1. Después, la viga gira alrededor de A' mientras que θ sigue creciendo. Cuando θ alcanza el valor θ_2, el extremo A comienza a deslizarse hacia la derecha y lo sigue haciendo de una manera irregular hasta que B llega a C. Si los coeficientes de fricción entre la viga y el suelo son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$, *a*) use software a fin de calcular x para cualquier valor de θ mientras la viga se desliza hacia la izquierda, asimismo determine x_0, x_m y θ_1, *b*) configure el software a fin de calcular, para cualquier θ, el valor de x con el cual el deslizamiento hacia la derecha será inminente, también determine el valor θ_2 de θ que corresponde a $x = x_m$.

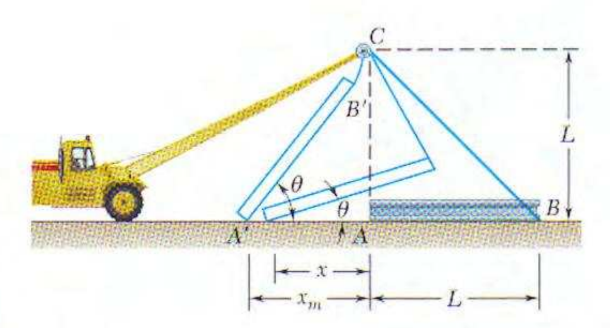
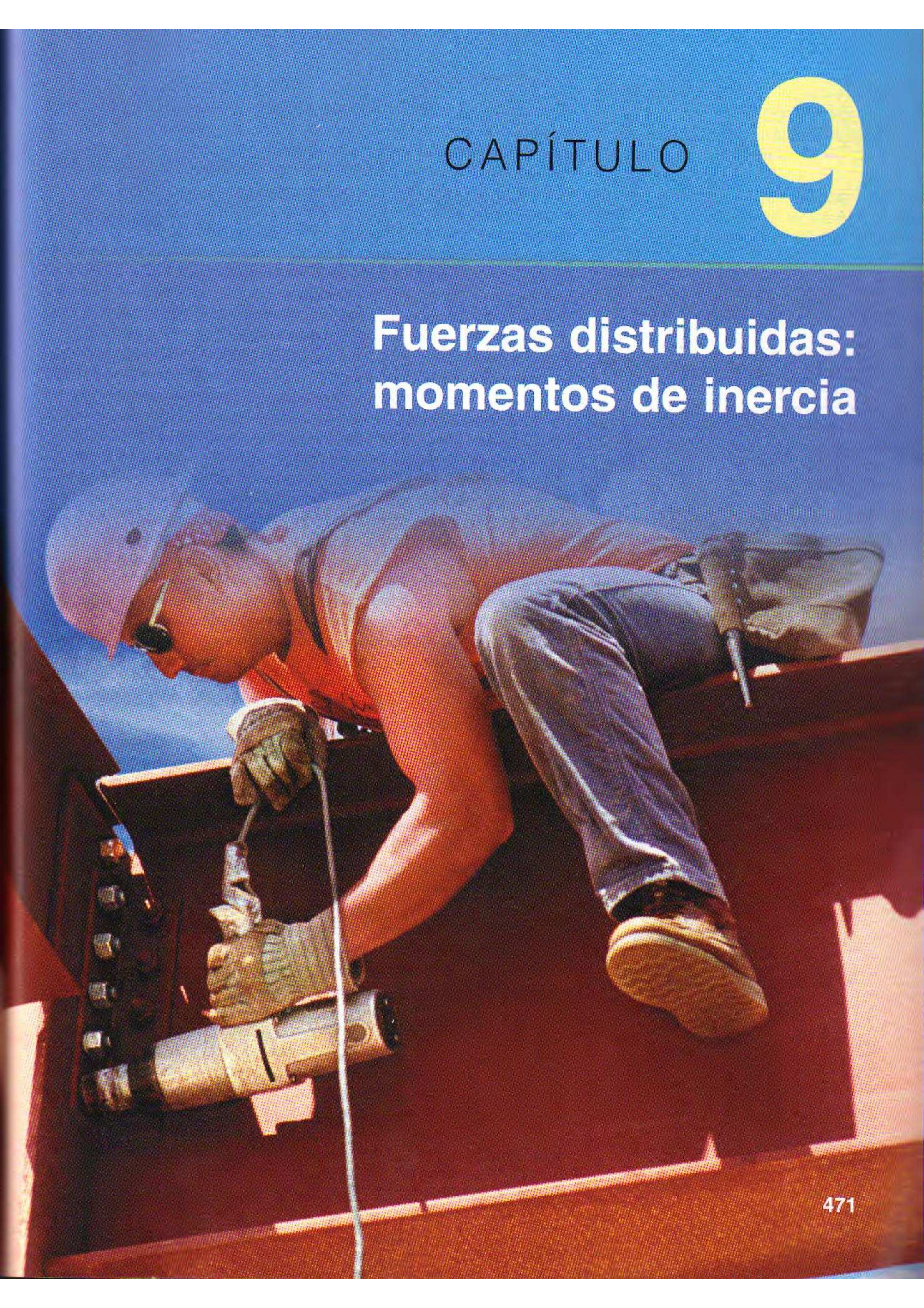


Figura P8.C8

La resistencia de los elementos estructurales que se emplean en la construcción de edificios depende en gran medida de las propiedades de sus secciones transversales. Esto incluye los segundos momentos, o momentos de inercia, de tales secciones transversales.



CAPÍTULO 9

Fuerzas distribuidas: momentos de inercia

9.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 5 se analizaron varios sistemas de fuerzas que estaban distribuidas sobre un área o volumen. Los tres tipos principales de fuerzas que se consideraron fueron: 1) los pesos de placas homogéneas de espesor uniforme (secciones 5.3 a la 5.6), 2) las cargas distribuidas que actúan sobre vigas (sección 5.8) y las fuerzas hidrostáticas (sección 5.9) y 3) los pesos de cuerpos tridimensionales homogéneos (secciones 5.10 y 5.11). En el caso de placas homogéneas, la magnitud ΔW del peso de un elemento de una placa fue proporcional al área ΔA de dicho elemento. Para las cargas distribuidas que actuaban sobre vigas, la magnitud ΔW de cada peso elemental fue representado con un elemento de área $\Delta A = \Delta W$ bajo la curva de carga; por otra parte, en el caso de fuerzas hidrostáticas que actuaban sobre superficies rectangulares sumergidas, se siguió un procedimiento similar. En el caso de cuerpos tridimensionales homogéneos, la magnitud ΔW del peso de un elemento del cuerpo era proporcional al volumen ΔV de dicho elemento. Por tanto, en todos los casos que se consideraron en el capítulo 5, las fuerzas distribuidas eran proporcionales a las áreas o a los volúmenes elementales asociados con éstas. Por consiguiente, la resultante de dichas fuerzas se podía obtener con la suma de las áreas o los volúmenes correspondientes y el momento de la resultante con respecto a cualquier eje dado se podía determinar al calcular los primeros momentos de las áreas o de los volúmenes con respecto a dicho eje.

En la primera parte del presente capítulo se estudian fuerzas distribuidas $\Delta \mathbf{F}$ cuyas magnitudes no sólo dependen de los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan éstas, sino que también dependen de la distancia que hay desde ΔA hasta algún eje dado. En forma más precisa, se supone que la magnitud de la fuerza por unidad de área $\Delta F/\Delta A$ varía linealmente con la distancia al eje bajo consideración. Como se señala en la siguiente sección, las fuerzas de este tipo se presentan en el estudio de la flexión de vigas y en problemas que involucran superficies sumergidas que no son rectangulares. Si las fuerzas elementales involucradas están distribuidas sobre un área A y varían linealmente con la distancia y al eje x, se demostrará que mientras que la magnitud de su resultante $\mathbf{R}$ depende del primer momento $Q_x = \int y\, dA$ del área A, la ubicación del punto donde se aplica $\mathbf{R}$ depende del *segundo momento*, o *momento de inercia*, $I_x = \int y^2\, dA$ de la misma área con respecto al eje x. Se aprenderá a calcular los momentos de inercia de diversas áreas con respecto a ejes x y y dados. Además, en la primera parte de este capítulo se introduce el *momento polar de inercia* $J_O = \int r^2\, dA$ de un área, donde r es la distancia desde el elemento de área dA hasta el punto O. Para facilitar los cálculos, se establecerá una relación entre el momento de inercia I_x de un área A con respecto a un eje x dado y el momento de inercia $I_{x'}$ de la misma área con respecto al eje centroidal paralelo x' (teorema de los ejes paralelos). También se estudiará la transformación de los momentos de inercia de un área dada cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.9 y 9.10).

En la segunda parte del capítulo se aprenderá cómo determinar los momentos de inercia de varias *masas* con respecto a un eje dado. Como se verá en la sección 9.11, el momento de inercia de una masa dada con respecto a un eje AA' se define como $I = \int r^2\, dm$, donde r es la distancia desde el eje AA' hasta el elemento de masa dm. Los momentos de inercia de masas se encuentran en la dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. Para facilitar el cálculo del momento de inercia de masa, se introducirá el teorema de los ejes paralelos (sección 9.12). Por último, se aprenderá a analizar la trans-

formación de momentos de inercia de masas cuando se rotan los ejes coordenados (secciones 9.16 a la 9.18).

MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS

9.2. SEGUNDO MOMENTO, O MOMENTO DE INERCIA, DE UN ÁREA

En la primera parte de este capítulo se estudian fuerzas distribuidas $\Delta\mathbf{F}$ cuyas magnitudes ΔF son proporcionales a los elementos de área ΔA sobre los cuales actúan dichas fuerzas y, que al mismo tiempo, varían linealmente con la distancia que hay desde ΔA hasta un eje dado.

Por ejemplo, considérese una viga de sección transversal uniforme, la cual está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga. Se dice que una viga en estas condiciones está en *flexión pura* y en la mecánica de materiales se demuestra que las fuerzas internas en cualquier sección de la viga son fuerzas distribuidas cuyas magnitudes $\Delta F = ky\ \Delta A$ varían linealmente con la distancia y que hay entre el elemento de área ΔA y un eje que pasa a través del centroide de la sección. Dicho eje, representado por el eje x en la figura 9.1, se conoce como el *eje neutro* de la sección. Las fuerzas en un lado del eje neutro son fuerzas de compresión, mientras que las fuerzas en el otro lado son fuerzas de tensión; sobre el propio eje neutro las fuerzas son iguales a cero.

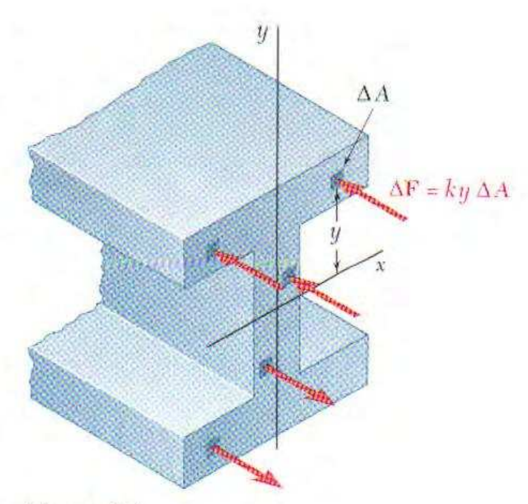


Figura 9.1

La magnitud de la resultante $\mathbf{R}$ de las fuerzas elementales $\Delta\mathbf{F}$ que actúan sobre toda la sección es

$$R = \int ky\ dA = k \int y\ dA$$

La última integral obtenida se conoce como el *primer momento* Q_x de la sección con respecto al eje x; ésta es igual a $\bar{y}A$ y, por tanto, es igual a cero puesto que el centroide de la sección está ubicado sobre el eje x. Por consiguiente, el sistema de fuerzas $\Delta\mathbf{F}$ se reduce a un par. La magnitud M de dicho par (momento flector) debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y\ \Delta F = ky^2\ \Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre toda la sección se obtiene

$$M = \int ky^2\ dA = k \int y^2\ dA$$

La última integral se conoce como el *segundo momento*, o *momento de inercia*,[†] de la sección de la viga con respecto al eje x y se representa con I_x. Éste se obtiene con la multiplicación de cada elemento de área dA por el *cuadrado de su distancia* desde el eje x e integrándolo sobre la sección de la viga. Como cada producto $y^2\ dA$ es positivo, sin importar el signo de y, o cero (si y es cero), la integral I_x siempre será positiva.

Otro ejemplo de un segundo momento o momento de inercia de un área lo proporciona el siguiente problema de hidrostática: una compuerta circular vertical utilizada para cerrar el escurridero de un depósito grande está sumergida bajo el agua, como se muestra en la figura 9.2. ¿Cuál es la resultante de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la compuerta y cuál es el momento de la resultante con respecto a la línea de intersección del plano de la compuerta y la superficie del agua (eje x)?

[†]El término *segundo momento* es más apropiado que el término *momento de inercia* puesto que, por lógica, este último sólo debería utilizarse para denotar integrales de masa (véase sección 9.11). Sin embargo, en la práctica de la ingeniería se utiliza el término momento de inercia para referirse tanto a áreas como a masas.

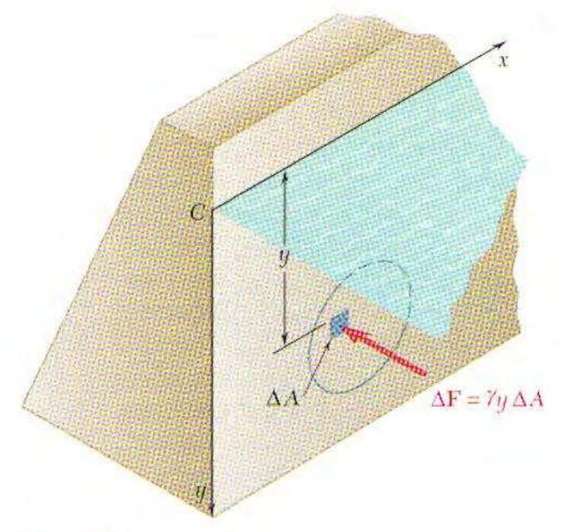


Figura 9.2

Si la compuerta fuera rectangular, la resultante de las fuerzas de presión se podría determinar a partir de la curva de presión, como se hizo en la sección 5.9. Sin embargo, puesto que la compuerta es circular, se debe utilizar un método más general. Representando con y la profundidad de un elemento de área ΔA y con γ el peso específico del agua, la presión en el elemento es $p = \gamma y$ y la magnitud de la fuerza elemental ejercida sobre ΔA es $\Delta F = p\,\Delta A = \gamma y\,\Delta A$. Por tanto, la magnitud de la resultante de las fuerzas elementales es

$$R = \int \gamma y\, dA = \gamma \int y\, dA$$

y se puede obtener calculando el primer momento $Q_x = \int y\, dA$ del área de la compuerta con respecto al eje x. El momento M_x de la resultante debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y\,\Delta F = \gamma y^2\,\Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre el área de la compuerta, se tiene que

$$M_x = \int \gamma y^2\, dA = \gamma \int y^2\, dA$$

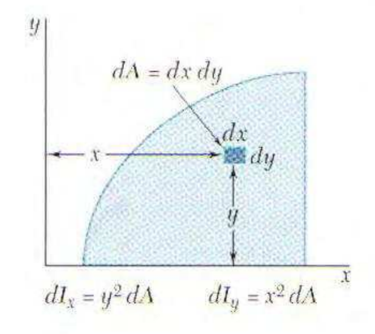
Aquí la integral obtenida representa el segundo momento o momento de inercia I_x del área con respecto al eje x.

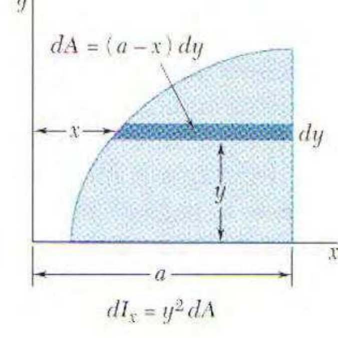
9.3. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA POR INTEGRACIÓN

En la sección anterior se definió el segundo momento o momento de inercia de un área A con respecto al eje x. Definiendo de forma similar el momento de inercia I_y del área A con respecto al eje y, se escribe (figura 9.3*a*)

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{9.1}$$

Estas integrales, conocidas como los *momentos rectangulares de inercia* del área A, se pueden evaluar con facilidad si se selecciona a dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. Para calcular I_x, la tira se selecciona paralela al eje x, de manera que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia y del eje x (figura 9.3*b*); entonces, se obtiene el momento de inercia dI_x de la tira multiplicando su área dA por y^2. Para calcular I_y, la tira se selecciona paralela al eje y de forma que todos los puntos de dicha tira estén a la misma distancia x del eje y (figura 9.3*c*); así, el momento de inercia dI_y de la tira es $x^2\, dA$.





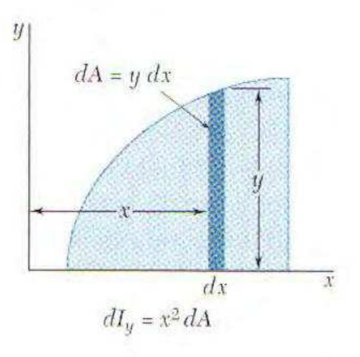


Figura 9.3 *a*) *b*) *c*)

Momento de inercia de un área rectangular. Como un ejemplo, se procederá a determinar el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base (figura 9.4). Dividiendo el rectángulo en tiras paralelas al eje x, se obtiene

$$dA = b\,dy \qquad dI_x = y^2 b\,dy$$

$$I_x = \int_0^h by^2\,dy = \tfrac{1}{3}bh^3 \tag{9.2}$$

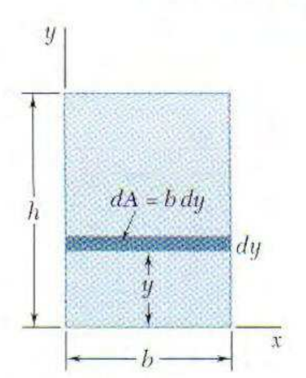


Figura 9.4

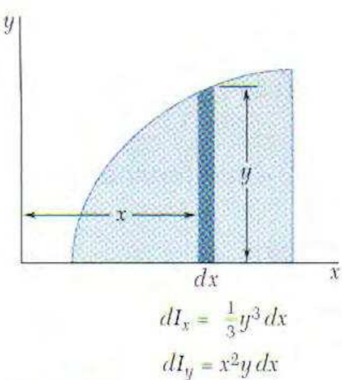
Cálculo de I_x e I_y con el uso de las mismas tiras elementales. La fórmula que se acaba de derivar se puede utilizar para determinar el momento de inercia dI_x con respecto al eje x de una tira rectangular que es paralela al eje y, como la tira mostrada en la figura 9.3c. Estableciendo $b = dx$ y $h = y$ en la fórmula (9.2), se escribe

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx$$

Por otra parte, se tiene que

$$dI_y = x^2\,dA = x^2 y\,dx$$

Por tanto, se puede utilizar el mismo elemento para calcular los momentos de inercia I_x e I_y de un área dada (figura 9.5).



$dI_x = \frac{1}{3}y^3\,dx$

$dI_y = x^2 y\,dx$

Figura 9.5

9.4. MOMENTO POLAR DE INERCIA

Una integral muy importante en los problemas relacionados con la torsión de flechas cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas es la siguiente

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

donde r es la distancia desde O hasta el área elemental dA (figura 9.6). Esta integral es el *momento polar de inercia* del área A con respecto *al "polo"* O.

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y del área, si dichas cantidades ya son conocidas. De hecho, si se observa que $r^2 = x^2 + y^2$, se puede escribir

$$J_O = \int r^2\,dA = \int (x^2 + y^2)\,dA = \int y^2\,dA + \int x^2\,dA$$

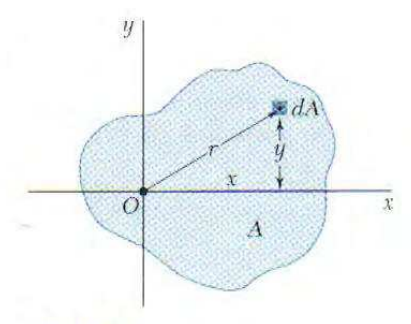
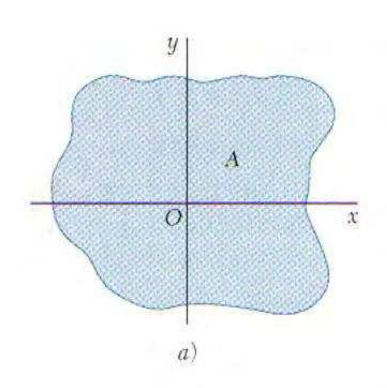
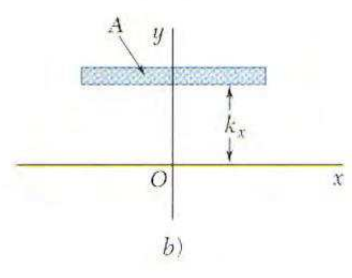


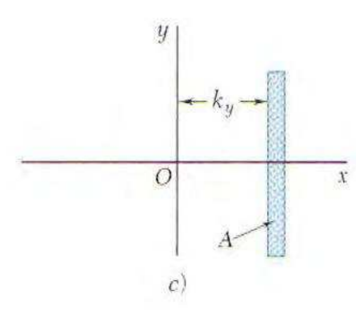
Figura 9.6

esto es,

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$







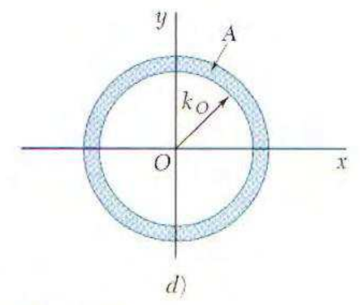


Figura 9.7

9.5. RADIO DE GIRO DE UN ÁREA

Considere un área A que tiene un momento de inercia I_x con respecto al eje x (figura 9.7*a*). Imagine que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje x (figura 9.7*b*). Si el área A, concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje x, la tira debe ser colocada a una distancia k_x desde el eje x, donde k_x está definida por la relación

$$I_x = k_x^2 A$$

Al resolver para k_x, se escribe

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{9.5}$$

Se hace referencia a la distancia k_x como el *radio de giro* del área con respecto al eje x. En forma similar, se pueden definir los radios de giro k_y y k_O (figura 9.7*c* y *d*); así se escribe

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{9.6}$$

$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \tag{9.7}$$

Si se reescribe la ecuación (9.4) en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2 \tag{9.8}$$

Ejemplo. Para el rectángulo mostrado en la figura 9.8, se calcula el radio de giro k_x con respecto a su base. Con las fórmulas (9.5) y (9.2), se escribe

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \qquad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

En la figura 9.8 se muestra el radio de giro k_x del rectángulo. El radio de giro no debe confundirse con la ordenada $\bar{y} = h/2$ del centroide del área. Mientras k_x depende del *segundo momento* o momento de inercia del área la ordenada $\bar{y}$ está relacionada con el *primer momento* del área.

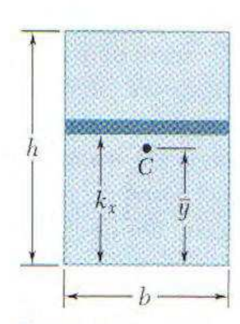
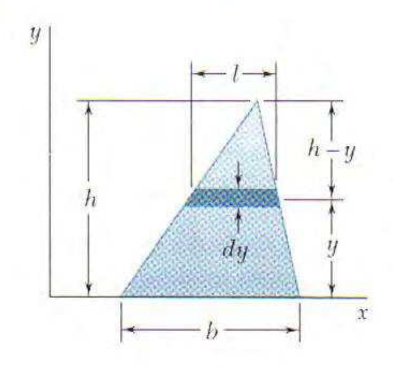


Figura 9.8

PROBLEMA RESUELTO 9.1

Determine el momento de inercia de un triángulo con respecto a su base.



SOLUCIÓN

Se dibuja un triángulo de base b y altura h; el eje x se selecciona de manera que coincida con la base del triángulo. Se selecciona dA como una tira diferencial paralela al eje x. Como todas las porciones de la tira están a la misma distancia a partir del eje x, se escribe

$$dI_x = y^2\,dA \qquad dA = l\,dy$$

Si se utilizan triángulos semejantes se tiene que

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}\,dy$$

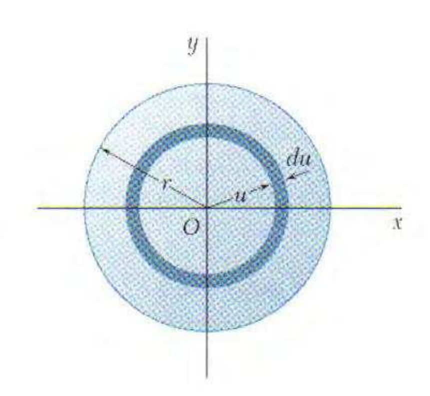
Con la integración de dI_x desde $y = 0$ hasta $y = h$, se obtiene

$$I_x = \int y^2\,dA = \int_0^h y^2 b\frac{h-y}{h}\,dy = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)\,dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h \qquad I_x = \frac{bh^3}{12} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 9.2

a) Determine el momento polar centroidal de inercia de un área circular por integración directa; *b*) utilice el resultado del inciso *a*) y determine el momento de inercia de un área circular con respecto a uno de sus diámetros.



SOLUCIÓN

***a*) Momento polar de inercia.** Se selecciona dA como un elemento anular diferencial de área. Como todas las porciones del área diferencial están a la misma distancia desde el origen, se escribe

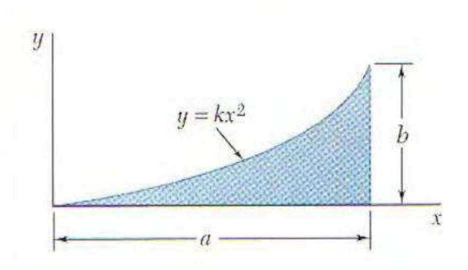
$$dJ_O = u^2\,dA \qquad dA = 2\pi u\,du$$

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2(2\pi u\,du) = 2\pi\int_0^r u^3\,du$$

$$J_O = \frac{\pi}{2}r^4 \blacktriangleleft$$

***b*) Momento de inercia con respecto a un diámetro.** Debido a la simetría del área circular, se tiene que $I_x = I_y$. Entonces, se escribe

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \frac{\pi}{2}r^4 = 2I_x \qquad I_{\text{diámetro}} = I_x = \frac{\pi}{4}r^4 \blacktriangleleft$$



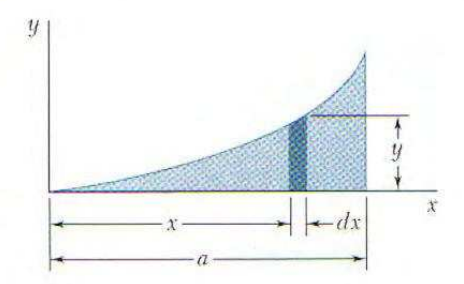
PROBLEMA RESUELTO 9.3

a) Determine el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes coordenados correspondientes al área sombreada que se muestra en la figura (las propiedades de esta área fueron consideradas en el problema resuelto 5.4), *b*) utilice los resultados del inciso *a*) y determine el radio de giro del área sombreada con respecto de cada uno de los ejes coordenados.

SOLUCIÓN

Haciendo referencia al problema resuelto 5.4, se obtienen las siguientes expresiones para la ecuación de la curva y para el área total:

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad A = \tfrac{1}{3}ab$$



Momento de inercia I_x. Se selecciona dA como un elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones de este elemento *no* están a la misma distancia desde el eje x, se debe tratar al elemento como un rectángulo delgado. Entonces, el momento de inercia del elemento con respecto al eje x es

$$dI_x = \tfrac{1}{3}y^3\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}x^6\,dx = \left[\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^6}\frac{x^7}{7}\right]_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{21} \quad ◀$$

Momento de inercia I_y. Se utiliza el mismo elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones del elemento están a la misma distancia desde el eje y, se escribe

$$dI_y = x^2\,dA = x^2(y\,dx) = x^2\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{b}{a^2}x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^4\,dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^5}{5}\right]_0^a$$

$$I_y = \frac{a^3b}{5} \quad ◀$$

Radios de giro k_x y k_y. Por definición, se tiene que

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3/21}{ab/3} = \frac{b^2}{7} \qquad k_x = \sqrt{\tfrac{1}{7}}\,b \quad ◀$$

y

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^3b/5}{ab/3} = \tfrac{3}{5}a^2 \qquad k_y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,a \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El propósito de esta lección fue introducir los *momentos rectangulares y polares de inercia de áreas* y los *radios de giro* correspondientes. A pesar de que los problemas propuestos que se deben resolver pueden parecer más apropiados para una clase de cálculo que para una de mecánica, se espera que los comentarios hechos en la introducción hayan convencido al lector de la relevancia de los momentos de inercia para el estudio de diversos temas de ingeniería.

1. *Cálculo de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y.* Estas cantidades se definieron como

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \tag{9.1}$$

donde dA es un elemento diferencial de área $dx\, dy$. Los momentos de inercia son *los segundos momentos de un área*; es por esta razón que I_x, por ejemplo, depende de la distancia perpendicular y al área dA. Conforme se estudie la sección 9.3, se debe reconocer la importancia de definir con cuidado la forma y la orientación de dA. Más aún, se deben observar los siguientes puntos:

a) Los momentos de inercia de la mayoría de las áreas se pueden obtener por medio de una sola integración. Las expresiones proporcionadas en las figuras 9.3*b* y *c* y en la figura 9.5 se pueden utilizar para calcular I_x e I_y. Sin importar si se realiza una sola integración o una integración doble, siempre se debe mostrar en el croquis el elemento dA que se ha seleccionado.

b) El momento de inercia de un área siempre es positivo, sin importar la ubicación del área con respecto a los ejes coordenados. Esto se debe a que el momento de inercia se obtiene integrando el producto de dA y el *cuadrado* de una distancia. (Obsérvese cómo lo anterior difiere de los resultados para el primer momento del área.) Sólo cuando un área se *remueve* (como en el caso de un agujero) su momento de inercia se utilizará en los cálculos con un signo negativo.

c) Como una comprobación parcial del trabajo realizado, observe que los momentos de inercia son iguales a un área por el cuadrado de una longitud. Por tanto, cada término en la expresión para un momento de inercia debe ser una *longitud elevada a la cuarta potencia*.

2. *Cálculo del momento polar de inercia J_O.* J_O se definió como

$$J_O = \int r^2\, dA \tag{9.3}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2$. Si el área dada posee simetría circular (como en el problema resuelto 9.2), es posible expresar dA como una función de r y calcular J_O con una sola integración. Cuando el área no posee simetría circular, es más fácil calcular primero I_x e I_y y, entonces, determinar J_O a partir de la siguiente expresión

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Por último, si la ecuación de la curva que acota al área dada está expresada en coordenadas polares, entonces $dA = r\, dr\, d\theta$ y se requiere una integración doble para calcular la integral para J_O [véase el problema propuesto 9.27].

3. *Determinación de los radios de giro k_x y k_y y del radio polar de giro k_O.* Estas cantidades se definieron en la sección 9.5 y se debe observar que sólo pueden determinarse una vez que se han calculado el área y los momentos de inercia apropiados. Es importante recordar que k_x está medido en la dirección de y mientras que k_y está medido en la dirección de x; se debe estudiar con detalle la sección 9.5 hasta que se haya comprendido este punto.

Problemas

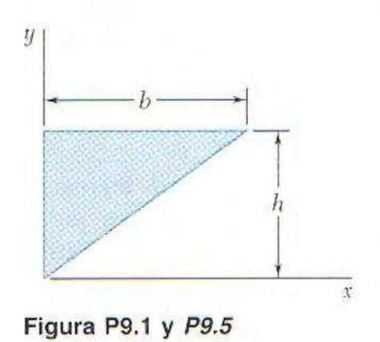
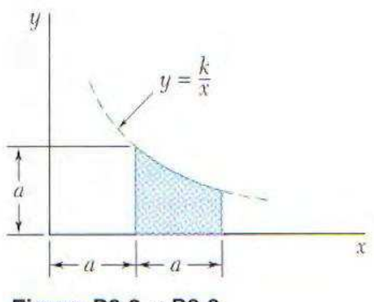
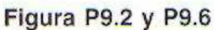


Figura P9.1 y *P9.5*

9.1 a 9.4 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje y.

9.5* a *9.8 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje x.




Figura P9.2 y P9.6

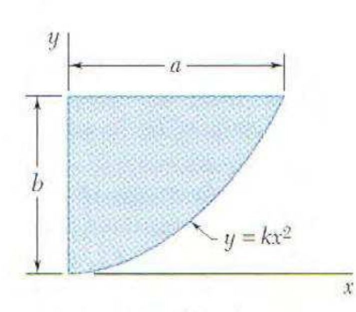


Figura P9.3 y P9.7

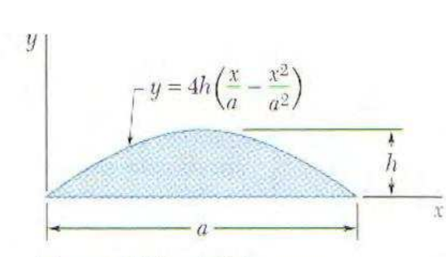


Figura P9.4 y *P9.8*

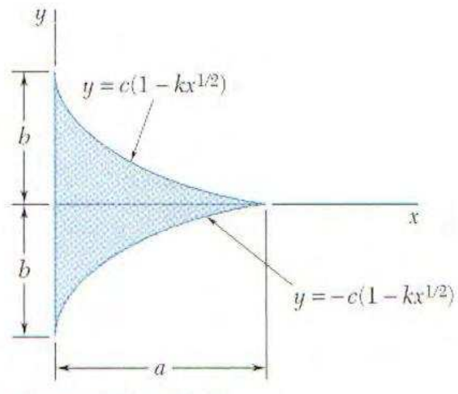
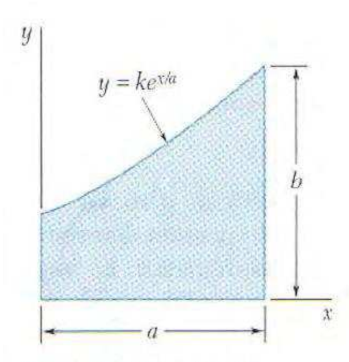
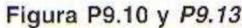


Figura P9.9 y P9.12

9.9 a 9.11 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje x.

9.12 a *9.14* Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje y.




Figura P9.10 y *P9.13*

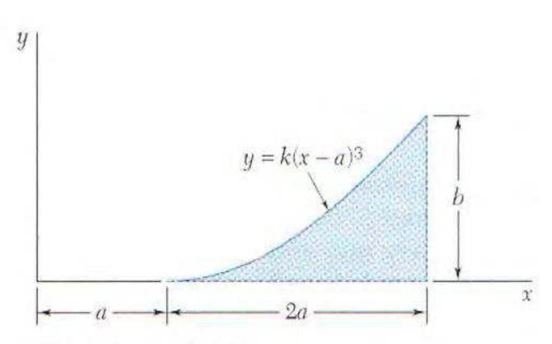


Figura P9.11 y *P9.14*

9.15 y 9.16 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x.

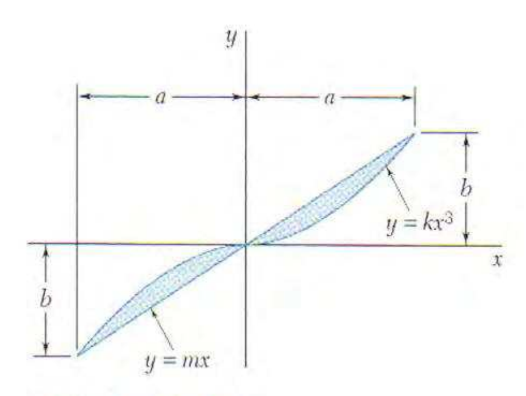


Figura P9.15 y P9.17

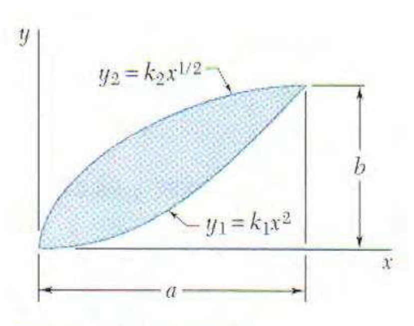


Figura P9.16 y P9.18

9.17 y 9.18 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y.

9.19 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x.

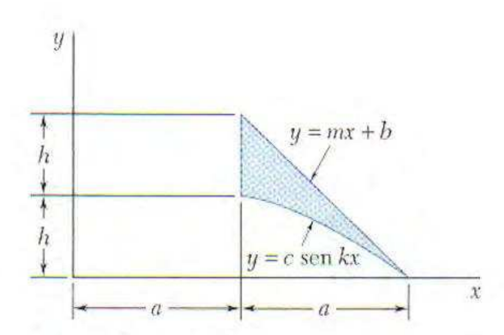


Figura *P9.19* y *P9.20*

9.20 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y.

9.21 y 9.22 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto P.

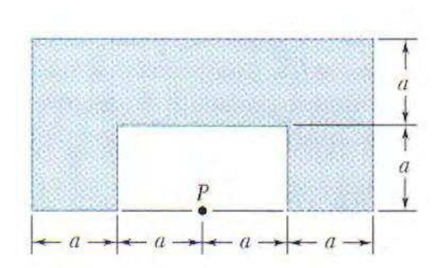


Figura P9.21

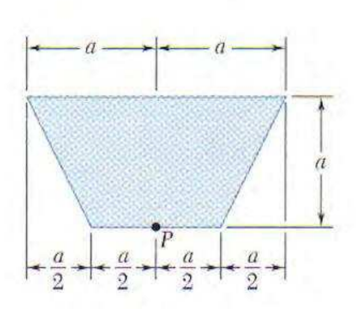


Figura P9.22

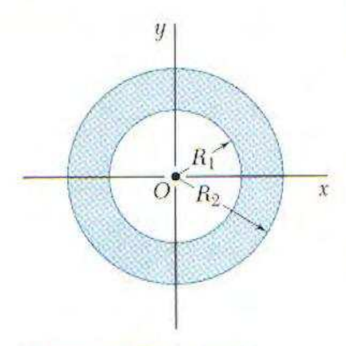


Figura P9.23 y P9.24

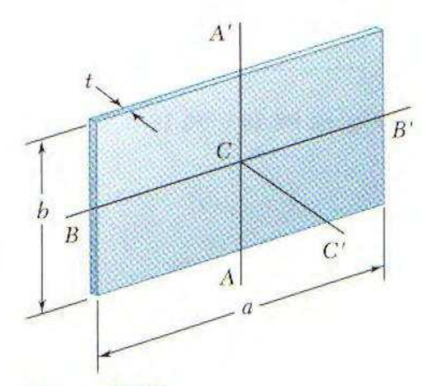


Figura P9.25

9.23 *a*) Determine por integración directa el momento polar de inercia del área anular mostrada con respecto al punto O. *b*) Con el resultado del inciso *a*, determine los momentos de inercia del área dada con respecto al eje x.

9.24 *a*) Demuestre que el radio de giro polar k_O del área anular mostrada es aproximadamente igual al radio medio $R_m = (R_1 + R_2)/2$ para valores pequeños del espesor $t = R_2 - R_1$. *b*) Determine el porcentaje de error generado al utilizar R_m en lugar de k_O para los siguientes valores de t/R_m: 1, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{10}$.

9.25 y *9.26* Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto P.

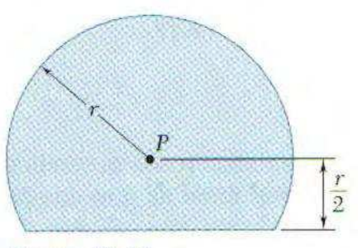


Figura *P9.26*

9.27 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto O.

9.28 Para el triángulo isósceles que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto O.

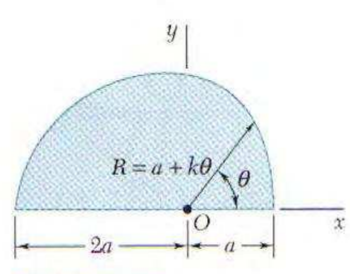


Figura *P9.27*

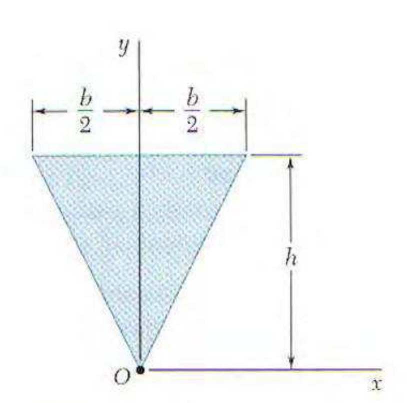


Figura P9.28

***9.29** Con el momento polar de inercia del triángulo isósceles del problema 9.28, demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área circular de radio r es $\pi r^4/2$. (*Sugerencia*: A medida que el área de un círculo se divide en un número creciente de sectores circulares del mismo tamaño, ¿cuál es la forma aproximada que debe tener cada sector circular?)

***9.30** Demuestre que el momento polar de inercia centroidal de un área dada A no puede ser menor que $A^2/2\pi$. (*Sugerencia*: Compare el momento de inercia del área dada con el momento de inercia de un círculo que tenga la misma área y el mismo centroide.)

9.6. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER

Considere el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje AA' (figura 9.9). Si se representa con y la distancia desde un elemento de área dA hasta AA', se escribe

$$I = \int y^2\, dA$$

Ahora, se dibuja a través del centroide C del área un eje BB' que es paralelo a AA', dicho eje es llamado *eje centroidal*. Representando con

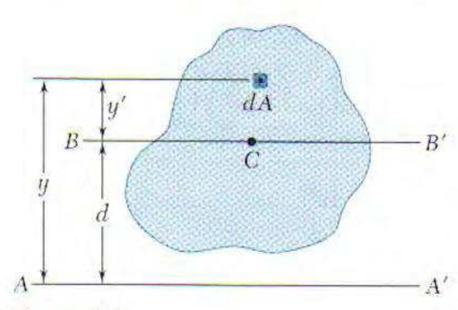


Figura 9.9

y' la distancia desde el elemento dA hasta BB', se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los ejes AA' y BB'. Sustituyendo por y en la integral anterior, se escribe

$$\begin{aligned} I &= \int y^2\, dA = \int (y' + d)^2\, dA \\ &= \int y'^2\, dA + 2d \int y'\, dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

La primera integral representa el momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB'. La segunda integral representa el primer momento del área con respecto a BB'; como el centroide C del área está localizado sobre dicho eje, la segunda integral debe ser igual a cero. Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total A. Por tanto, se tiene

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{9.9}$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia I de un área con respecto a cualquier eje dado AA' es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto a un eje centroidal BB' que es paralelo a AA' *más* el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes. Este teorema se conoce como el *teorema de los ejes paralelos* o *teorema de Steiner*. Sustituyendo k^2A por I y $\bar{k}^2A$ por $\bar{I}$, el teorema también se puede expresar de la siguiente forma

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.10}$$

Se puede utilizar un teorema similar para relacionar el momento polar de inercia J_O de un área, con respecto a un punto O, con el momento polar de inercia $\bar{J}_C$, de la misma área con respecto a su centroide C. Denotando con d la distancia entre O y C, se escribe

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad \text{o} \qquad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \tag{9.11}$$

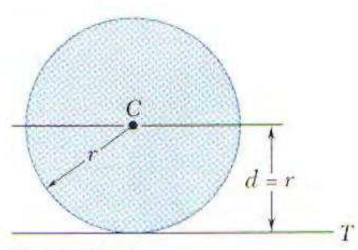


Figura 9.10

Ejemplo 1. Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos, se procederá a determinar el momento de inercia I_T de un área circular con respecto a una línea tangente al círculo (figura 9.10). En el problema resuelto 9.2 se encontró que el momento de inercia de un área circular con respecto a un eje centroidal es $\bar{I} = \frac{1}{4}\pi r^4$. Por tanto se puede escribir

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + (\pi r^2)r^2 = \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

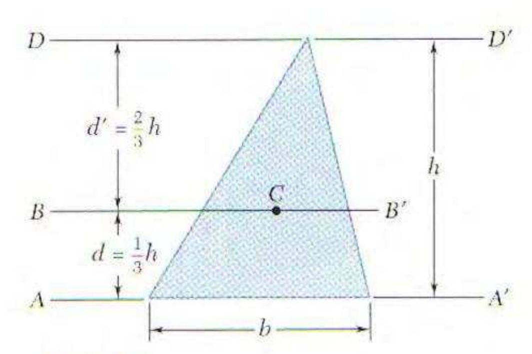


Figura 9.11

Ejemplo 2. El teorema de los ejes paralelos también se puede utilizar para determinar el momento centroidal de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo. Por ejemplo, considere un área triangular (figura 9.11). En el problema resuelto 9.1 se encontró que el momento de inercia del triángulo con respecto a su base AA' es igual a $\frac{1}{12}bh^3$. Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$\bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 - \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{1}{3}h)^2 = \tfrac{1}{36}bh^3$$

Es necesario resaltar que el producto Ad^2 fue *restado* del momento de inercia dado, con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Observe que dicho producto se *suma* cuando se pasa *de* un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe *restarse* cuando se pasa *a* un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor en relación con un eje centroidal que con respecto a cualquier otro eje paralelo.

En la figura 9.11 se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto a la línea DD' (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

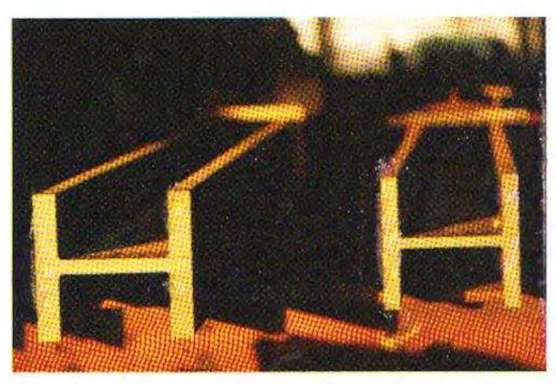
$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad'^2 = \tfrac{1}{36}bh^3 + \tfrac{1}{2}bh(\tfrac{2}{3}h)^2 = \tfrac{1}{4}bh^3$$

Observe que $I_{DD'}$ no se habría podido obtener directamente a partir de $I_{AA'}$. El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

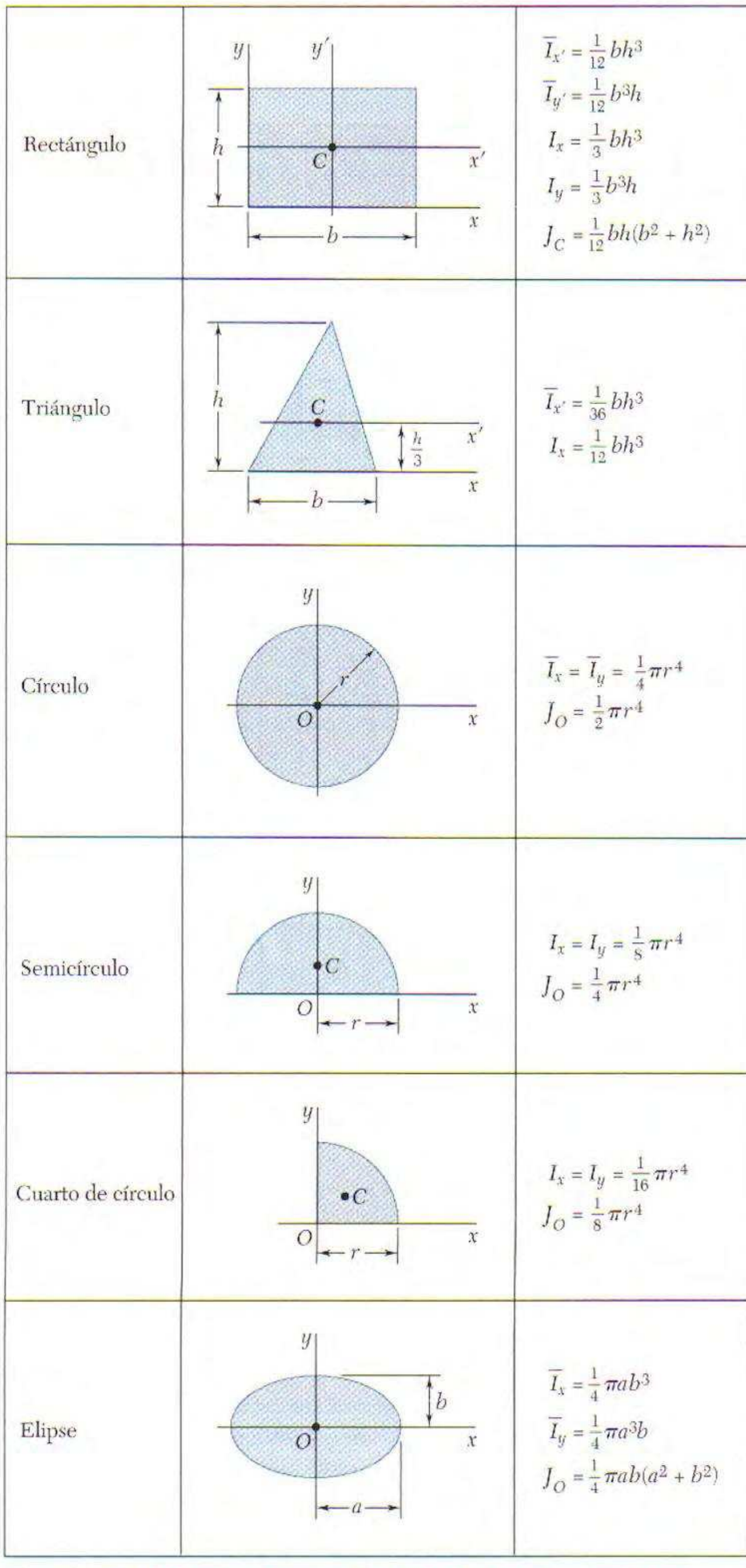
9.7. MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS COMPUESTAS

Un área compuesta A que está constituida por varias áreas componentes $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Como la integral que representa el momento de inercia de A puede subdividirse en integrales evaluadas sobre A_1, A_2, $A_3, \ldots$, el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtiene sumando los momentos de las áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots$ con respecto al mismo eje. Por tanto, el momento de inercia de un área que consta de varias de las formas comunes mostradas en la figura 9.12, se puede obtener con las fórmulas proporcionadas en dicha figura. Sin embargo, antes de sumar los momentos de inercia de las áreas componentes, es posible que se tenga que utilizar el teorema de los ejes paralelos para pasar cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en los problemas resueltos 9.4 y 9.5.

En la figura 9.13 se proporcionan las propiedades de las secciones transversales de varias formas (o perfiles) estructurales. Como se señaló en la sección 9.2, el momento de inercia de una sección de una viga con respecto a su eje neutro está relacionado con el cálculo del momento flector en esa sección de la viga. Por tanto, la determinación de los momentos de inercia es un prerrequisito para el análisis y el diseño de elementos estructurales.



Fotografía 9.1 En la figura 9.13 se tabularon los datos de una pequeña muestra de todas las formas de acero laminado que se encuentran con facilidad. En la fotografía se muestran dos ejemplos de vigas de patín ancho que se usan en la construcción de edificios.



Rectángulo	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo	$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo	$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo	$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse	$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 9.12 Momentos de inercia de formas geométricas comunes.

Es necesario señalar que el radio de giro de un área compuesta *no* es igual a la suma de los radios de giro de las áreas componentes. Para determinar el radio de giro de un área compuesta, es necesario que primero se calcule el momento de inercia del área.

	Designación	Área in.²	Altura in.	Ancho in.	Eje X-X $\overline{I}_x$, in.⁴	Eje X-X $\overline{k}_x$, in.	Eje X-X $\overline{y}$, in.	Eje Y-Y $\overline{I}_y$, in.⁴	Eje Y-Y $\overline{k}_y$, in.	Eje Y-Y $\overline{x}$, in.
Formas tipo W (formas de patín ancho)	W18 × 50[†]	14.7	17.99	7.495	800	7.38		40.1	1.65	
	W16 × 40	11.8	16.01	6.995	518	6.63		28.9	1.57	
	W14 × 30	8.85	13.84	6.730	291	5.73		19.6	1.49	
	W8 × 24	7.08	7.93	6.495	82.8	3.42		18.3	1.61	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses)	S18 × 70[†]	20.6	18.00	6.251	926	6.71		24.1	1.08	
	S12 × 50	14.7	12.00	5.477	305	4.55		15.7	1.03	
	S10 × 35	10.3	10.00	4.944	147	3.78		8.36	0.901	
	S6 × 17.25	5.07	6.00	3.565	26.3	2.28		2.31	0.675	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses)	C12 × 25[†]	7.35	12.00	3.047	144	4.43		4.47	0.780	0.674
	C10 × 20	5.88	10.00	2.739	78.9	3.66		2.81	0.692	0.606
	C8 × 13.75	4.04	8.00	2.343	36.1	2.99		1.53	0.615	0.553
	C6 × 10.5	3.09	6.00	2.034	15.2	2.22		0.866	0.529	0.499
Ángulos	L6 × 6 × $\frac{3}{4}$[‡]	8.44			28.2	1.83	1.78	28.2	1.83	1.78
	L4 × 4 × $\frac{1}{2}$	3.75			5.56	1.22	1.18	5.56	1.22	1.18
	L3 × 3 × $\frac{1}{4}$	1.44			1.24	0.930	0.842	1.24	0.930	0.842
	L6 × 4 × $\frac{1}{2}$	4.75			17.4	1.91	1.99	6.27	1.15	0.987
	L5 × 3 × $\frac{1}{2}$	3.75			9.45	1.59	1.75	2.58	0.829	0.750
	L3 × 2 × $\frac{1}{4}$	1.19			1.09	0.957	0.993	0.392	0.574	0.493

Figura 9.13A Propiedades de secciones de acero laminado (sistema de unidades de uso común en Estados Unidos).*

*Cortesía del American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois.

[†]Altura nominal en pulgadas y peso en libras por pie.

[‡]Altura, ancho y espesor en pulgadas.

	Designación	Área mm^2	Altura mm	Ancho mm	Eje X-X: $\bar{I}_x$ $10^6\ mm^4$	Eje X-X: $\bar{k}_x$ mm	Eje X-X: $\bar{y}$ mm	Eje Y-Y: $\bar{I}_y$ $10^6\ mm^4$	Eje Y-Y: $\bar{k}_y$ mm	Eje Y-Y: $\bar{x}$ mm
Formas tipo W (formas de patín ancho)	W460 × 74[†]	9 450	457	190	333	188		16.6	41.9	
	W410 × 60	7 580	407	178	216	169		12.1	40.0	
	W360 × 44	5 730	352	171	122	146		8.18	37.8	
	W200 × 35.9	4 580	201	165	34.4	86.7		7.64	40.8	
Formas tipo S (formas estándar estadounidenses)	S460 × 104[†]	13 300	457	159	385	170		10.4	27.5	
	S310 × 74	9 480	305	139	126	115		6.69	26.1	
	S250 × 52	6 670	254	126	61.2	95.8		3.59	22.9	
	S150 × 25.7	3 270	152	91	10.8	57.5		1.00	17.2	
Formas tipo C (canales estándar estadounidenses)	C310 × 37[†]	5 690	305	77	59.7	112		1.83	19.7	17.0
	C250 × 30	3 780	254	69	32.6	92.9		1.14	17.4	15.3
	C200 × 27.9	3 560	203	64	18.2	71.5		0.817	15.1	14.3
	C150 × 15.6	1 980	152	51	6.21	56.0		0.347	13.2	12.5
Ángulos	L152 × 152 × 19.0[‡]	5 420			11.6	46.3	44.9	11.6	46.3	44.9
	L102 × 102 × 12.7	2 430			2.34	31.0	30.2	2.34	31.0	30.2
	L76 × 76 × 6.4	932			0.517	23.6	21.4	0.517	23.6	21.4
	L152 × 102 × 12.7	3 060			7.20	48.5	50.3	2.64	29.4	25.3
	L127 × 76 × 12.7	2 420			3.93	40.3	44.4	1.06	20.9	19.0
	L76 × 51 × 6.4	772			0.453	24.2	25.1	0.166	14.7	12.6

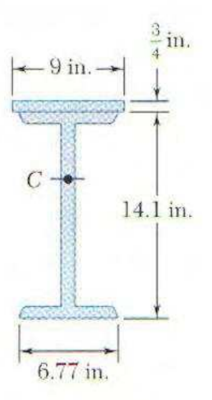
Figura 9.13B Propiedades de secciones de acero laminado (unidades del SI).

[†]Altura nominal en milímetros y masa en kilogramos por metro.

[‡]Altura, ancho y espesor en milímetros.

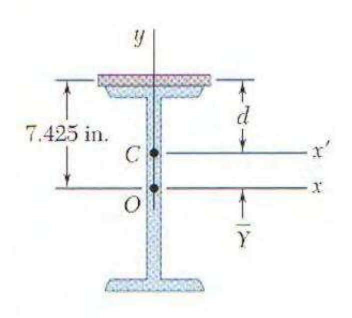


PROBLEMA RESUELTO 9.4



La resistencia de una viga W14 × 38 de acero laminado se incrementa uniéndole una placa de $9 \times \frac{3}{4}$ in. a su patín superior, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia y el radio de giro de la sección compuesta con respecto a un eje que es paralelo a la placa y que pasa a través del centroide C de la sección.

SOLUCIÓN



Se coloca el origen O de las coordenadas en el centroide de la forma de patín ancho y se calcula la distancia $\overline{Y}$ al centroide de la sección compuesta utilizando los métodos del capítulo 5. El área de la forma de patín ancho hace referencia a la figura 9.13A. El área y la coordenada y del centroide de la placa están dados por

$$A = (9 \text{ in.})(0.75 \text{ in.}) = 6.75 \text{ in.}^2$$
$$\overline{y} = \tfrac{1}{2}(14.1 \text{ in.}) + \tfrac{1}{2}(0.75 \text{ in.}) = 7.425 \text{ in.}$$

Tabla A

Sección	Área, in.^{2}	$\overline{y}$, in.	$\overline{y}A$, in.^{3}
Placa	6.75	7.425	50.12
Perfil de patín ancho	11.2	0	0
	$\Sigma A = 17.95$		$\Sigma\overline{y}A = 50.12$

$$\overline{Y}\Sigma A = \Sigma\overline{y}A \qquad \overline{Y}(17.95) = 50.12 \qquad \overline{Y} = 2.792 \text{ in.}$$

Momento de inercia. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de la forma de patín ancho y de la placa con respecto al eje x'. Este eje es centroidal para la sección compuesta pero *no* para cualquiera de los elementos considerados en forma separada. El valor de $\overline{I}_x$ para la forma de patín ancho se obtiene a partir de la figura 9.13A.

Para la forma de patín ancho,

$$I_{x'} = \overline{I}_x + A\overline{Y}^2 = 385 + (11.2)(2.792)^2 = 472.3 \text{ in.}^4$$

Para la placa,

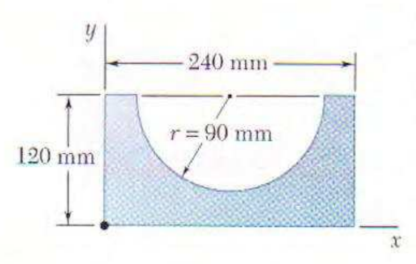
$$I_{x'} = \overline{I}_x + Ad^2 = (\tfrac{1}{12})(9)(\tfrac{3}{4})^3 + (6.75)(7.425 - 2.792)^2 = 145.2 \text{ in.}^4$$

Para el área compuesta,

$$I_{x'} = 472.3 + 145.2 = 617.5 \text{ in.}^4 \qquad I_{x'} = 618 \text{ in.}^4 \blacktriangleleft$$

Radio de giro. Se tiene

$$k_{x'}^2 = \frac{I_{x'}}{A} = \frac{617.5 \text{ in.}^4}{17.95 \text{ in.}^2} \qquad k_{x'} = 5.87 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

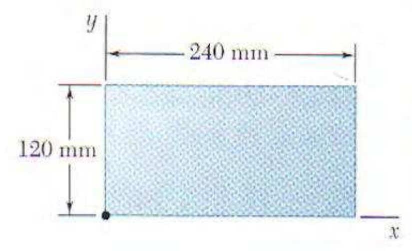


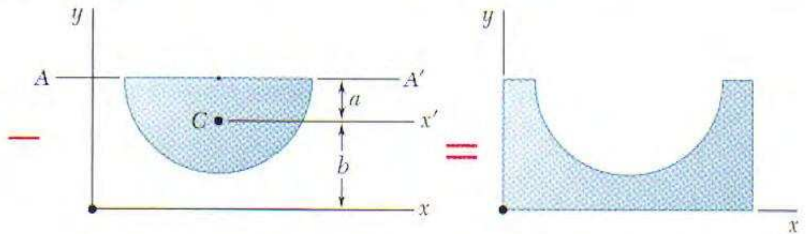
PROBLEMA RESUELTO 9.5

Determine el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x.

SOLUCIÓN

El área dada puede obtenerse restándole un semicírculo a un rectángulo. Los momentos de inercia del rectángulo y del semicírculo serán calculados en forma separada.





Momento de inercia del rectángulo. Haciendo referencia a la figura 9.12, se obtiene

$$I_x = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240 \text{ mm})(120 \text{ mm})^3 = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inercia del semicírculo. Haciendo referencia a la figura 5.8, se determina la ubicación del centroide C del semicírculo con respecto al diámetro AA'.

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90 \text{ mm})}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$

La distancia b desde el centroide C hasta el eje x es

$$b = 120 \text{ mm} - a = 120 \text{ mm} - 38.2 \text{ mm} = 81.8 \text{ mm}$$

Ahora, en referencia a la figura 9.12, se calcula el momento de inercia del semicírculo con respecto al diámetro AA'; además, se calcula el área del semicírculo.

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{8}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi(90 \text{ mm})^4 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90 \text{ mm})^2 = 12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

Con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de $\bar{I}_{x'}$:

$$I_{AA'} = \bar{I}_{x'} + Aa^2$$
$$25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4 = \bar{I}_{x'} + (12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2)(38.2 \text{ mm})^2$$
$$\bar{I}_{x'} = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

De nuevo, con el teorema de los ejes paralelos, se obtiene el valor de I_x:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (12.72 \times 10^3 \text{ mm}^2)(81.8 \text{ mm})^2$$
$$= 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inercia del área dada. Si se le resta el momento de inercia del semicírculo al momento de inercia del rectángulo, se obtiene

$$I_x = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4 - 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 45.9 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad ◀$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se introdujo el *teorema de los ejes paralelos* y se ilustró cómo se puede utilizar dicho teorema para facilitar el cálculo de momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas. Las áreas consideradas en los problemas propuestos que se presentan a continuación consistirán de formas comunes y de formas de acero laminado. Además, se utilizará el teorema de los ejes paralelos para localizar el punto de aplicación (el centro de presión) de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana que está sumergida.

1. Aplicación del teorema de los ejes paralelos. En la sección 9.6 se derivó el teorema de los ejes paralelos

$$I = \bar{I} + Ad^2 \qquad (9.9)$$

el cual establece que el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de esa misma área con respecto a un *eje centroidal paralelo* y el producto Ad^2, donde d es la distancia entre los dos ejes. Es importante que se recuerden los puntos siguientes cuando se utilice el teorema de los ejes paralelos.

a) El momento centroidal de inercia $\bar{I}$ de un área A puede obtenerse restándole el producto Ad^2 al momento de inercia I del área con respecto a un eje paralelo. Se concluye que el momento de inercia $\bar{I}$ es *menor* que el momento de inercia I de la misma área con respecto a cualquier otro eje paralelo.

b) El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes involucrados es un eje centroidal. Como se señaló en el ejemplo 2, para calcular el momento de inercia de un área con respecto a un *eje que no es centroidal* cuando se conoce el momento de inercia de dicha área con respecto a *otro eje que no es centroidal*, es necesario *calcular primero* el momento de inercia del área con respecto a *un eje centroidal paralelo a los dos ejes dados*.

2. Cálculo de los momentos y momentos polares de inercia de áreas compuestas. Los problemas resueltos 9.4 y 9.5 ilustran los pasos que se deben seguir para resolver problemas de este tipo. Como en todos los problemas que involucran áreas compuestas, se debe mostrar en un esquema las formas comunes o las formas de acero laminado que constituyen los distintos elementos del área dada, al igual que las distancias entre los ejes centroidales de los elementos y los ejes con respecto a los cuales se calculan los momentos de inercia. Además, es importante que se tomen en cuenta los siguientes puntos:

a) El momento de inercia de un área siempre es positivo, sin importar la posición del eje con respecto al cual se calcula dicho momento de inercia. Como se señaló en los comentarios para la lección anterior, sólo cuando se *remueve* un área (como en el caso de un agujero) se debe utilizar su momento de inercia en los cálculos con un signo negativo.

b) Los momentos de inercia de una semielipse y de un cuarto de elipse se pueden determinar con la división del momento de inercia de una elipse entre 2 y entre 4, respectivamente. Sin embargo, se debe señalar que los momentos de inercia que se obtienen de esta forma son *con respecto a los ejes de simetría de la elipse*. Para obtener los momentos *centroidales* de inercia para estas formas, se debe utilizar el teorema de los ejes paralelos. Nótese que este comentario también se aplica a un semicírculo y a un cuarto de círculo y que las expresiones proporcionadas para estas formas en la figura 9.12 *no* son momentos centroidales de inercia.

c) Para calcular el momento polar de inercia de un área compuesta, se pueden utilizar las expresiones para J_O proporcionadas en la figura 9.12 o se puede emplear la relación

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

lo cual depende de la forma del área dada.

d) Antes de calcular los momentos centroidales de inercia de un área dada, es posible que sea necesario localizar primero el centroide del área con los métodos del capítulo 5.

3. Localización del punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas hidrostáticas. En la sección 9.2 se encontró que

$$R = \gamma \int y\, dA = \gamma \overline{y} A$$
$$M_x = \gamma \int y^2\, dA = \gamma I_x$$

donde $\overline{y}$ es la distancia desde el eje x hasta el centroide del área plana que está sumergida. Como **R** es equivalente al sistema de fuerzas hidrostáticas elementales, se concluye que

$$\Sigma M_x: \qquad y_P R = M_x$$

donde y_P es la profundidad del punto de aplicación de **R**. Entonces,

$$y_P(\gamma \overline{y} A) = \gamma I_x \qquad \text{o} \qquad y_P = \frac{I_x}{\overline{y} A}$$

Para finalizar, se recomienda estudiar con detalle la notación utilizada en la figura 9.13 para las formas de acero laminado, puesto que es probable volverla a encontrar en cursos de ingeniería posteriores.

Problemas

9.31 y 9.32 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje x.

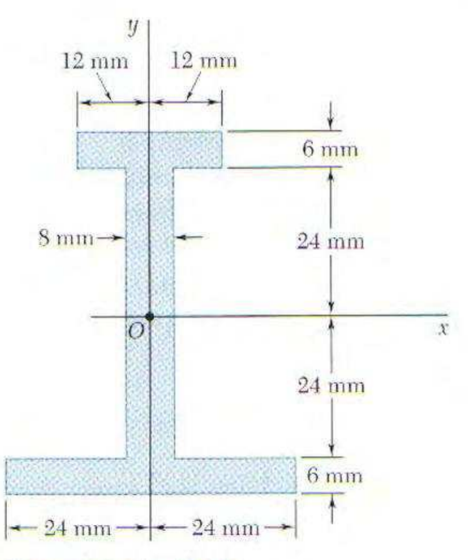


Figura P9.31 y P9.33

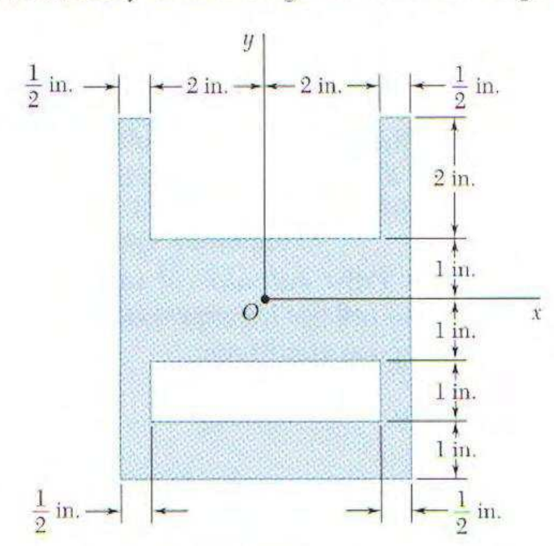


Figura P9.32 y P9.34

9.33 y 9.34 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje y.

9.35* y *9.36 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y si $a = 20$ mm.

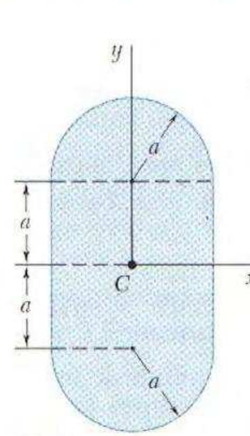


Figura *P9.35*

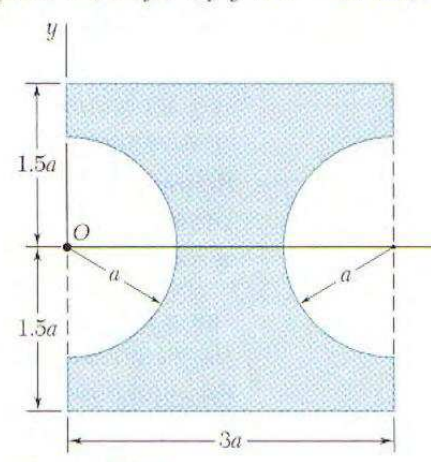


Figura *P9.36*

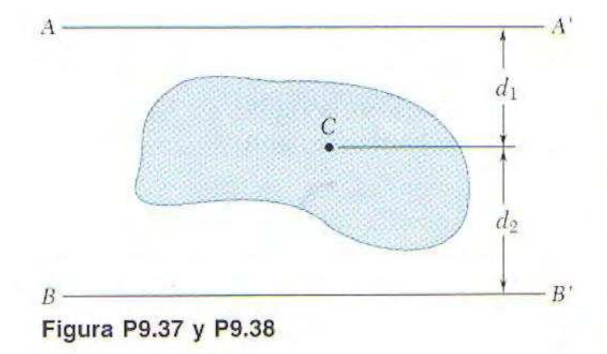


Figura P9.37 y P9.38

9.37 Para el área sombreada de 4 000 mm^2 que se muestra en la figura, determine la distancia d_2 y el momento de inercia con respecto al eje centroidal paralelo AA' si se sabe que los momentos de inercia con respecto a AA' y BB' son, respectivamente, 12×10^6 mm^4 y 23.9×10^6 mm^4, y que $d_1 = 25$ mm.

9.38 Para la región sombreada que se muestra en la figura, determine el área y el momento de inercia con respecto al eje centroidal paralelo BB' si se sabe que $d_1 = 25$ mm, $d_2 = 15$ mm y que los momentos de inercia con respecto a AA' y BB' son 7.84×10^6 mm^4 y 5.20×10^6 mm^4, respectivamente.

9.39 El área sombreada es igual a 50 in.^{2} Determine sus momentos centroidales de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$, si se sabe que $\bar{I}_y = 2\bar{I}_x$ y que el momento polar de inercia del área con respecto al punto A es $J_A = 2\ 250$ in.^{4}.

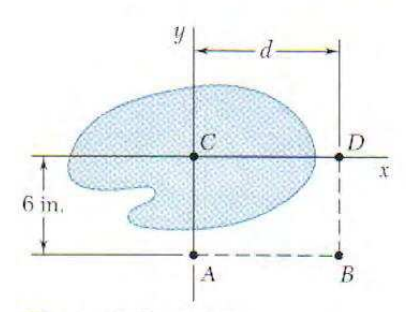


Figura P9.39 y *P9.40*

9.40 Los momentos polares de inercia del área sombreada con respecto a los puntos A, B y D son $J_A = 2\ 880$ in.^{4}, $J_B = 6\ 720$ in.^{4} y $J_D = 4\ 560$ in.^{4}, respectivamente. Determine el área sombreada, su momento centroidal de inercia $\bar{J}_C$ y la distancia d desde C hasta D.

9.41 a 9.44 Para el área mostrada en las figuras, determine los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al lado AB, respectivamente.

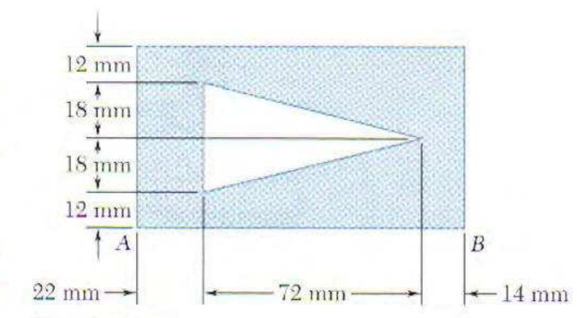


Figura P9.41

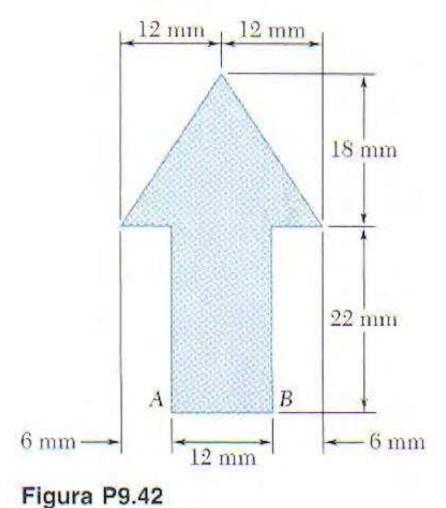


Figura P9.42

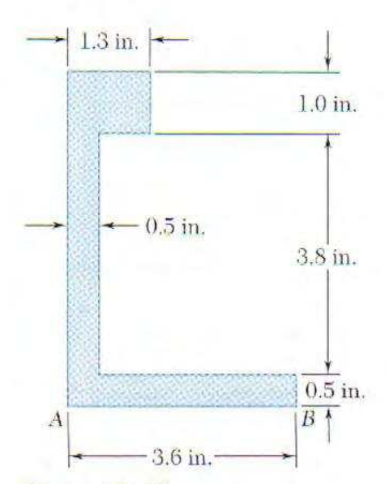
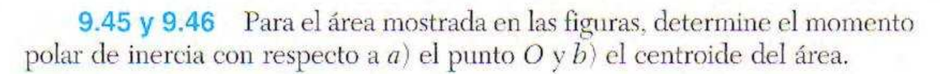
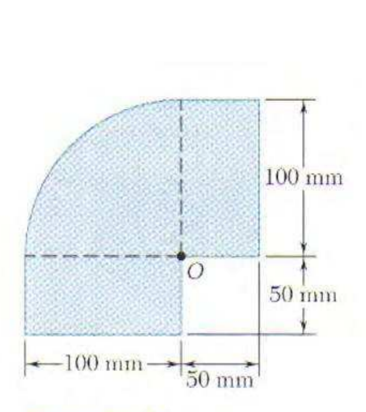


Figura P9.43

Figura P9.44



9.45 y 9.46 Para el área mostrada en las figuras, determine el momento polar de inercia con respecto a a) el punto O y b) el centroide del área.



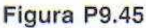


Figura P9.45

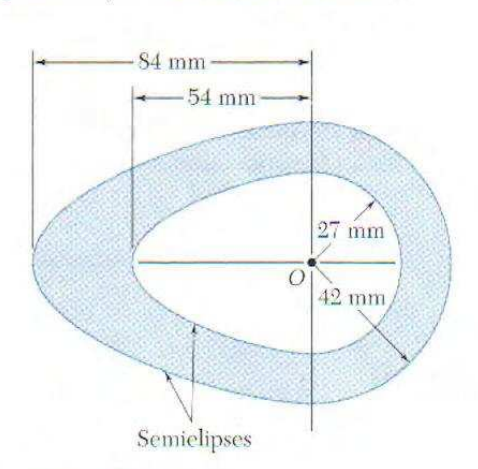


Figura P9.46

9.47 y 9.48 Para las áreas que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia con respecto a *a*) el punto *O* y *b*) el centroide del área.

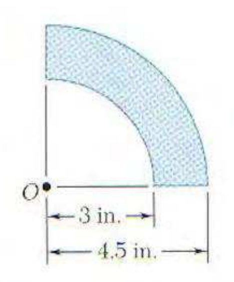


Figura *P9.47*

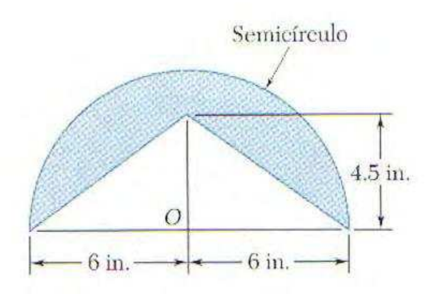


Figura *P9.48*

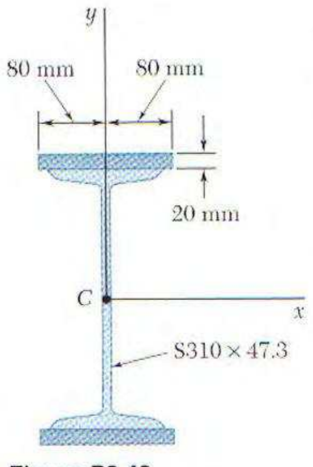


Figura P9.49

9.49 Como se muestra en la figura, dos placas de acero de 20 mm se sueldan a una sección S laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y.

9.50 Como se muestra en la figura, dos canales se sueldan a una sección W laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y.

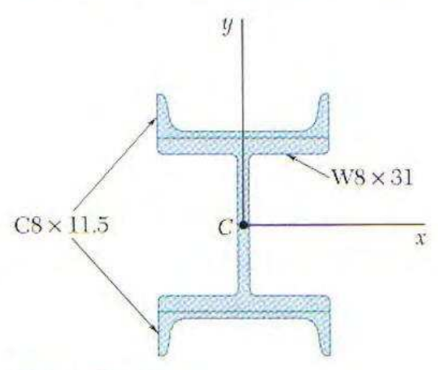


Figura P9.50

9.51 Para formar la sección de una caja reforzada, se sueldan entre sí dos secciones laminadas W y dos placas. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales mostrados en la figura.

9.52 Dos canales se sueldan a una placa de acero de $d \times 12$ in., como se muestra en la figura. Determine el ancho d para el cual la relación $\bar{I}_x/\bar{I}_y$ de los momentos de inercia centroidales de la sección es 16.

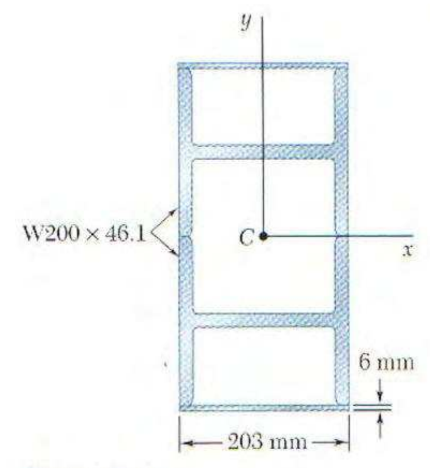


Figura P9.51

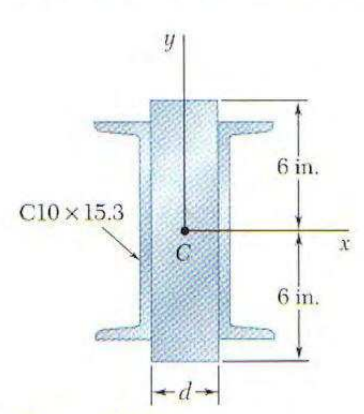


Figura P9.52

9.53 Como se muestra en la figura, dos ángulos de L76 × 76 × 6.4 mm se sueldan a un canal C250 × 22.8. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al alma del canal, respectivamente.

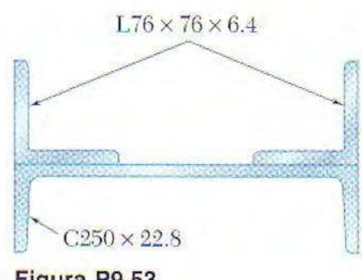


Figura P9.53

9.54 Como se muestra en la figura, dos ángulos de L4 × 4 × $\frac{1}{2}$ in. se sueldan a una placa de acero. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular a la placa, respectivamente.

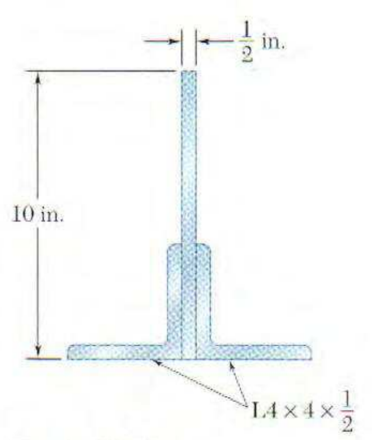


Figura *P9.54*

9.55 La resistencia de una sección laminada W se incrementa al soldar un canal a su aleta superior. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a sus ejes centroidales x y y.

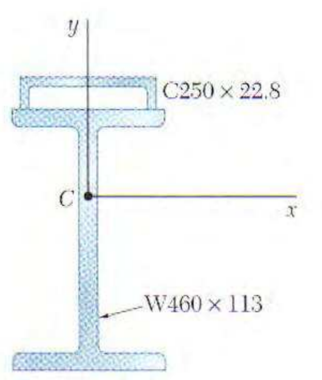


Figura P9.55

9.56 Dos ángulos de L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ in. se sueldan a una placa de acero de $\frac{1}{2}$ in. Determine la distancia b y los momentos centroidales de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ de la sección combinada Si se sabe que $\bar{I}_y = 4\bar{I}_x$.

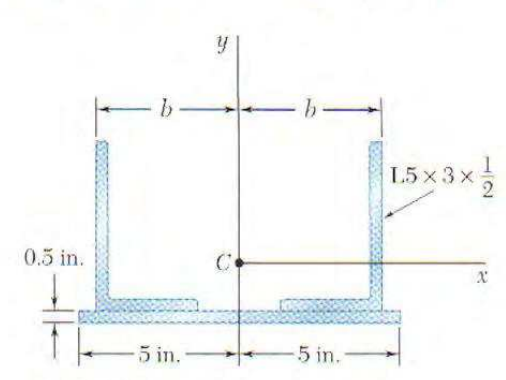


Figura *P9.56*

9.57 y 9.58 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con referencia a la sección 9.2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

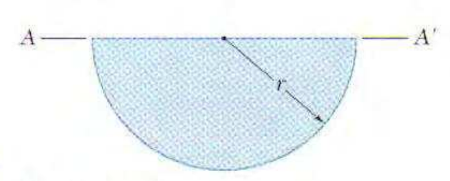


Figura P9.57

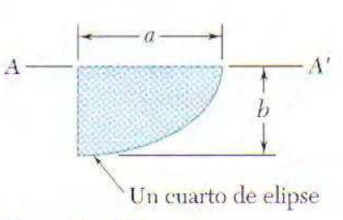


Figura P9.58

9.59 y *9.60 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila, la cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con referencia a la sección 9.2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (centro de presión).

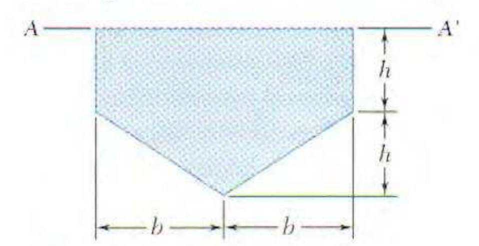


Figura P9.59

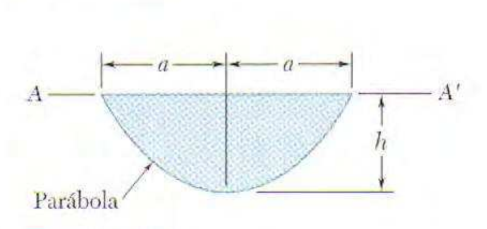


Figura P9.60

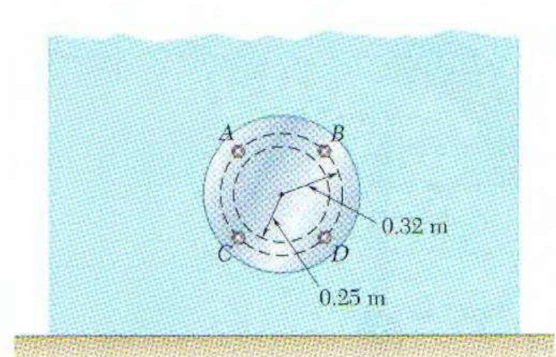


Figura *P9.61*

9.61 La cubierta para un acceso de 0.5 m de diámetro se fija a un tanque que almacena agua por medio de cuatro pernos igualmente espaciados como se muestra en la figura. Si se sabe que el centro de la cubierta está localizado a 1.4 m por debajo de la superficie del agua, determine la fuerza adicional sobre cada perno debido a la presión del agua.

9.62 Una compuerta vertical de forma trapezoidal se emplea como una válvula automática que se mantiene cerrada por medio de dos resortes, los cuales se localizan a lo largo del borde AB. Si se sabe que cada resorte ejerce un par con magnitud de 1 470 N · m, determine la profundidad d del agua con la cual se abrirá la compuerta.

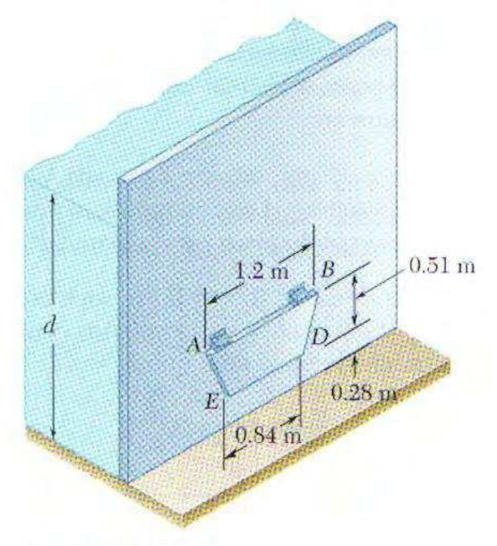


Figura *P9.62*

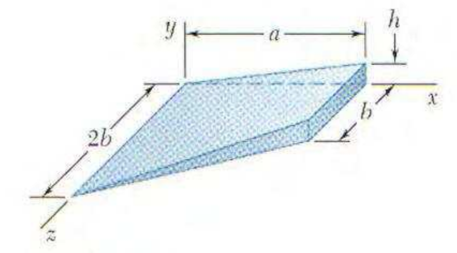


Figura P9.63

***9.63** Determine la coordenada x del centroide del volumen mostrado en la figura. (*Sugerencia:* La altura y del volumen es proporcional a la coordenada x; considere una analogía entre esta altura y la presión del agua sobre una superficie sumergida.)

***9.64** Determine la coordenada x del centroide del volumen mostrado en la figura; este volumen se obtuvo al intersecar un cilindro elíptico con un plano oblicuo. (Vea la sugerencia del problema 9.63.)

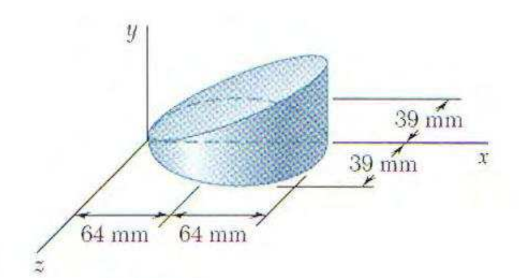


Figura P9.64

***9.65** Demuestre que el sistema de fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A que está sumergida, puede reducirse a una fuerza **P** sobre el centroide C del área y dos pares. La fuerza **P** es perpendicular al área y su magnitud es $P = \gamma A\bar{y}$ sen θ, donde γ es el peso específico del líquido y los pares son $\mathbf{M}_{x'} = (\gamma \bar{I}_{x'}$ sen $\theta)\mathbf{i}$ y $\mathbf{M}_{y'} = (\gamma \bar{I}_{x'y'}$ sen $\theta)\mathbf{j}$, donde $\bar{I}_{x'y'} = \int x'y'dA$ (vea la sección 9.8). Observe que los pares son independientes de la profundidad a la que está sumergida el área.

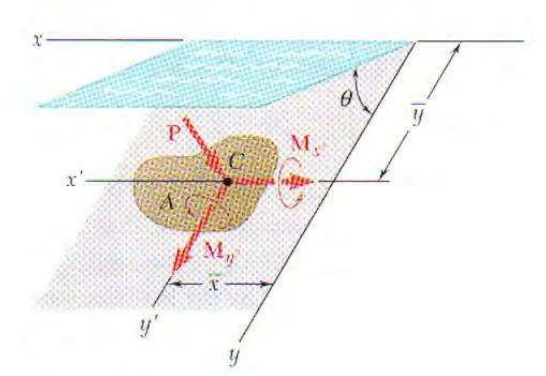


Figura P9.65

***9.66** Demuestre que la resultante de fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A que está sumergida es una fuerza **P** perpendicular al área y con una magnitud de $P = \gamma A\bar{y}$ sen $\theta = \bar{p}A$, donde γ es el peso específico del líquido y $\bar{p}$ es la presión que actúa sobre el centroide C del área. Además, demuestre que **P** es una fuerza que actúa sobre el punto C_P, llamado el centro de presión, cuyas coordenadas son $x_p = I_{xy}/A\bar{y}$ y $y_p = I_x/A\bar{y}$ donde $\bar{I}_{xy} = \int xy\, dA$ (vea la sección 9.8). También demuestre que el valor de la diferencia de ordenadas $y_p - \bar{y}$ es igual a $\bar{k}^2_{x'}/\bar{y}$ y que, por tanto, depende de la profundidad a la cual está sumergida el área.

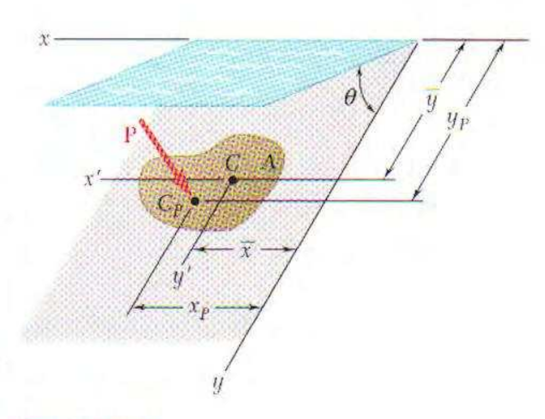


Figura P9.66

*9.8. PRODUCTO DE INERCIA

La integral

$$I_{xy} = \int xy\, dA \qquad (9.12)$$

que se obtiene al multiplicar a cada elemento dA de un área A por sus coordenadas x y y, e integrando sobre toda el área (figura 9.14), es conocida como el *producto de inercia* del área A respecto a los ejes x y y. A diferencia de los momentos de inercia I_x e I_y, el producto de inercia I_{xy} puede ser positivo, negativo o cero.

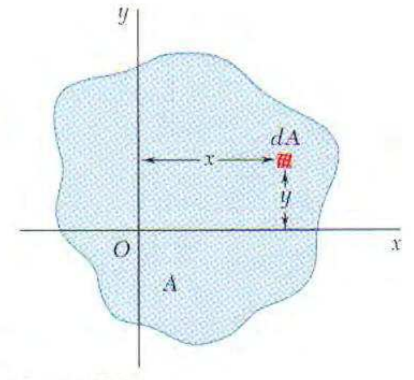


Figura 9.14

Cuando uno o ambos ejes x y y son ejes de simetría del área A, el producto de inercia I_{xy} es igual a cero. Por ejemplo, considérese la sección en forma de canal que muestra la figura 9.15. Puesto que esta sección es simétrica respecto al eje x, con cada elemento dA de coordenadas x y y se puede asociar un elemento dA' de coordenadas x y $-y$. Desde luego, las contribuciones a I_{xy} de cualquier par de elementos seleccionados de esta forma se cancela y, por tanto, la integral (9.12) se reduce a cero.

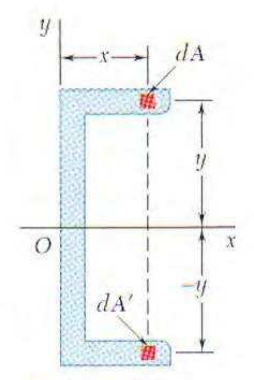


Figura 9.15

Para los productos de inercia, es posible derivar un teorema de ejes paralelos similar al establecido en la sección 9.6 para momentos de inercia. Considere un área A y un sistema de coordenadas rectangulares x y

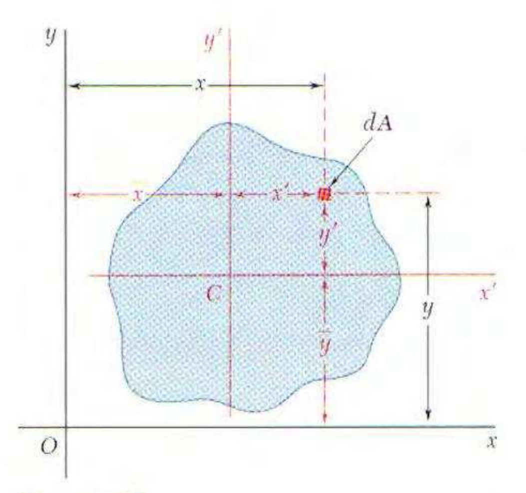


Figura 9.16

y (figura 9.16). A través del centroide C del área, cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$, se dibujan dos *ejes centroidales* x' y y' que son paralelos, respectivamente, a los ejes x y y. Representando con x y y las coordenadas de un elemento de área dA con respecto a los ejes originales y con x' y y' las coordenadas del mismo elemento con respecto a los ejes centroidales, se escribe $x = x' + \bar{x}$ y $y = y' + \bar{y}$. Al sustituir las relaciones anteriores en la ecuación (9.12), se obtiene la siguiente expresión para el producto de inercia I_{xy}:

$$I_{xy} = \int xy\, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y})\, dA$$
$$= \int x'y'\, dA + \bar{y} \int x'\, dA + \bar{x} \int y'\, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA$$

La primera integral representa el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ del área A con respecto a los ejes centroidales x' y y'. Las dos integrales siguientes representan los primeros momentos del área con respecto a los ejes centroidales; dichas integrales se reducen a cero puesto que el centroide C está localizado sobre esos ejes. La última integral es igual al área total A. Por tanto, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}\, A \tag{9.13}$$

*9.9. EJES PRINCIPALES Y MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA

Considere el área A y los ejes coordenados x y y (figura 9.17). Suponiendo que los momentos y el producto de inercia

$$I_x = \int y^2\, dA \qquad I_y = \int x^2\, dA \qquad I_{xy} = \int xy\, dA \tag{9.14}$$

del área A son conocidos, se desea determinar los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de A con respecto a nuevos ejes x' y y' que se obtienen rotando los ejes originales alrededor del origen a través de un ángulo θ.

Primero se deben señalar las siguientes relaciones entre las coordenadas x', y' y x, y de un elemento de área dA:

$$x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \qquad y' = y\cos\theta - x \operatorname{sen}\theta$$

Si se sustituye y' en la expresión para $I_{x'}$, se escribe

$$I_{x'} = \int (y')^2\, dA = \int (y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)^2\, dA$$
$$= \cos^2\theta \int y^2\, dA - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \int xy\, dA + \operatorname{sen}^2\theta \int x^2\, dA$$

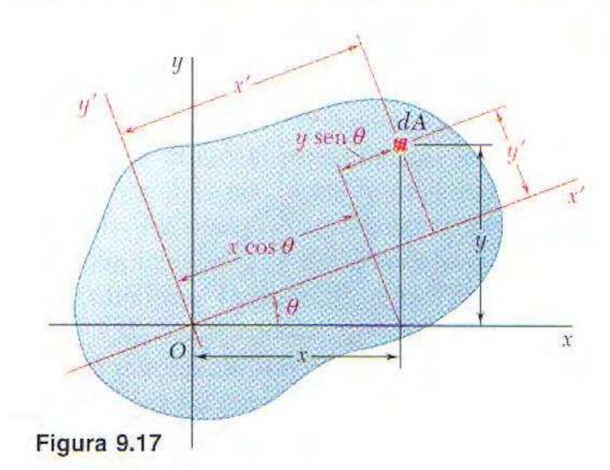


Figura 9.17

Con las relaciones (9.14), se escribe

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \theta - 2I_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_y \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (9.15)$$

En forma similar, se obtienen las siguientes expresiones para $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$

$$I_{y'} = I_x \operatorname{sen}^2 \theta + 2I_{xy} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \qquad (9.16)$$

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_{xy}(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \qquad (9.17)$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Se pueden escribir las ecuaciones (9.15), (9.16) y (9.17) de la siguiente forma:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \qquad (9.20)$$

Si se suman las ecuaciones (9.18) y la (9.19), se observa que

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \qquad (9.21)$$

Este resultado pudo haberse anticipado puesto que ambos miembros de la ecuación (9.21) son iguales al momento polar de inercia J_O.

Las ecuaciones (9.18) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas de un círculo. Esto significa que si se selecciona un conjunto de ejes rectangulares y se grafica un punto M de abscisa $I_{x'}$ y ordenada $I_{x'y'}$ y para cualquier valor dado del parámetro θ, todos los puntos que se obtienen de esta forma estarán localizados sobre un círculo. Para establecer esta propiedad, se elimina θ de las ecuaciones (9.18) y (9.20); lo anterior se lleva a cabo transponiendo el término $(I_x + I_y)/2$ en la ecuación (9.18), elevando al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (9.18) y (9.20) y sumando las expresiones obtenidas. Así se escribe

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \qquad (9.22)$$

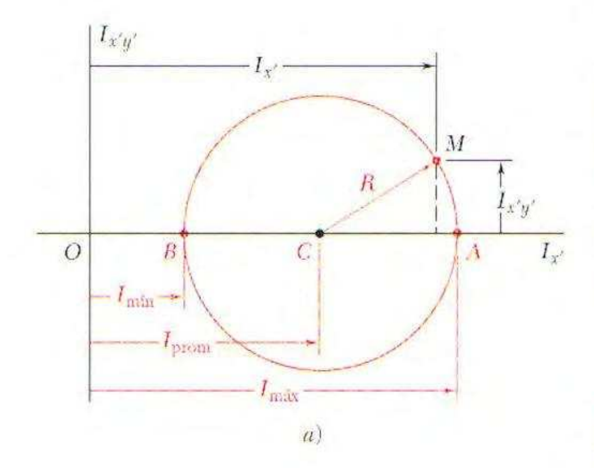
Estableciendo

$$I_{\text{prom}} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad \text{y} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \qquad (9.23)$$

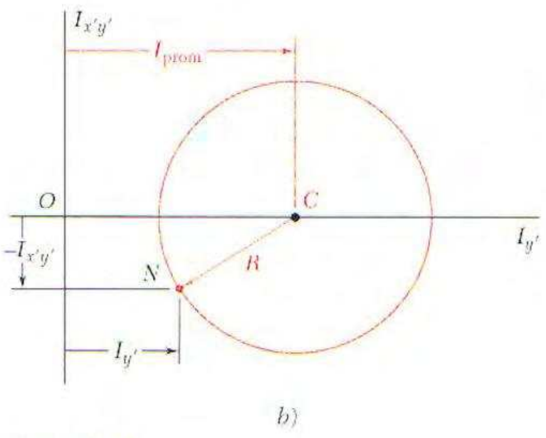
se escribe la identidad (9.22) de la siguiente forma

$$(I_{x'} - I_{\text{prom}})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \qquad (9.24)$$

ésta es la ecuación de un círculo de radio R que tiene su centro en el punto C cuyas coordenadas x y y son I_{prom} y 0, respectivamente (figura 9.18a). Se observa que las ecuaciones (9.19) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas del mismo círculo. Además, debido a la simetría del círculo con res-



a)



b)

Figura 9.18

pecto al eje horizontal, se habría obtenido el mismo resultado si en lugar de graficar M se hubiera graficado un punto N de coordenadas $I_{y'}$ y $-I_{x'y'}$ (figura 9.18*b*). Esta propiedad se utilizará en la sección 9.10.

Los dos puntos A y B donde el círculo antes mencionado interseca el eje horizontal (figura 9.18*a*) son de interés especial: el punto A corresponde al máximo valor del momento de inercia $I_{x'}$ mientras que el punto B corresponde al mínimo valor para dicha cantidad. Además, ambos puntos corresponden a un valor de cero para el producto de inercia $I_{x'y'}$. Por tanto, los valores θ_m del parámetro θ que corresponden a los puntos A y B pueden obtenerse tomando $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20). De esta forma se obtiene[†]

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \tag{9.25}$$

Esta ecuación define dos valores de $2\theta_m$ que están separados 180° y, por tanto, dos valores θ_m que están separados 90°. Uno de estos valores corresponde al punto A en la figura 9.18*a* y también corresponde a un eje a través de O en la figura 9.17 con respecto al cual el momento de inercia del área dada es máximo, el otro valor corresponde al punto B y a un eje a través de O con respecto al cual el momento de inercia del área es mínimo. Los dos ejes definidos de esta forma son perpendiculares entre sí, se conocen como los *ejes principales del área con respecto a O* y los valores correspondientes $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$ del momento de inercia se llaman *momentos principales de inercia del área con respecto a O*. Como los dos valores θ_m definidos por la ecuación (9.25) se obtuvieron estableciendo $I_{x'y'} = 0$ en la ecuación (9.20), el producto de inercia de un área dada con respecto a sus ejes principales es igual a cero.

A partir de la figura 9.18*a* se observa que

$$I_{\text{máx}} = I_{\text{prom}} + R \qquad I_{\text{mín}} = I_{\text{prom}} - R \tag{9.26}$$

Con el uso de los valores para I_{prom} y R correspondientes a las fórmulas (9.23), se escribe

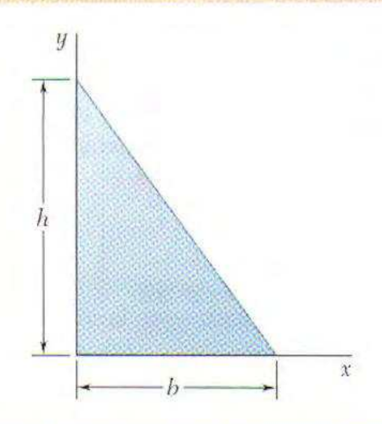
$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{9.27}$$

A menos que se pueda decidir por inspección cuál de los dos ejes principales corresponde a $I_{\text{máx}}$ y cuál corresponde a $I_{\text{mín}}$, es necesario sustituir uno de los valores de θ_m en la ecuación (9.18) para poder determinar cuál de los dos corresponde al máximo valor del momento de inercia del área con respecto a O.

Haciendo referencia a la sección 9.8, se observa que si un área posee un eje de simetría a través de un punto O, dicho eje debe ser un eje principal del área con respecto a O. Por otra parte, un eje principal no tiene que ser necesariamente un eje de simetría; sin importar si un área posee o no ejes de simetría, ésta tendrá dos ejes principales de inercia con respecto a cualquier punto O.

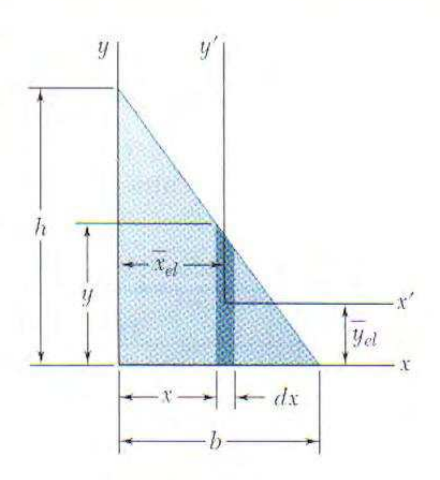
Las propiedades que se acaban de establecer son válidas para cualquier punto O localizado dentro o fuera del área dada. Si se selecciona el punto O de manera que coincida con el centroide del área, cualquier eje que pasa a través de O es un eje centroidal; los dos ejes principales de un área con respecto a su centroide reciben el nombre de *ejes centroidales principales del área*.

[†] Esta relación también se puede obtener al diferenciar $I_{x'}$ en la ecuación (9.18) y tomando $dI_{x'}/d\theta = 0$.



PROBLEMA RESUELTO 9.6

Determine el producto de inercia del triángulo rectángulo mostrado en la figura, *a*) con respecto a los ejes x y y, y *b*) en relación con los ejes centroidales que son paralelos a los ejes x y y.



SOLUCIÓN

***a*) Producto de inercia I_{xy}.** Se selecciona una tira rectangular vertical como el elemento diferencial de área. Con el teorema de los ejes paralelos, se escribe

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\, dA$$

Como el elemento es simétrico con respecto a los ejes x' y y', se observa que $dI_{x'y'} = 0$. Con base en la geometría del triángulo se obtiene

$$y = h\left(1 - \frac{x}{b}\right) \qquad dA = y\, dx = h\left(1 - \frac{x}{b}\right)dx$$

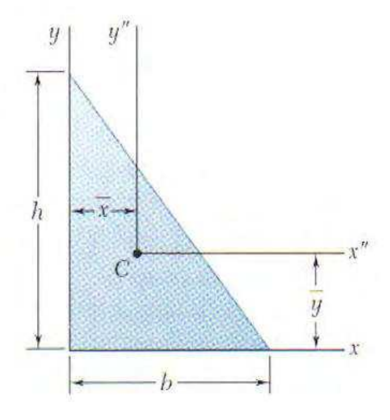
$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}h\left(1 - \frac{x}{b}\right)$$

Integrando dI_{xy} desde $x = 0$ hasta $x = b$, se obtiene

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\, dA = \int_0^b x(\tfrac{1}{2})h^2\left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx$$

$$= h^2 \int_0^b \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2}\right) dx = h^2\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

$$I_{xy} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 \quad ◀$$



***b*) Producto de inercia $\bar{I}_{x''y''}$.** Las coordenadas del centroide del triángulo con respecto a los ejes x y y son

$$\bar{x} = \tfrac{1}{3}b \qquad \bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

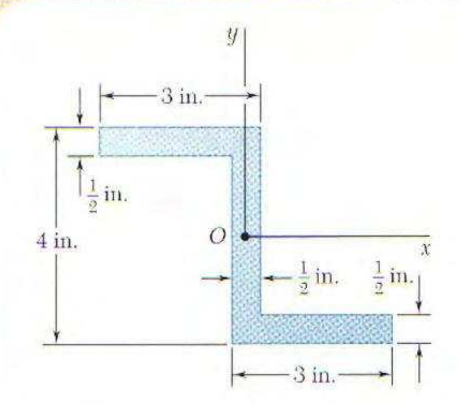
Con la expresión para I_{xy} obtenida en el inciso *a*), se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\tfrac{1}{24}b^2h^2 = \bar{I}_{x''y''} + (\tfrac{1}{3}b)(\tfrac{1}{3}h)(\tfrac{1}{2}bh)$$

$$\bar{I}_{x''y''} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 - \tfrac{1}{18}b^2h^2$$

$$\bar{I}_{x''y''} = -\tfrac{1}{72}b^2h^2 \quad ◀$$

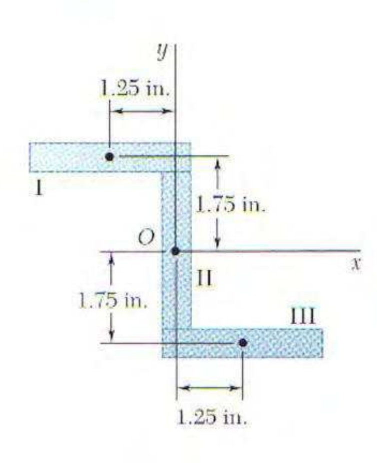


PROBLEMA RESUELTO 9.7

Para la sección mostrada en la figura se han calculado los valores de los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y y se sabe que dichas cantidades son iguales a

$$I_x = 10.38 \text{ in.}^4 \qquad I_y = 6.97 \text{ in.}^4$$

Determine: *a*) la orientación de los ejes principales de la sección con respecto a O y *b*) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O.



SOLUCIÓN

Primero se calcula el producto de inercia con respecto a los ejes x y y. El área se divide en tres rectángulos, como se muestra en la figura. Se observa que para cada uno de los rectángulos, el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ con respecto a ejes centroidales paralelos a los ejes x y y es igual a cero. Con el uso del teorema de los ejes paralelos $I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$, se encuentra que, para cada uno de los rectángulos, I_{xy} se reduce a $\bar{x}\bar{y}A$.

Rectángulo	Área, in.^{2}	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}\bar{y}A$, in.^{4}
I	1.5	−1.25	+1.75	−3.28
II	1.5	0	0	0
III	1.5	+1.25	−1.75	−3.28
				$\Sigma\bar{x}\bar{y}A = -6.56$

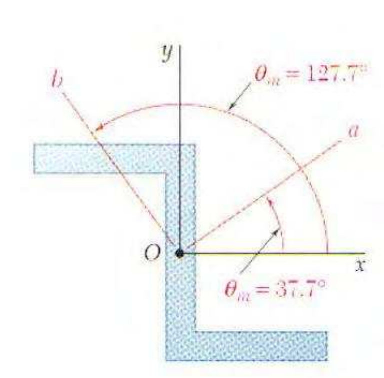
$$I_{xy} = \Sigma\bar{x}\bar{y}A = -6.56 \text{ in.}^4$$

***a*) Ejes principales.** Como se conocen las magnitudes de I_x, I_y e I_{xy} se utiliza la ecuación (9.25) para determinar los valores de θ_m:

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6.56)}{10.38 - 6.97} = +3.85$$

$$2\theta_m = 75.4° \text{ y } 255.4°$$

$$\theta_m = 37.7° \qquad \text{y} \qquad \theta_m = 127.7° \quad ◀$$



***b*) Momentos principales de inercia.** Con la ecuación (9.27), se escribe

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$I_{\text{máx}} = 15.45 \text{ in.}^4 \qquad I_{\text{mín}} = 1.897 \text{ in.}^4 \quad ◀$$

Observe que los elementos del área de la sección están distribuidos más cerca del eje b que del eje a; se concluye que $I_a = I_{\text{máx}} = 15.45$ in.^{4} e $I_b = I_{\text{mín}} = 1.897$ in.^{4}. Esta conclusión se puede verificar sustituyendo $\theta = 37.7°$ en las ecuaciones (9.18) y (9.19).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se continuará trabajando con *momentos de inercia* y se utilizarán varias técnicas para calcular *productos de inercia*. A pesar de que en general los problemas propuestos son sencillos de resolver, es importante tomar en cuenta los siguientes puntos:

1. ***Calcular el producto de inercia I_{xy} por integración.*** El producto de inercia se definió como

$$I_{xy} = \int xy \, dA \qquad (9.12)$$

y se estableció que su valor puede ser positivo, negativo o cero. El producto de inercia se puede calcular directamente a partir de la ecuación anterior con una integración doble o puede determinarse empleando una sola integración, como se hizo en el problema resuelto 9.6. Cuando se aplique esta última técnica y se utilice el teorema de los ejes paralelos, es importante recordar que $\bar{x}_{el}$ y $\bar{y}_{el}$ en la ecuación

$$dI_{xy} = dI_{x'y'} + \bar{x}_{el}\bar{y}_{el} \, dA$$

son las coordenadas del centroide del elemento de área dA. Por tanto, si dA no está en el primer cuadrante, una o ambas coordenadas serán negativas.

2. ***Calcular los productos de inercia de áreas compuestas.*** Los productos de inercia de áreas compuestas se pueden calcular a partir de los productos de inercia de sus partes componentes utilizando el teorema de los ejes paralelos

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \qquad (9.13)$$

La técnica apropiada que se debe utilizar para problemas de este tipo se ilustra en los problemas resueltos 9.6 y 9.7. Además de las reglas habituales para problemas que involucran áreas compuestas, es esencial que se recuerden los puntos siguientes.

a) ***Si cualquiera de los ejes centroidales de un área componente es un eje de simetría para dicha área, el producto de inercia $\bar{I}_{x'y'}$ para el área bajo consideración es igual a cero.*** En este sentido, $\bar{I}_{x'y'}$ es igual a cero para áreas componentes como círculos, semicírculos, rectángulos y triángulos isósceles que poseen un eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados.

b) ***Se debe prestar mucha atención a los signos de las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$*** de cada área componente cuando se use el teorema de los ejes paralelos [problema resuelto 9.7].

3. ***Determinación de los momentos de inercia y de los productos de inercia para ejes coordenados que han sido rotados.*** En la sección 9.9 se derivaron las ecuaciones (9.18), (9.19) y (9.20) a partir de las cuales pueden calcularse los momentos de inercia y el producto de inercia para ejes coordenados que han sido rotados alrededor del origen O. Para aplicar estas ecuaciones, es necesario conocer un conjunto de valores I_x, I_y e I_{xy} para una orientación dada de los ejes y se debe recordar θ que es positivo para rotaciones de los ejes en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj y negativa para rotaciones de los ejes en un sentido a favor del movimiento de las manecillas del reloj.

4. ***Cálculo de los momentos principales de inercia.*** En la sección 9.9 se mostró que existe una orientación en particular de los ejes coordenados, para la cual los momentos de inercia alcanzan sus valores máximo y mínimo, $I_{máx}$ e $I_{mín}$, y para la cual el producto de inercia es igual a cero. La ecuación (9.27) se puede utilizar para calcular estos valores, que se conocen como los *momentos principales de inercia* del área con respecto a O y su orientación está definida por la ecuación (9.25). *Para determinar cuál de los ejes principales corresponde a $I_{máx}$ y cuál a $I_{mín}$*, se puede seguir el procedimiento que se describió después de la ecuación (9.27) o también se puede observar con respecto a cuál de los dos ejes principales está más cerca del área distribuida; dicho eje corresponde a $I_{mín}$ [problema resuelto 9.7].

Problemas

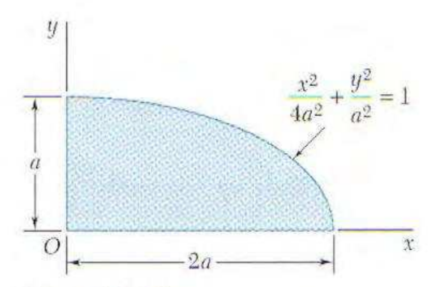


Figura P9.67

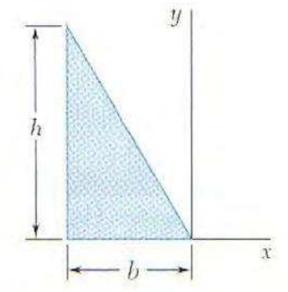


Figura P9.69

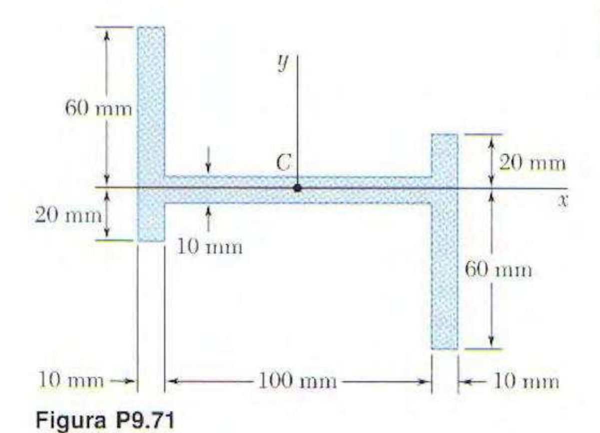


Figura P9.71

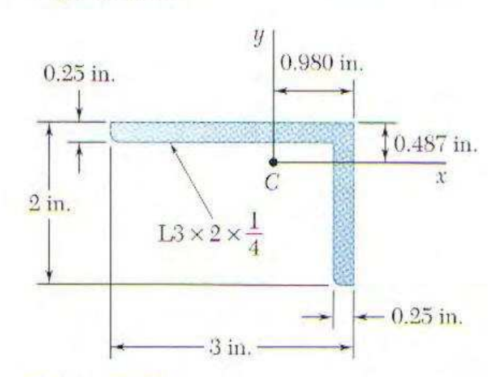


Figura *P9.73*

9.67 a *9.70* Para el área mostrada en las figuras, determine por integración directa el producto de inercia con respecto a los ejes x y y.

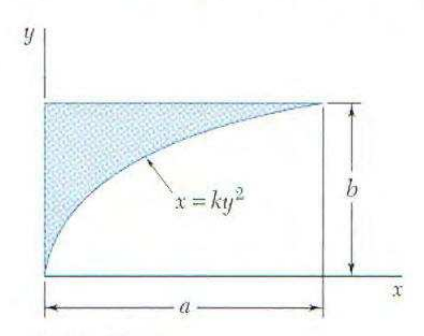


Figura P9.68

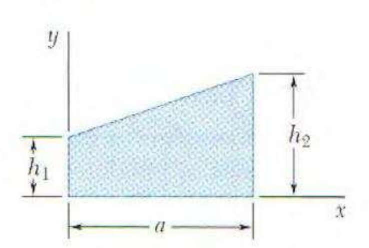


Figura *P9.70*

9.71 a 9.74 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar el producto de inercia del área mostrada en las figuras con respecto a los ejes centroidales x y y.

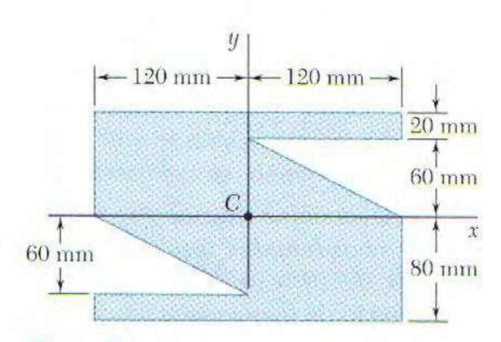


Figura P9.72

Figura P9.74

9.75 a 9.78 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar el producto de inercia del área mostrada en las figuras con respecto a los ejes centroidales x y y.

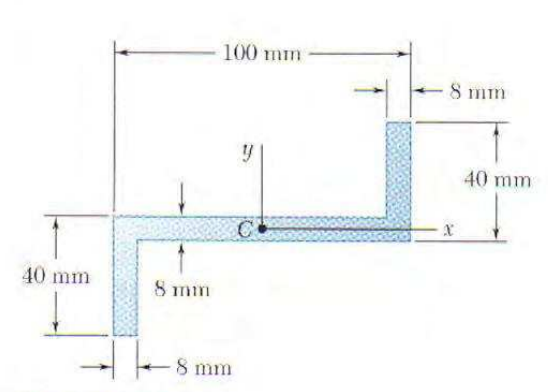


Figura P9.75

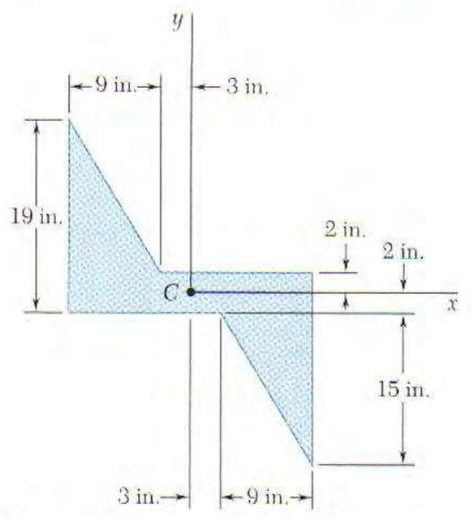


Figura P9.76

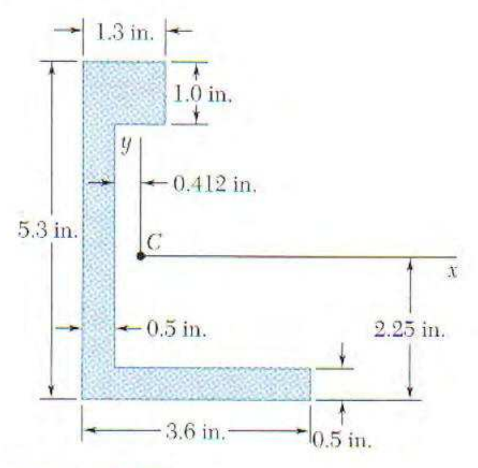


Figura *P9.77*

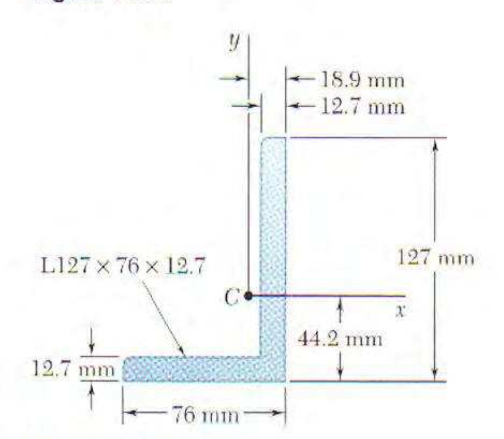


Figura P9.78

9.79 Determine los momentos y los productos de inercia del cuarto de elipse del problema 9.67 con respecto a un nuevo sistema de ejes que se obtiene al rotar los ejes x y y alrededor de O *a*) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj y *b*) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.80 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.72 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.81 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.73 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.82 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.75 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.83 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección transversal del ángulo de L3 × 2 × $\frac{1}{4}$ in. del problema 9.74 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.84 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección transversal del ángulo de L127 × 76 × 12.7 mm del problema 9.78 con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.85 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.86 a 9.88 Para el área indicada, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.86 Área del problema 9.72.
9.87 Área del problema 9.73.
9.88 Área del problema 9.75.

9.89 y *9.90* Para la sección transversal del ángulo indicado, determine la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.89 La sección transversal del ángulo L3 × 2 × ¼ in. del problema 9.74.
9.90 La sección transversal del ángulo L127 × 76 × 12.7 mm del problema 9.78.

*9.10. CÍRCULO DE MOHR PARA MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

El círculo utilizado en la sección anterior para ilustrar las relaciones que existen entre los momentos y productos de inercia de un área dada respecto a ejes que pasan por un punto fijo O fue presentado inicialmente por el ingeniero alemán Otto Mohr (1835-1918), y se conoce como *círculo de Mohr*. Se demostrará que si se conocen los momentos y productos de inercia de un área A respecto a dos ejes rectangulares x y y que pasan por un punto O, el círculo de Mohr se puede utilizar para determinar gráficamente *a*) los ejes principales y los momentos principales de inercia del área respecto a O, *b*) los momentos y el producto de inercia del área respecto a cualquier otro par de ejes rectangulares x' y y' que pasen por O.

Considere un área dada A y dos ejes coordenados rectangulares x y y (figura 9.19*a*). Suponiendo que los momentos de inercia I_x e I_y y el producto de inercia I_{xy} son conocidos estarán representados en un diagrama al graficar un punto X de coordenadas I_x e I_{xy} y un punto Y de coordenadas I_y y $-I_{xy}$ (figura 9.19*b*). Si I_{xy} es positivo, como se supuso en la figura 9.19*a*, el punto X estará localizado por encima del eje horizontal, y el punto Y se ubicará por debajo de dicho eje, como indica la figura 9.19*b*. Si I_{xy} es negativo, X se localizará por debajo del eje horizontal y Y por encima de ese eje. Uniendo X y Y mediante una línea recta, se representa con C el punto de intersección de la línea XY con el eje horizontal y se traza un círculo cuyo centro sea C y su diámetro XY. Al advertir que la abscisa de C y el radio del círculo son iguales, respectivamente, a las cantidades I_{prom} y R definidas mediante la fórmula (9.23), se concluye que el círculo obtenido es el círculo de Mohr para el área dada respecto al punto O. Por tanto, las abscisas de los puntos A y B donde el círculo corta al eje horizontal representan, respectivamente, los momentos principales de inercia $I_{máx}$ e $I_{mín}$ del área.

También se observa que, puesto que tan $(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$, el ángulo XCA es igual en magnitud a uno de los ángulos $2\theta_m$ que satisfacen la ecuación (9.25); por tanto, el ángulo θ_m, que define al eje principal Oa en la figura 9.19*a* y corresponde al punto A en la figura 9.19*b*, es igual a la mitad del ángulo XCA del círculo de Mohr. Además, se ob-

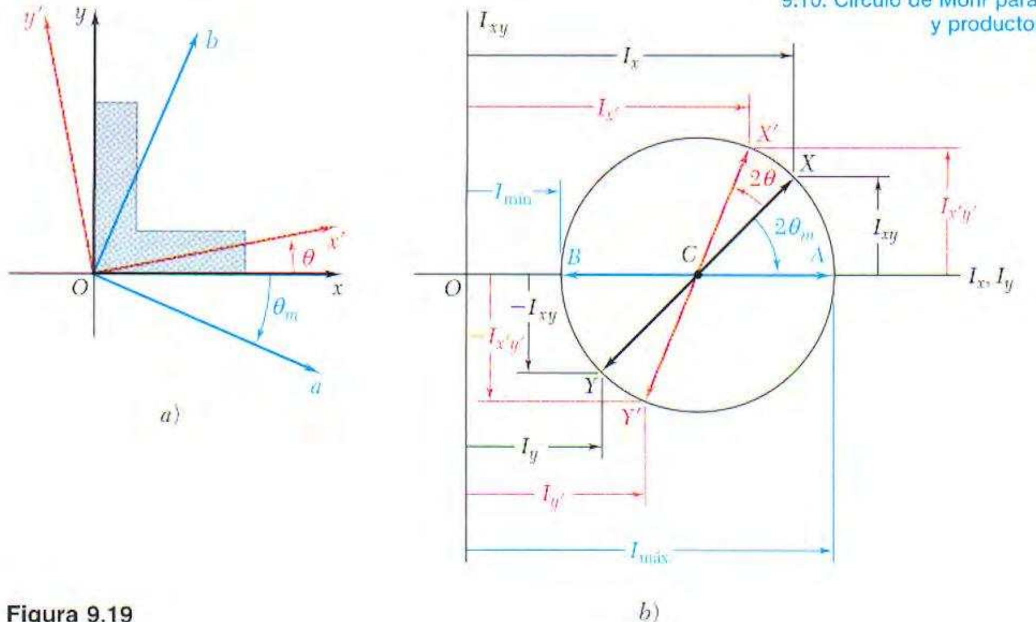


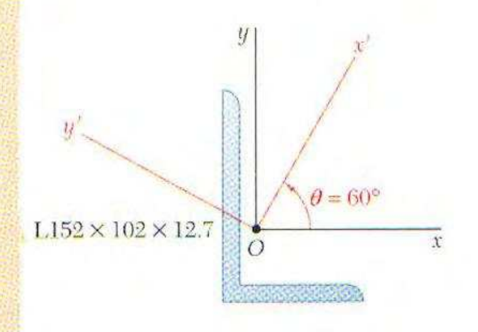
Figura 9.19

serva que si $I_x > I_y$ e $I_{xy} > 0$, como en el caso que se considera aquí, la rotación que lleva a CX hasta CA es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En estas condiciones, el ángulo θ_m que se obtiene a partir de la ecuación (9.25), el cual define el eje principal Oa en la figura 9.19*a*, es negativo; por tanto, la rotación que lleva a Ox hasta Oa también es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Se concluye que los sentidos de rotación en ambas partes de la figura 9.19 son los mismos. Si se requiere una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo $2\theta_m$ para llevar a CX hasta CA en el círculo de Mohr, entonces una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo θ_m llevará a Ox hasta el eje principal correspondiente Oa en la figura 9.19*a*.

Como el círculo de Mohr está definido en forma única, el mismo círculo se puede obtener considerando los momentos y el producto de inercia del área A respecto a los ejes rectangulares x' y y' (figura 9.19*a*). Entonces, el punto X' de coordenadas $I_{x'}$ e $I_{x'y'}$ y el punto Y' de coordenadas $I_{y'}$ y $-I_{x'y'}$ están localizados sobre el círculo de Mohr y el ángulo $X'CA$ en la figura 9.19*b* debe ser igual al doble del ángulo $x'Oa$ en la figura 9.19*a*. Puesto que, como se señaló anteriormente, el ángulo XCA es igual al doble del ángulo xOa, se concluye que el ángulo XCX' en la figura 9.19*b* es el doble del ángulo xOx' en la figura 9.19*a*. El diámetro $X'Y'$ define a los momentos y al producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ del área dada con respecto a los ejes rectangulares x' y y' que forman un ángulo θ con los ejes x y y, se puede obtener rotando a través de un ángulo 2θ al diámetro XY, el cual corresponde a los momentos y al producto de inercia I_x, I_y e I_{xy}. Se observa que la rotación que lleva al diámetro XY hasta el diámetro $X'Y'$ en la figura 9.19*b* tiene el mismo sentido que la rotación que lleva a los ejes x y y hasta los ejes x' y y' en la figura 9.19*a*.

Es necesario señalar que el uso del círculo de Mohr no está limitado a las soluciones gráficas, esto es, a las soluciones basadas en dibujar y medir los distintos parámetros involucrados. Simplemente, al hacer un bosquejo del círculo de Mohr y con la trigonometría se pueden derivar las distintas relaciones que se requieren para la solución numérica de un problema dado (véase problema resuelto 9.8).

PROBLEMA RESUELTO 9.8

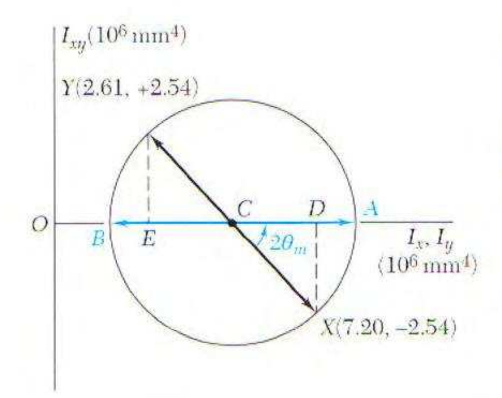


Para la sección mostrada en la figura, se sabe que los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x y y están dados por

$$I_x = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_y = 2.59 \times 10^6 \text{ mm}^4 \qquad I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Con el uso del círculo de Mohr, determine: *a*) los ejes principales de la sección con respecto a O, *b*) los valores de los momentos principales de inercia de la sección con respecto a O y *c*) los momentos y el producto de inercia de la sección con respecto a los ejes x' y y' que forman un ángulo de 60° con los ejes x y y.

SOLUCIÓN

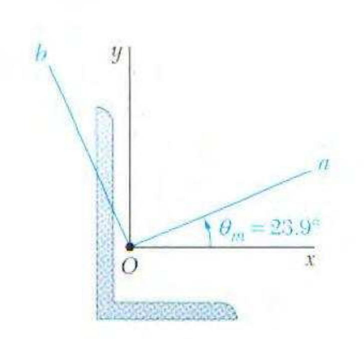


Dibujo del círculo de Mohr. Primero se grafica el punto X de coordenadas $I_x = 7.20$, $I_{xy} = -2.54$ y el punto Y de coordenadas $I_y = 2.59$, $-I_{xy} = +2.54$. Uniendo los puntos X y Y con una línea recta, se define el centro C del círculo de Mohr. La abscisa de C, la cual representa I_{prom}, y el radio R del círculo se pueden medir directamente o se pueden calcular de la siguiente forma:

$$I_{\text{prom}} = OC = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) = \tfrac{1}{2}(7.20 \times 10^6 + 2.59 \times 10^6) = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$CD = \tfrac{1}{2}(I_x - I_y) = \tfrac{1}{2}(7.20 \times 10^6 - 2.59 \times 10^6) = 2.305 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = \sqrt{(2.305 \times 10^6)^2 + (2.54 \times 10^6)^2} = 3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

a) **Ejes principales.** Los ejes principales de la sección corresponden a los puntos A y B en el círculo de Mohr y el ángulo a través del cual se debe rotar CX para llevarlo a CA define el ángulo $2\theta_m$. Así se tiene que

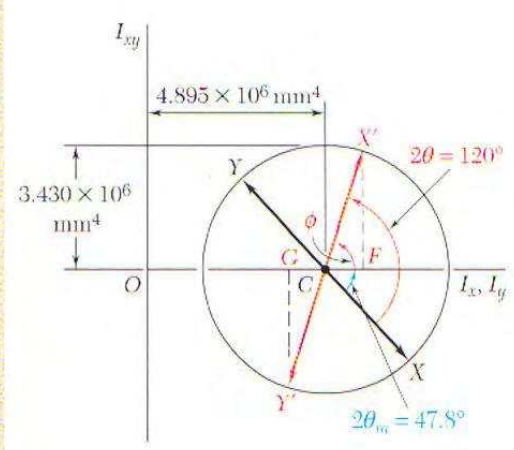
$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = \frac{2.54}{2.305} = 1.102 \qquad 2\theta_m = 47.8° \circlearrowleft \qquad \theta_m = 23.9° \circlearrowleft \blacktriangleleft$$



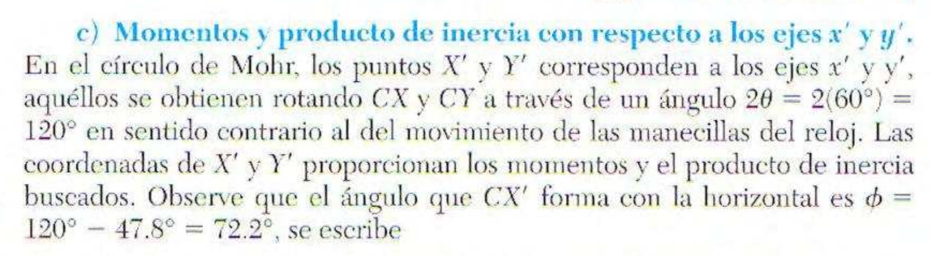
Por tanto, el eje principal Oa correspondiente al valor máximo del momento de inercia se obtiene rotando el eje x a través de 23.9° en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj; el eje principal Ob correspondiente al valor mínimo del momento de inercia se puede obtener rotando el eje y a través del mismo ángulo.

b) **Momentos principales de inercia.** Los momentos principales de inercia están representados por las abscisas de los puntos A y B. Por tanto, se tiene que

$$I_{\text{máx}} = OA = OC + CA = I_{\text{prom}} + R = (4.895 + 3.430)10^6 \text{ mm}^4$$
$$I_{\text{máx}} = 8.33 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$
$$I_{\text{mín}} = OB = OC - BC = I_{\text{prom}} - R = (4.895 - 3.430)10^6 \text{ mm}^4$$
$$I_{\text{mín}} = 1.47 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$



c) **Momentos y producto de inercia con respecto a los ejes x' y y'.** En el círculo de Mohr, los puntos X' y Y' corresponden a los ejes x' y y', aquéllos se obtienen rotando CX y CY a través de un ángulo $2\theta = 2(60°) = 120°$ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj. Las coordenadas de X' y Y' proporcionan los momentos y el producto de inercia buscados. Observe que el ángulo que CX' forma con la horizontal es $\phi = 120° - 47.8° = 72.2°$, se escribe



$$I_{x'} = OF = OC + CF = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2°$$
$$I_{x'} = 5.94 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$
$$I_{y'} = OG = OC - GC = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 - (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2°$$
$$I_{y'} = 3.85 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$
$$I_{x'y'} = FX' = (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \text{ sen } 72.2°$$
$$I_{x'y'} = 3.27 \times 10^6 \text{ mm}^4 \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas propuestos correspondientes a esta lección se utilizará el *círculo de Mohr* para determinar los momentos y productos de inercia de un área dada para diferentes orientaciones de los ejes coordenados. Aunque en algunos casos el uso del círculo de Mohr puede no ser tan directo como sustituir la información necesaria en las ecuaciones apropiadas [ecuaciones (9.18) a la (9.20)], este método de solución tiene la ventaja de que proporciona una representación visual de las relaciones que existen entre las distintas variables. Además, el círculo de Mohr muestra todos los valores de los momentos y productos de inercia que son posibles para un problema dado.

Uso del círculo de Mohr. La teoría correspondiente al círculo de Mohr fue presentada en la sección 9.9 y su aplicación se expuso en la sección 9.10 y en el problema resuelto 9.8. En el problema resuelto se presentaron los pasos que deben seguirse para determinar los *ejes principales*, los *momentos principales de inercia* y los *momentos y el producto de inercia con respecto a una orientación especificada de los ejes coordenados*. Cuando se utiliza el círculo de Mohr para resolver problemas, es importante recordar los siguientes puntos.

a) El círculo de Mohr está completamente definido por las cantidades R e I_{prom}, las cuales representan, respectivamente, el radio del círculo y la distancia desde el origen O hasta el centro del círculo C. Estas cantidades pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (9.23) si se conocen los momentos y el producto de inercia para una orientación dada de los ejes. Sin embargo, el círculo de Mohr también puede definirse por medio de otra combinación de valores conocidos [problemas 9.103, 9.106 y 9.107]. Para estos casos, puede ser que sea necesario realizar primero una o más suposiciones, como seleccionar una ubicación arbitraria para el centro del círculo cuando I_{prom} es desconocida, asignarle magnitudes relativas a los momentos de inercia (por ejemplo, $I_x > I_y$), o seleccionar el signo del producto de inercia.

b) El punto X de coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto Y de coordenadas (I_y, $-I_{xy}$) están localizados sobre el círculo de Mohr y son completamente opuestos.

c) Como los momentos de inercia deben ser positivos, todo el círculo de Mohr debe estar localizado a la derecha del eje I_{xy}; por tanto se concluye que $I_{prom} > R$ para todos los casos.

d) Conforme los ejes coordenados se rotan a través de un ángulo θ, la rotación asociada del diámetro del círculo de Mohr es igual a 2θ y es en el mismo sentido (a favor o en contra del movimiento de las manecillas del reloj). Se recomienda que los puntos conocidos sobre la circunferencia del círculo sean identificados con una letra mayúscula apropiada, como se hizo en la figura 9.19*b* y en los círculos de Mohr del problema resuelto 9.8. Esto permitirá determinar, para cada valor de θ, el signo del producto de inercia correspondiente, así como el momento de inercia que está asociado con cada uno de los ejes coordenados [problema resuelto 9.8, incisos *a*) y *c*)].

Aun cuando se ha presentado al círculo de Mohr dentro del contexto específico del estudio de los momentos y productos de inercia, la técnica del círculo de Mohr también se puede aplicar para la solución de problemas análogos pero físicamente distintos en mecánica de materiales. Este uso múltiple de una técnica específica no es único y en el estudio de la ingeniería se pueden encontrar varios métodos de solución que pueden aplicarse a diversos problemas.

Problemas

9.91 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del cuarto de elipse del problema 9.67 con respecto a un nuevo sistema de ejes, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y alrededor de O en un ángulo de *a*) 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj y *b*) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.92 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.72 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.93 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.73 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.94 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.75 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.95 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia de la sección transversal del ángulo L3 × 2 × $\frac{1}{4}$ in. del problema 9.74 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.96 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia de la sección transversal del ángulo L127 × 76 × 12.7 mm del problema 9.78 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.97 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, utilice el círculo de Mohr a fin de determinar la orientación de los ejes principales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 a 9.102 Utilice el círculo de Mohr y determine, para el área indicada, la orientación de los ejes principales centroidales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 Área del problema 9.72.
9.99 Área del problema 9.76.
9.100 Área del problema 9.73.
9.101 Área del problema 9.74.
9.102 Área del problema 9.77.

(Los momentos de inercia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ para el área del problema 9.102 se determinaron en el problema 9.44.)

9.103 Los momentos y los productos de inercia de la sección transversal de un ángulo de L4 × 3 × $\frac{1}{4}$ in. de dos ejes rectangulares x y y que pasan por el punto C son, respectivamente, $\bar{I}_x = 1.33$ in^4, $\bar{I}_y = 2.75$ in.^{4}, e $\bar{I}_{xy} < 0$, con el valor mínimo del momento de inercia del área con respecto a cualquier eje que pase por C igual a $\bar{I}_{mín} = 0.692$ in.^{4} Utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) el producto de inercia $\bar{I}_{xy}$ del área, *b*) la orientación de los ejes principales y *c*) el valor de $\bar{I}_{máx}$.

9.104 y 9.105 Utilice el círculo de Mohr y determine, para la sección transversal del ángulo de acero laminado que se muestra en las figuras, la orientación de los ejes centroidales principales y los valores correspondientes de los momentos de inercia. (Las propiedades de la sección transversal se especifican en la figura 9.13.)

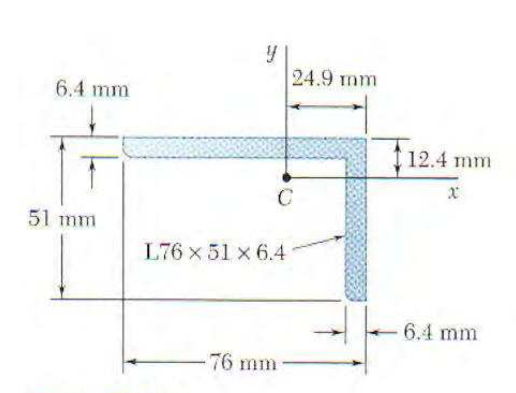


Figura P9.104

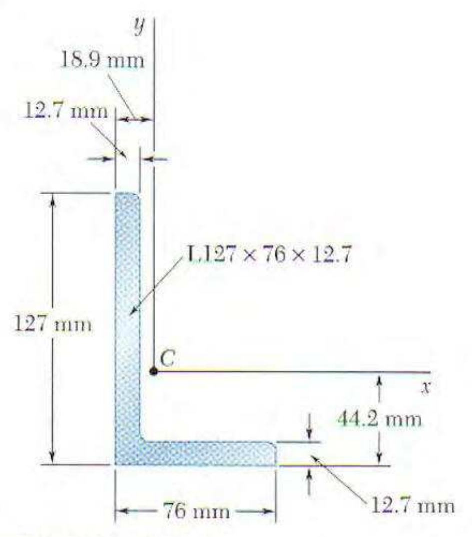


Figura P9.105

***9.106** Los momentos de inercia con respecto a dos ejes centroidales rectangulares x y y de una cierta área son, respectivamente, $\bar{I}_x = 1\ 200$ in.^{4} e $\bar{I}_y = 300$ in.^{4} Si se sabe que después de rotar 30° a los ejes x y y, con respecto al centroide y en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, el valor del producto de inercia relativo a los ejes rotados es 1 450 in.^{4}, utilice el círculo de Mohr para determinar *a*) la orientación de los ejes principales y *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.107 Se sabe que para un área dada $\bar{I}_y = 48 \times 10^6$ mm^4 e $\bar{I}_{xy} = -20 \times 10^6$ mm^4, donde x y y son ejes rectangulares centroidales. Si el eje que corresponde al valor máximo del producto de inercia se obtiene al rotar 67.5° el eje x con respecto al punto C y en sentido contrario al de las manecillas del reloj, use el círculo de Mohr para determinar *a*) el momento de inercia $\bar{I}_x$ del área y *b*) los momentos de inercia centroidales principales.

9.108 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que, para cualquier polígono regular (por ejemplo, un pentágono), *a*) el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el centroide siempre es el mismo y *b*) el producto de inercia con respecto a cualquier par de ejes rectangulares que pasan por el centroide siempre es cero.

9.109 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que la expresión $I_{x'}I_{y'} - I^2_{x'y'}$, donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ representan, respectivamente, los momentos y el producto de inercia de cierta área dada con respecto a los ejes rectangulares x' y y' que pasan por el punto O, es independiente de la orientación de los ejes x' y y'. Demuestre también, que la expresión anterior es igual al cuadrado de la longitud de una línea tangente al círculo de Mohr trazada desde el origen del sistema de los ejes coordenados.

9.110 Utilizando la propiedad de invarianza establecida en el problema anterior, exprese el producto de inercia I_{xy} de un área A con respecto a los dos ejes rectangulares que pasan por el punto O en términos de los momentos de inercia I_x e I_y de dicha área y de los momentos de inercia principales $I_{\text{mín}}$ e $I_{\text{máx}}$ de A con respecto a O. Si se sabe que el momento de inercia máximo es de 1.257 in.^{4}, aplique la fórmula obtenida para calcular el producto de inercia I_{xy} de la sección transversal del ángulo L3 × 2 × $\frac{1}{4}$ in. que se muestra en la figura 9.13A.

MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

9.11. MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA

Considere una pequeña masa Δm que está montada sobre una barra de masa insignificante, la cual puede rotar libremente alrededor de un eje AA' (figura 9.20*a*). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa, las cuales se supone que estaban en reposo, comienzan a girar alrededor de AA'. Los detalles de este movimiento serán estudiados posteriormente en dinámica. Por ahora sólo se desea indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación dada es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r. Por tanto, el producto $r^2\,\Delta m$ proporciona una medida de la *inercia* del sistema, esto es, una medida de la resistencia que ofrece el sistema cuando se trata de ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto $r^2\,\Delta m$ es llamado el *momento de inercia* de la masa Δm con respecto al eje AA'.

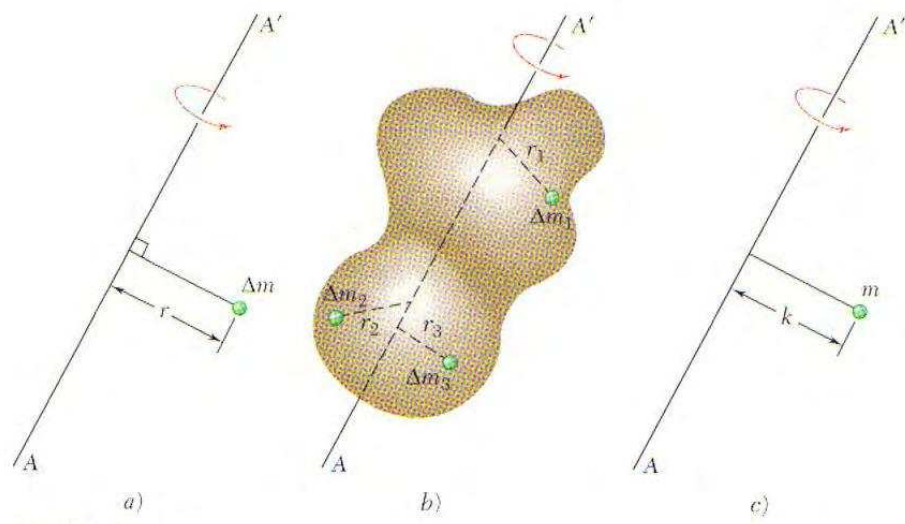


Figura 9.20

Ahora considere un cuerpo de masa m, el cual se hará girar alrededor de un eje AA' (figura 9.20*b*). Si se divide el cuerpo en elementos de masa Δm_1, Δm_2, etc., se encuentra que la resistencia que ofrece el cuerpo al movimiento de rotación se mide por la suma $r_1^2\,\Delta m_1 + r_2^2\,\Delta m_2 + \cdots$. Por tanto, esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA'. Al incrementar el número de elementos se encuentra que, en el límite, el momento de inercia es igual a la integral

$$I = \int r^2\,dm \tag{9.28}$$

El *radio de giro* k del cuerpo con respecto al eje AA' está definido por la relación

$$I = k^2 m \qquad \text{o} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

En este sentido, el radio de giro k representa la distancia a la cual se debe concentrar toda la masa del cuerpo si su momento de inercia con respecto a AA' debe permanecer inalterado (figura 9.20*c*). Sin importar si la masa m se conserva en su forma original (figura 9.20*b*) o si se concentra como se muestra en la figura 9.20*c*, ésta reaccionará de la misma forma a una rotación o *giro* con respecto a AA'.

Si se utilizan las unidades del SI, el radio de giro k está expresado en metros y la masa m está expresada en kilogramos, por tanto, la unidad empleada para el momento de inercia de una masa es $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en *slugs* (esto es en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$), por tanto, la unidad derivada empleada para el momento de inercia de una masa es $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.[†]

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje coordenado puede expresarse en términos de las coordenadas x, y y z del elemento de masa dm (figura 9.21). Por ejemplo, observe que el cuadrado de la distancia r desde el elemento dm hasta el eje y es igual a $z^2 + x^2$, se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

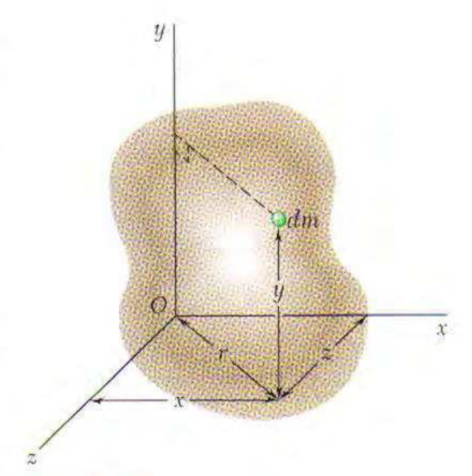
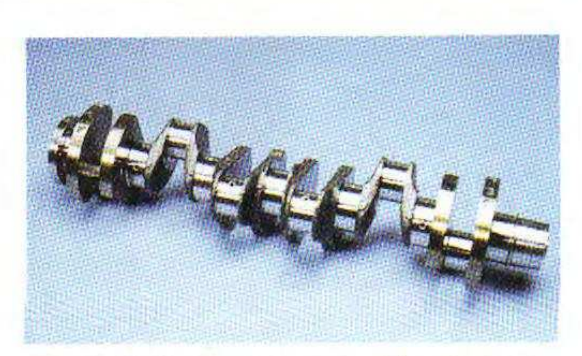


Figura 9.21

Se pueden obtener expresiones similares para los momentos de inercia respecto a los ejes x y z. Así se escribe

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2)\, dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \tag{9.30}$$


Fotografía 9.2 Como se expondrá en el curso de dinámica, el comportamiento rotacional del eje que se muestra en la fotografía depende del momento de inercia de masa del eje con respecto a su eje de rotación.

[†]Cuando se convierte el momento de inercia de masa de unidades de uso común en Estados Unidos o las unidades del SI, se debe recordar que la unidad base *libra* utilizada en la unidad derivada $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ es una unidad de fuerza (*no* de masa) y por tanto, debe convertirse a newtons. Así se tiene que

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = (4.45\ \text{N})(0.3048\ \text{m})(1\ \text{s})^2 = 1.356\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o, como $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$,

$$1\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = 1.356\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

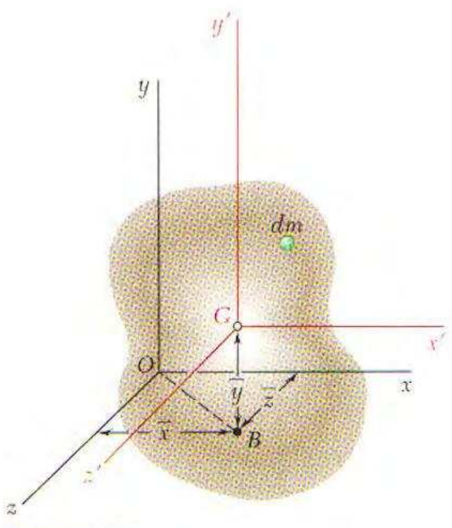


Figura 9.22

9.12. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Considere un cuerpo de masa m. Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está localizado en el punto arbitrario O y sea $Gx'y'z'$ un sistema de *ejes centroidales* paralelo, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad G del cuerpo[†] y cuyos ejes x', y' y z' son paralelos a los ejes x, y y z, respectivamente (figura 9.22). Representando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas x, y y z del elemento dm con respecto a $Oxyz$ y las coordenadas x', y' y z' de dicho elemento con respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z} \tag{9.31}$$

Con las ecuaciones (9.30) se puede expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y} \int y'\, dm + 2\bar{z} \int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en la expresión anterior representa el momento de inercia $\bar{I}_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje centroidal x'; la segunda y la tercera representan, respectivamente, el primer momento del cuerpo con respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, como ambos planos contienen al punto G, las dos integrales son iguales a *cero*; la última integral es igual a la masa total m del cuerpo. Por tanto, se escribe,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \tag{9.32}$$

y, en forma similar,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{9.32'}$$

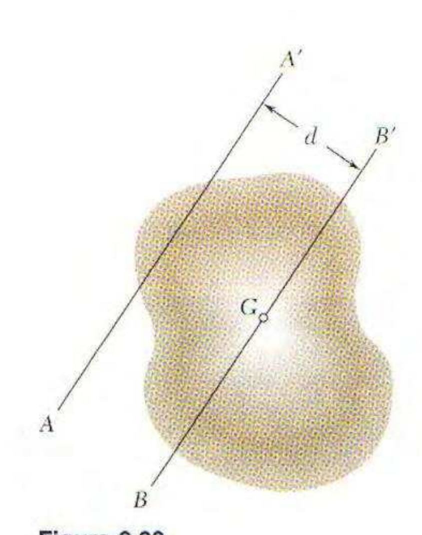


Figura 9.23

Con base en la figura 9.22 se puede verificar que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB entre los ejes y y y'. En forma análoga, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representan, respectivamente, los cuadrados de la distancia entre los ejes x y x' y entre los ejes z y z'. Por tanto, representando con d la distancia entre un eje arbitrario AA' y un eje centroidal paralelo BB' (figura 9.23) se puede escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia $\bar{I}$ con respecto a BB':

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{9.33}$$

Expresando los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{9.34}$$

donde k y $\bar{k}$ representan, respectivamente, los radios de giro del cuerpo con respecto a AA' y BB'.

[†]Observe que el término *centroidal* se usa para definir el eje que pasa por el centro de gravedad G del cuerpo, aunque no coincida G con el centroide del volumen del cuerpo.

9.13. MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS DELGADAS

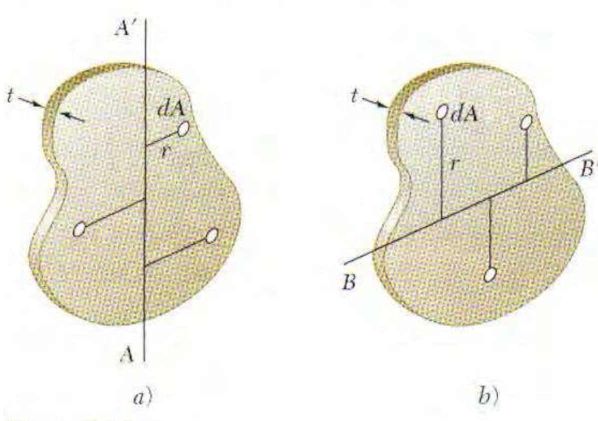
Considere una placa delgada de espesor uniforme t, la cual está hecha de material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' *contenido en el plano* de la placa (figura 9.24*a*) está dado por

$$I_{AA',\ \text{masa}} = \int r^2\, dm$$

Como $dm = \rho t\, dA$, se escribe

$$I_{AA',\ \text{masa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Pero r representa la distancia que hay desde el elemento de área dA



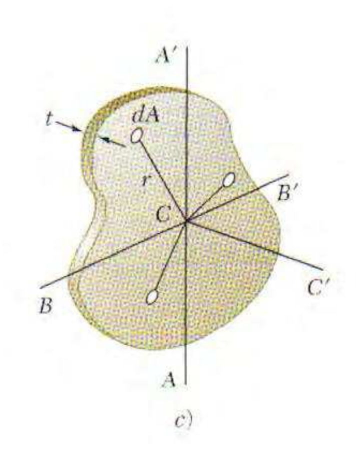


Figura 9.24

hasta el eje AA'; por tanto, la integral es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA'. Así se tiene que

$$I_{AA',\ \text{masa}} = \rho t I_{AA',\ \text{área}} \tag{9.35}$$

En forma similar, para un eje BB' que está contenido en el plano de la placa y que es perpendicular a AA' (figura 9.24*b*), se tiene que

$$I_{BB',\ \text{masa}} = \rho t I_{BB',\ \text{área}} \tag{9.36}$$

Ahora, considerando al eje CC' que es *perpendicular* a la placa y que pasa a través del punto de intersección C de AA' y BB' (figura 9.24*c*), se escribe

$$I_{CC',\ \text{masa}} = \rho t J_{C,\ \text{área}} \tag{9.37}$$

donde J_C es el momento *polar* de inercia del área de la placa con respecto al punto C.

Recordando la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre el momento polar de inercia y los momentos rectangulares de inercia de un área se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \tag{9.38}$$

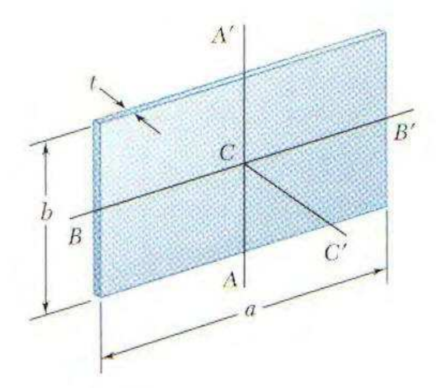


Figura 9.25

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b (figura 9.25), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a ejes que pasan a través del centro de gravedad de la placa:

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3b)$$
$$I_{BB', \text{ masa}} = \rho t I_{BB', \text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Observando que el producto ρabt es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada de la forma siguiente:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{9.39}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{9.40}$$

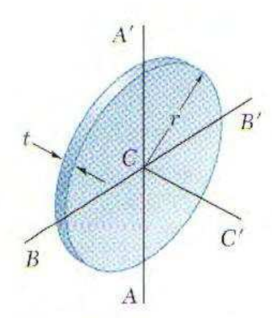


Figura 9.26

Placa circular. En el caso de una placa circular o disco de radio r (figura 9.26), se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

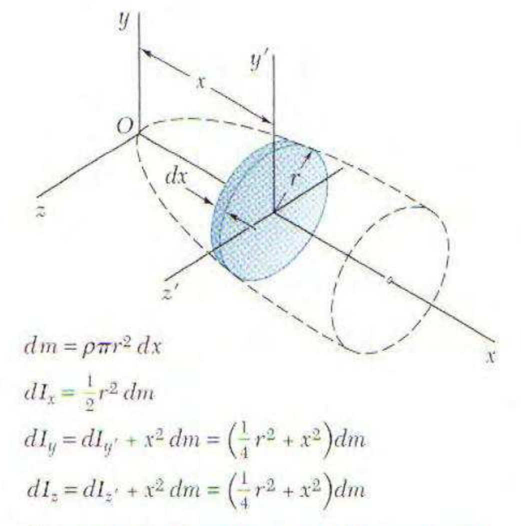
Observando que el producto $\rho\pi r^2 t$ es igual a la masa m de la placa y que $I_{AA'} = I_{BB'}$, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la siguiente forma:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{9.41}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{9.42}$$

9.14. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL POR INTEGRACIÓN

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral $I = \int r^2\, dm$. Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad ρ, el elemento de masa dm es igual a ρdV y se puede escribir $I = \rho\int r^2\, dV$. Esta integral sólo depende de la forma del cuerpo. Por tanto, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional será necesario llevar a cabo una triple integración o, cuando menos, una doble integración.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración seleccionando como elemento de masa dm una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. Por ejemplo, en el caso de cuerpos de revolución, el elemento de masa será un disco delgado (figura 9.27). Con la fórmula (9.42), el momento de inercia del disco con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura 9.27. Por otra parte, el momento de inercia del disco con respecto a cada uno de los otros dos ejes coordenados se obtiene con la fórmula (9.41) y el teorema de los ejes paralelos. Integrando las expresiones obtenidas de esta forma, se obtienen los elementos de inercia del cuerpo.



$dm = \rho\pi r^2\, dx$

$dI_x = \frac{1}{2}r^2\, dm$

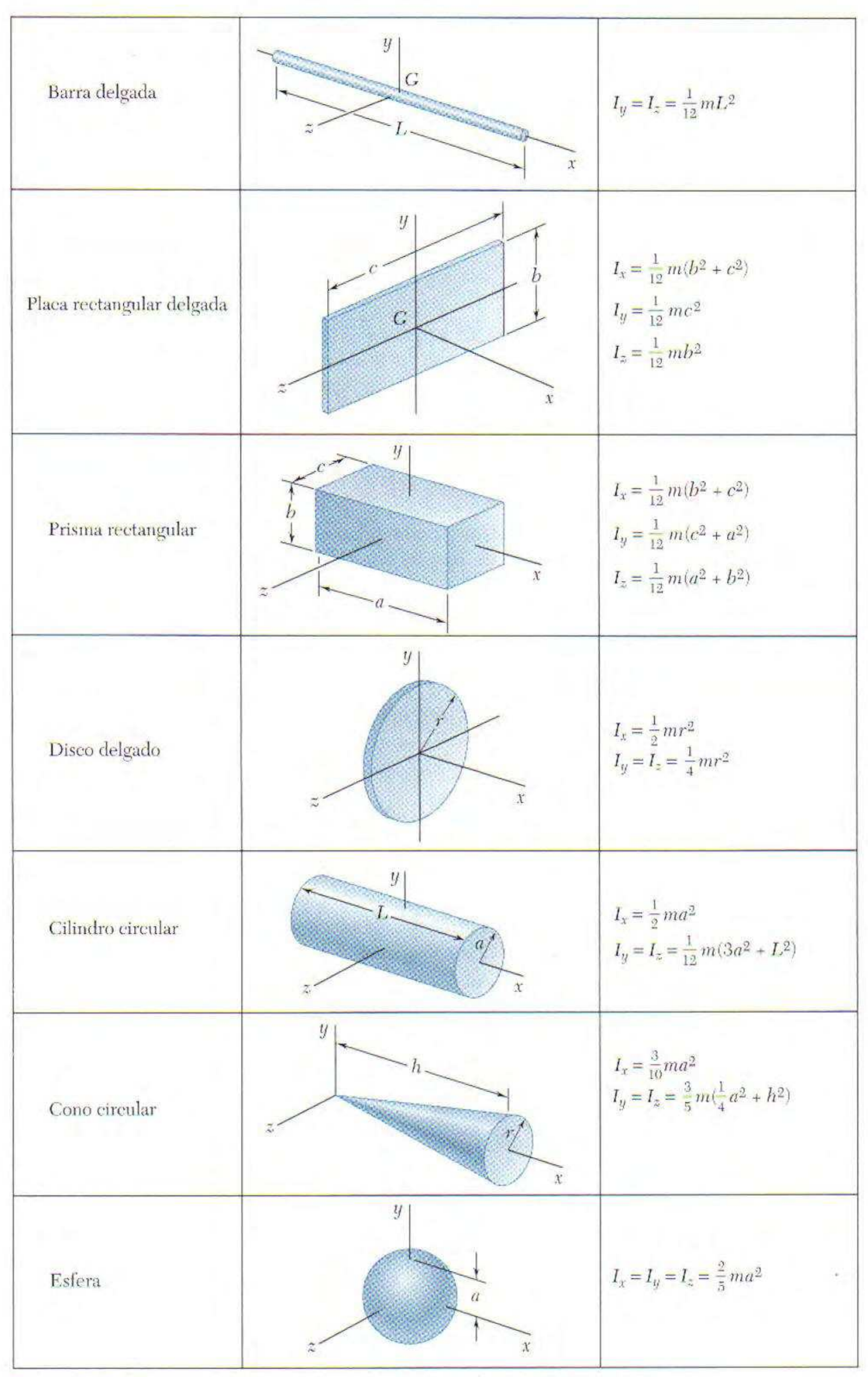
$dI_y = dI_{y'} + x^2\, dm = \left(\frac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$

$dI_z = dI_{z'} + x^2\, dm = \left(\frac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$

Figura 9.27 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

9.15. MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

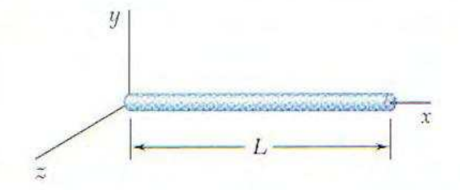
En la figura 9.28 se muestran los momentos de inercia de algunas formas comunes. Para un cuerpo que consiste de varias de estas formas simples, se puede obtener el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje dado calculando primero los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto al eje deseado y sumándolos después. Como en el caso de las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto *no se puede* obtener sumando los radios de giro de las partes que lo constituyen.



Forma	Momentos de inercia
Barra delgada	$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa rectangular delgada	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma rectangular	$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado	$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular	$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cono circular	$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfera	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

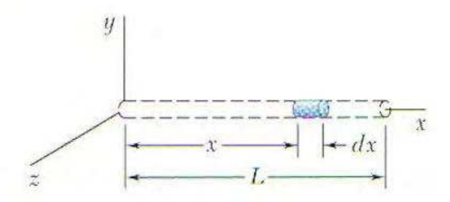
Figura 9.28 Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.

PROBLEMA RESUELTO 9.9



Determine el momento de inercia de una barra delgada de longitud L y masa m con respecto a un eje que es perpendicular a la barra y que pasa a través de uno de sus extremos.

SOLUCIÓN

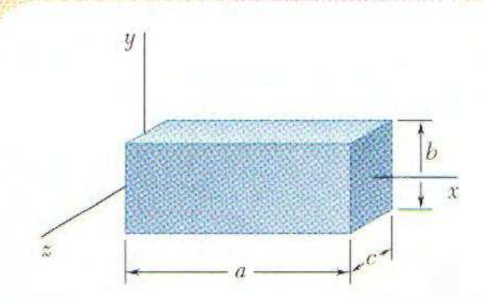


Si se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura, se escribe

$$dm = \frac{m}{L}\,dx$$

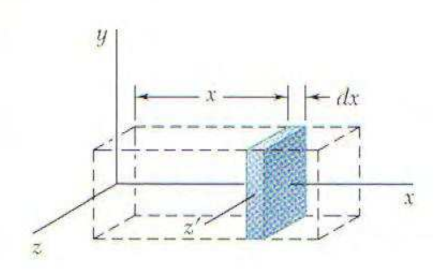
$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L}\,dx = \left[\frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L \qquad I_y = \tfrac{1}{3}mL^2 \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 9.10



Para el prisma rectangular homogéneo mostrado en la figura, determine el momento de inercia con respecto al eje z.

SOLUCIÓN



Se selecciona como elemento diferencial de masa a la placa delgada mostrada en la figura; por tanto,

$$dm = \rho bc\,dx$$

Haciendo referencia a la sección 9.13, se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z' está dado por

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\,dm$$

Con la aplicación del teorema de los ejes paralelos, se obtiene el momento de inercia de masa de la placa con respecto al eje z.

$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{12}b^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx$$

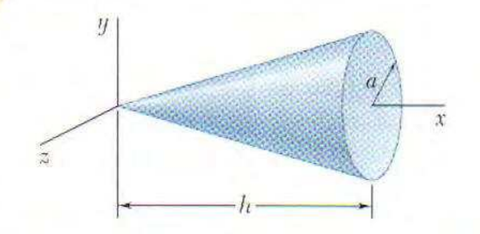
Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$, se obtiene

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx = \rho abc(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

Como la masa total del prisma es $m = \rho abc$, se puede escribir

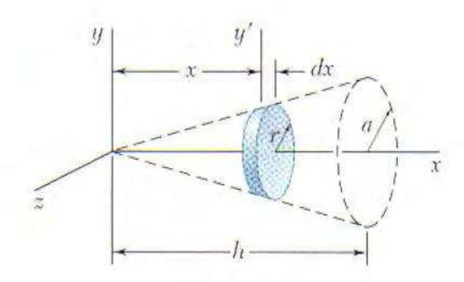
$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2) \quad ◀$$

Se observa que si el prisma es delgado, b es pequeño en comparación con a y la expresión para I_z se reduce a $\frac{1}{3}ma^2$, la cual es el resultado obtenido en el problema resuelto 9.9 cuando $L = a$.



PROBLEMA RESUELTO 9.11

Determine el momento de inercia de un cono circular recto con respecto a: *a*) su eje longitudinal, *b*) un eje que pasa a través del ápice del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal y *c*) un eje que pasa a través del centroide del cono y que es perpendicular a su eje longitudinal.



SOLUCIÓN

Se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura.

$$r = a\frac{x}{h} \qquad dm = \rho\pi r^2\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

a) Momento de inercia I_x. Con el uso de la expresión derivada en la sección 9.13 para un disco delgado, se calcula el momento de inercia de masa del elemento diferencial con respecto al eje x.

$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = h$, se obtiene

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

Como la masa total del cono es $m = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$, se puede escribir

$$I_x = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \tfrac{3}{10}a^2(\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h) = \tfrac{3}{10}ma^2 \qquad I_x = \tfrac{3}{10}ma^2 \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento de inercia I_y. Se utiliza el mismo elemento diferencial. Aplicando el teorema de los ejes paralelos y con la expresión derivada en la sección 9.13 para un disco delgado, se escribe

$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{4}r^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{4}r^2 + x^2)\,dm$$

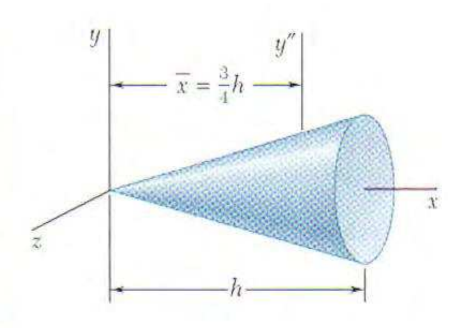
Si se sustituyen las expresiones para r y para dm en la ecuación anterior, se obtiene

$$dI_y = \left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5}$$

Con la introducción de la expresión para la masa total del cono m, se reescribe I_y de la forma siguiente:

$$I_y = \tfrac{3}{5}(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h \qquad I_y = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) \quad \blacktriangleleft$$



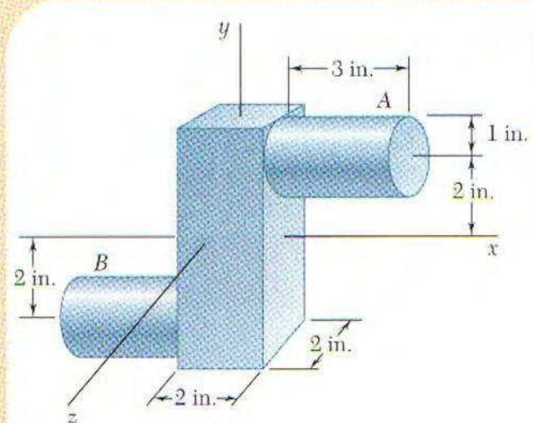
c) Momento de inercia $\bar{I}_{y''}$. Se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

$$I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$$

Resolviendo para $\bar{I}_{y''}$ y recordando de la figura 5.21 que $\bar{x} = \frac{3}{4}h$, se tiene que

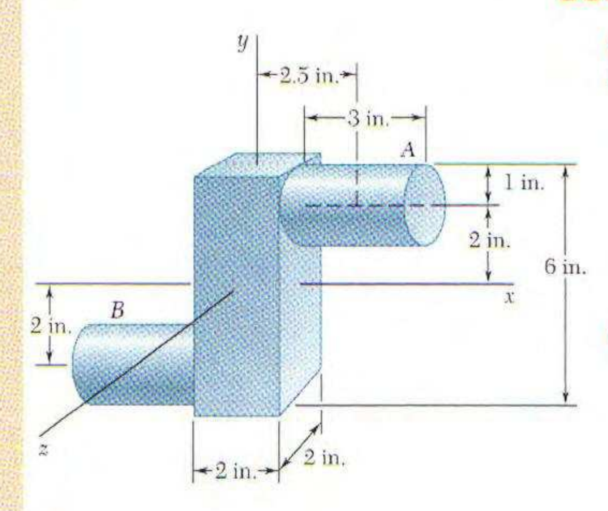
$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) - m(\tfrac{3}{4}h)^2$$

$$\bar{I}_{y''} = \tfrac{3}{20}m(a^2 + \tfrac{1}{4}h^2) \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 9.12

Una pieza de acero consta de un prisma rectangular de 6 × 2 × 2 in. y dos cilindros de 2 in. de diámetro y 3 in. de longitud, como se muestra en la figura. Si se sabe que el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3, determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.



SOLUCIÓN

Cálculo de las masas

Prisma

$$V = (2 \text{ in.})(2 \text{ in.})(6 \text{ in.}) = 24 \text{ in.}^3$$

$$W = (24 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 6.81 \text{ lb}$$

$$m = \frac{6.81 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Cada uno de los cilindros

$$V = \pi(1 \text{ in.})^2(3 \text{ in.}) = 9.42 \text{ in.}^3$$

$$W = (9.42 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 2.67 \text{ lb}$$

$$m = \frac{2.67 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Momentos de inercia. A partir de la figura 9.28 se calculan los momentos de inercia de cada una de las partes que constituyen la pieza, utilizando el teorema de los ejes cuando sea necesario. Observe que todas las longitudes deben estar expresadas en pies.

Prisma

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{6}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 4.88 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 0.977 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

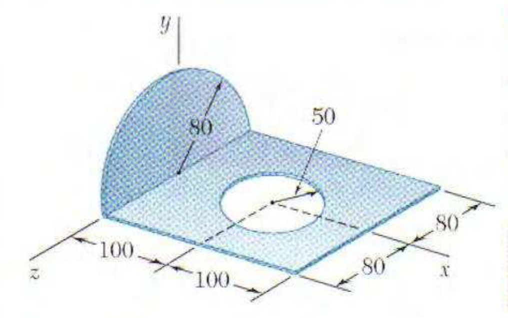
Cada uno de los cilindros

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \tfrac{1}{2}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2 = 2.59 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\tfrac{2.5}{12} \text{ ft})^2 = 4.17 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \tfrac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\tfrac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\tfrac{2.5}{12} \text{ ft})^2 + (\tfrac{2}{12} \text{ ft})^2] = 6.48 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Pieza completa. Con la suma de los valores obtenidos, se tiene que

$$I_x = 4.88 \times 10^{-3} + 2(2.59 \times 10^{-3}) \qquad I_x = 10.06 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \quad ◀$$
$$I_y = 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-3}) \qquad I_y = 9.32 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \quad ◀$$
$$I_z = 4.88 \times 10^{-3} + 2(6.48 \times 10^{-3}) \qquad I_z = 17.84 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \quad ◀$$

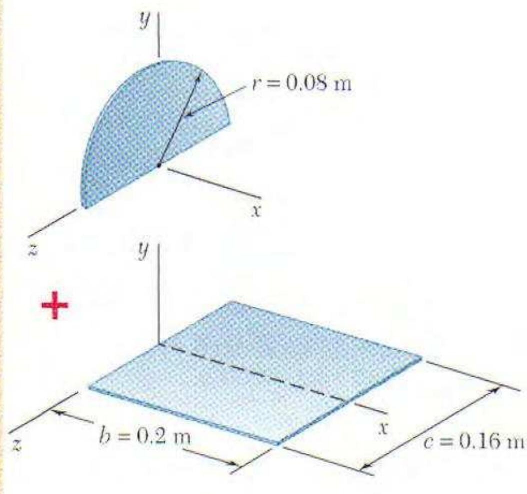
PROBLEMA RESUELTO 9.13

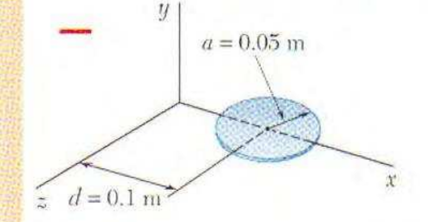


Dimensiones en mm

Una placa delgada de acero de 4 mm de espesor se corta y se dobla para formar la pieza de maquinaria mostrada en la figura. Si se sabe que la densidad del acero es 7 850 kg/m³, determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.

SOLUCIÓN





Se observa que la pieza consta de una placa semicircular y de una placa rectangular a la cual se le ha removido una placa circular.

Cálculo de las masas. ***Placa semicircular***

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0.08 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.3156 \text{ kg}$$

Placa rectangular

$$V_2 = (0.200 \text{ m})(0.160 \text{ m})(0.004 \text{ m}) = 128 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 1.005 \text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0.050 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.2466 \text{ kg}$$

Momentos de inercia. Con el uso del método presentado en la sección 9.13 se calculan los momentos de inercia de cada uno de los componentes.

Placa semicircular. A partir de la figura 9.28, se observa que para una placa circular de masa m y radio r, se tiene que

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

Debido a la simetría, se observa que para una placa semicircular

$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Como la masa de la placa semicircular es $m_1 = \tfrac{1}{2}m$, se tiene que

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1 r^2 = \tfrac{1}{2}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 1.010 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1 r^2 = \tfrac{1}{4}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 0.505 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa rectangular

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2 c^2 = \tfrac{1}{12}(1.005 \text{ kg})(0.16 \text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2 b^2 = \tfrac{1}{3}(1.005 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400)(10^{-3}) = 15.544 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3 a^2 + m_3 d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 + m_3 d^2 = \tfrac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2$$
$$= 2.620 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Pieza completa

$$I_x = (1.010 + 2.144 - 0.154)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_x = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_y = (0.505 + 15.544 - 2.774)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_y = 13.28 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$
$$I_z = (0.505 + 13.400 - 2.620)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad I_z = 11.29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudió el *momento de inercia de masa* y el *radio de giro* de un cuerpo tridimensional con respecto a un eje dado [ecuaciones (9.28) y (9.29)]. También se derivó el *teorema de los ejes paralelos* para ser utilizado con momentos de inercia de masa y se expuso el cálculo de los momentos de inercia de masa de placas delgadas y de cuerpos tridimensionales.

1. *Cálculo de los momentos de inercia de masa.* Para formas simples, el momento de inercia de masa I de un cuerpo con respecto a un eje dado puede calcularse directamente a partir de la definición dada en la figura 9.28 [problema resuelto 9.9]. Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario dividir el cuerpo en placas delgadas, calcular el momento de inercia de una placa delgada típica con respecto al eje dado —con el teorema de los ejes paralelos si es necesario— e integrar la expresión obtenida.

2. *Aplicación del teorema de los ejes paralelos.* En la sección 9.12 se derivó el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

$$I = \bar{I} + md^2 \qquad (9.33)$$

el cual establece que el momento de inercia I de un cuerpo de masa m con respecto a un eje dado es igual a la suma del momento de inercia $\bar{I}$ de dicho cuerpo con respecto a un *eje centroidal paralelo* y el producto md^2, donde d es la distancia entre los dos ejes. Cuando se calcula el momento de inercia de un cuerpo tridimensional con respecto a cada uno de los ejes coordenados, d^2 se puede reemplazar por la suma de los cuadrados de distancias medidas a lo largo de los otros dos ejes coordenados [ecuaciones (9.32) y (9.32′)].

3. *Evasión de errores relacionados con las unidades.* Para evitar errores, es esencial ser consistente en el uso de las unidades. Por tanto, todas las longitudes deben expresarse en metros o pies, según convenga y, para problemas en los que se utiliza el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, las masas deben expresarse en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$. Además, se recomienda en forma enfática que se incluyan las unidades a lo largo de la realización de todos los cálculos [problemas resueltos 9.12 y 9.13].

4. *Cálculo del momento de inercia de masa de placas delgadas.* En la sección 9.13 se demostró que el momento de inercia de masa de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse multiplicando el momento de inercia de área correspondiente a la placa por la densidad ρ y el espesor t de la misma [ecuaciones (9.35) a la (9.37)]. Observe que como el eje CC' en la figura 9.24*c* es *perpendicular a la placa*, $I_{CC', \text{masa}}$ está asociado con el momento *polar* de inercia $J_{C, \text{área}}$.

En lugar de calcular directamente el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje dado, en algunos casos se encontrará que es conveniente calcular primero su momento de inercia con respecto a un eje que es paralelo al eje especificado y después aplicar el teorema de los ejes paralelos. Además para de-

terminar el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la misma, puede ser deseable determinar primero sus momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares que están en el plano para después utilizar la ecuación (9.38). Por último, se debe recordar que la masa de una placa de área A, espesor t y densidad ρ es $m = \rho t A$.

5. *Determinación del momento de inercia de un cuerpo por medio de una sola integración directa.* En la sección 9.14 se expuso y en los problemas resueltos 9.10 y 9.11 se ilustró cómo se puede usar una integración para calcular el momento de inercia de un cuerpo que puede ser dividido en diversas placas delgadas paralelas. Para estos casos, es necesario expresar la masa del cuerpo en términos de la densidad y de las dimensiones del mismo. Como en los problemas resueltos, el cuerpo ha sido dividido en placas delgadas perpendiculares al eje x, se tendrán que expresar las dimensiones de cada placa como funciones de la variable x.

a) En el caso especial de un cuerpo de revolución, la placa elemental es un disco delgado y se deben utilizar las ecuaciones proporcionadas en la figura 9.27 para determinar los momentos de inercia del cuerpo [problema resuelto 9.11].

b) En el caso general, cuando el cuerpo no es un cuerpo de revolución, el elemento diferencial no es un disco, es una placa delgada de forma diferente y no se pueden utilizar las ecuaciones de la figura 9.27. Por ejemplo, véase el problema resuelto 9.10 en el que el elemento fue una placa rectangular delgada. Para configuraciones más complejas se pueden usar una o más de las siguientes ecuaciones, las cuales están basadas en las ecuaciones (9.32) y (9.32′) de la sección 9.12.

$$dI_x = dI_{x'} + (\bar{y}_{el}^2 + \bar{z}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + (\bar{z}_{el}^2 + \bar{x}_{el}^2)\, dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + (\bar{x}_{el}^2 + \bar{y}_{el}^2)\, dm$$

donde las primas se utilizan para denotar los ejes centroidales de cada placa elemental y donde $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ y $\bar{z}_{el}$ representan las coordenadas del centroide de dicha placa elemental. Los momentos centroidales de inercia de la placa se determinan de la forma descrita anteriormente para una placa delgada: haciendo referencia a la figura 9.12 de la página 487, se calculan los momentos de inercia de área correspondientes de la placa y se multiplica el resultado por la densidad ρ y por el espesor t de la placa. Además, si se ha dividido el cuerpo en placas delgadas perpendiculares al eje x, se debe recordar que se puede obtener $dI_{x'}$ sumando $dI_{y'}$ y $dI_{z'}$ en lugar de calcularlo directamente. Por último, al usar la geometría del cuerpo se expresa el resultado obtenido en términos de la variable única x y se integra en x.

6. *Cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto.* Como se estableció en la sección 9.15, el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a un eje dado es igual a la suma de los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto a ese mismo eje. Los problemas resueltos 9.12 y 9.13 ilustran el método apropiado de solución. También se debe recordar que el momento de inercia de una parte componente será negativo sólo si dicha parte es *removida* (como en el caso de un agujero).

A pesar de que los problemas propuestos en esta lección sobre cuerpos compuestos son relativamente fáciles, es necesario trabajar con cuidado para evitar errores en los cálculos. Además, si alguno de los momentos de inercia que se necesiten no están proporcionados en la figura 9.28, será necesario derivar las fórmulas requeridas con el uso de las técnicas de esta lección.

Problemas

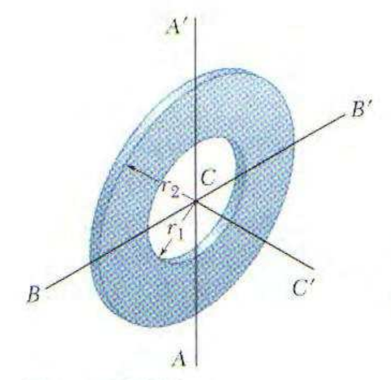


Figura P9.111

9.111 En la figura se muestra un anillo de masa m que fue cortado de una placa uniforme delgada. Determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje AA' y *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al anillo.

9.112 En la figura se muestra una placa delgada y semicircular con un radio a y una masa m. Determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje centroidal BB' y *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa.

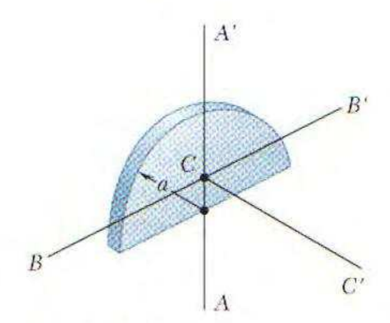


Figura P9.112

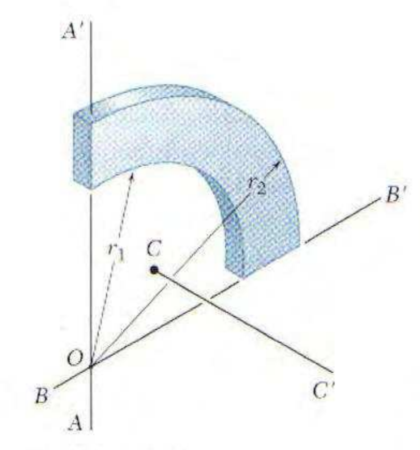


Figura P9.113

9.113 El cuarto de anillo de masa m que se muestra en la figura se cortó de una placa delgada uniforme. Si se sabe que $r_1 = \frac{3}{4}\, r_2$, determine el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a *a*) el eje AA' y *b*) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al cuarto de anillo.

9.114 En la figura se muestra una enjuta parabólica que se cortó de una placa delgada uniforme. Si la masa de la enjuta se representa con m, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje BB' y *b*) el eje DD' que es perpendicular al plano que contiene a la enjuta. (*Sugerencia:* Vea el problema resuelto 9.3.)

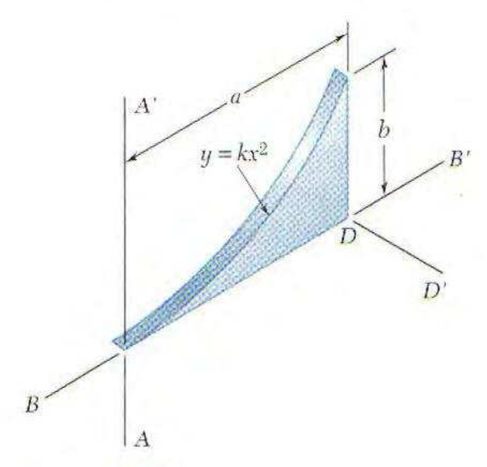


Figura P9.114

9.115 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se cortó en la forma de un paralelogramo. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje BB' que es perpendicular a la placa.

9.116 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se cortó en la forma de un paralelogramo. Determine el momento de inercia de masa de la placa con respecto a *a*) el eje y, *b*) el eje AA' que es perpendicular a la placa.

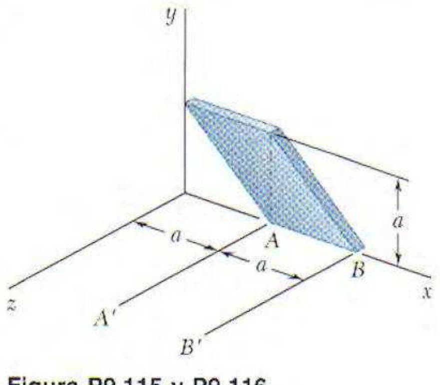


Figura P9.115 y P9.116

9.117 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje x y *b*) el eje y.

9.118 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa y *b*) el eje AA' que es paralelo al eje x y se encuentra a una distancia de $1.5a$ desde la placa.

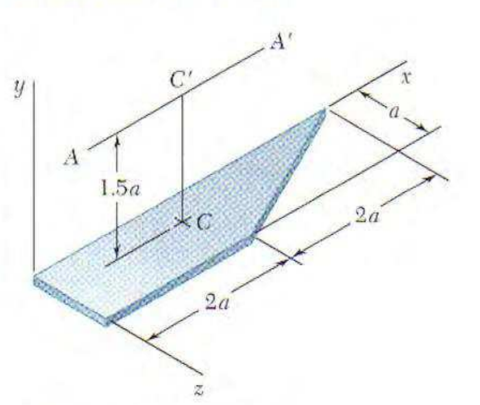


Figura P9.117 y P9.118

9.119 Al rotar el área mostrada en la figura con respecto al eje x se obtuvo un sólido homogéneo de revolución con masa m. Utilice integración directa para expresar, en términos de m y h, el momento de inercia de masa con respecto al eje x del sólido obtenido.

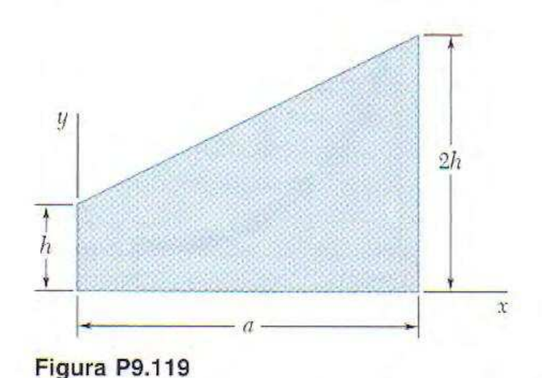


Figura P9.119

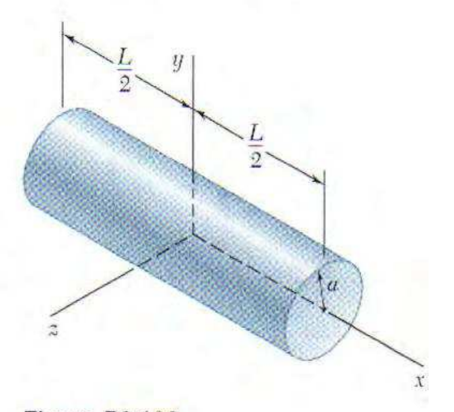


Figura P9.120

9.120 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje y del cilindro circular recto que se muestra en la figura. Suponga que el cilindro tiene densidad uniforme y una masa m.

9.121 El área mostrada en la figura se rota con respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución con masa m. Determine por integración directa el momento de inercia de masa del sólido con respecto a *a*) el eje x y *b*) el eje y. Exprese las respuestas en términos de m y las dimensiones del sólido.

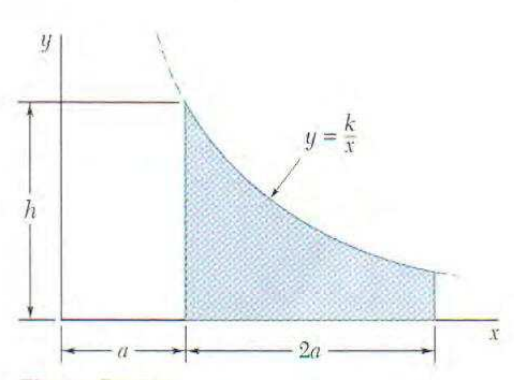


Figura P9.121

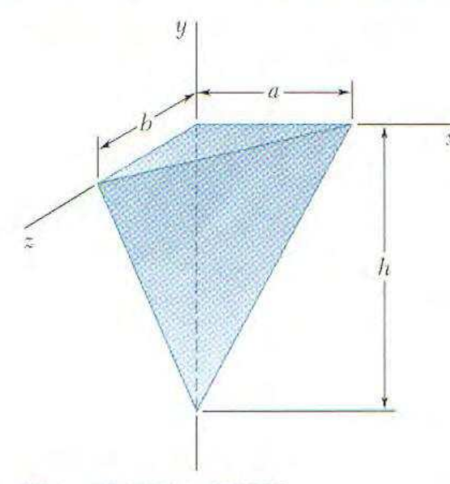


Figura P9.122 y *P9.123*

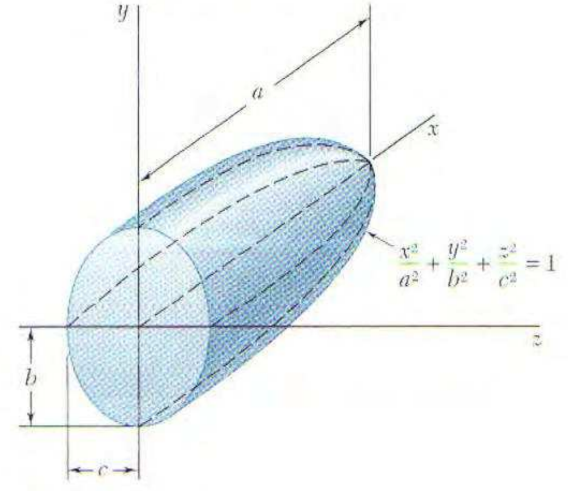


Figura P9.124

9.122 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje x.

9.123 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje y.

***9.124** Suponga que el semielipsoide mostrado en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m. Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje z.

***9.125** Un alambre delgado de acero se dobla en la forma mostrada en la figura. Si se representa con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

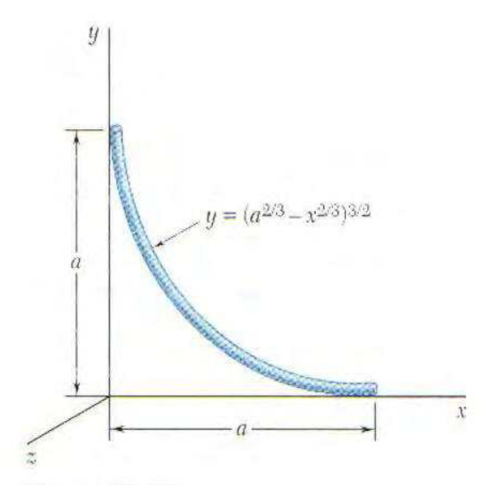


Figura P9.125

9.126 En la figura se muestra una placa delgada con forma triangular y masa m, la cual está soldada a un bloque a lo largo de su base AB. Si se sabe que la placa forma un ángulo θ con el eje y, determine por integración directa el momento de inercia de masa de la placa con respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y y *c*) el eje z.

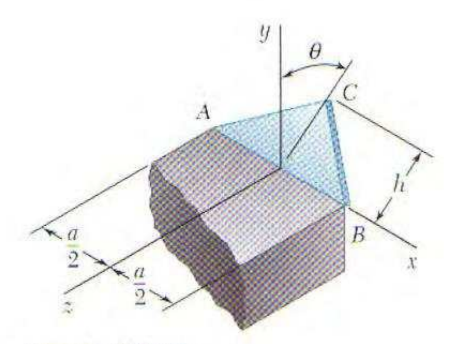


Figura *P9.126*

9.127 En la figura se muestra la sección transversal de una polea moldeada para banda plana. Determine su momento de inercia y el radio de giro de masa con respecto al eje AA'. (Considere que la densidad del latón es 8 650 kg/m^3, y la del policarbonato de fibra reforzada es 1 250 kg/m^3.)

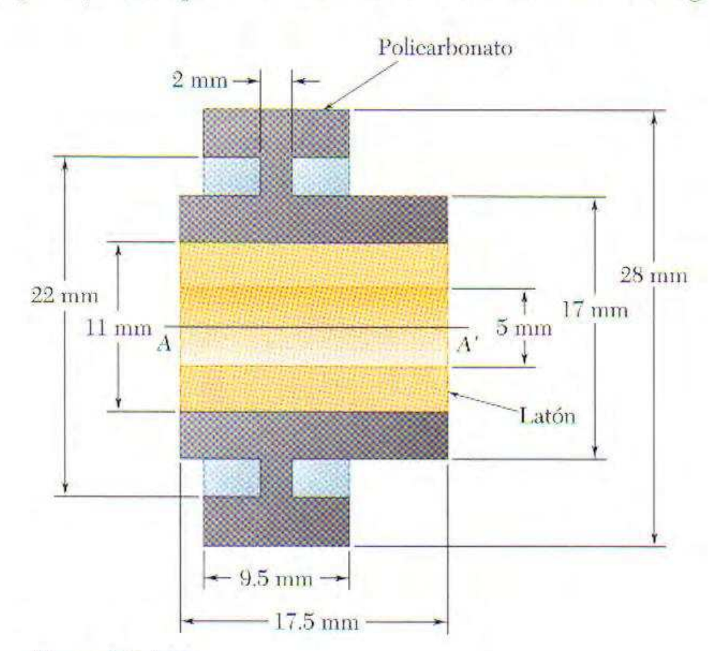


Figura P9.127

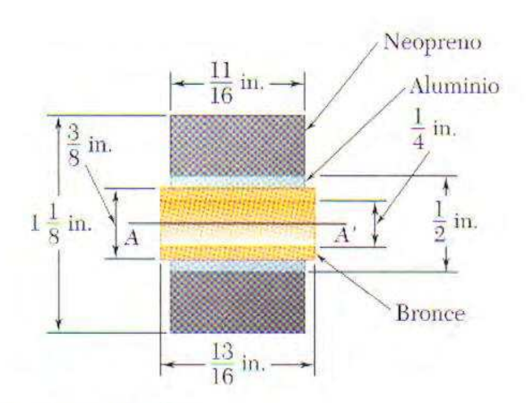


Figura P9.128

9.128 En la figura se muestra la sección transversal de un rodillo móvil. Determine su momento de inercia y su radio de giro de masa con respecto al eje AA'. (El peso específico del bronce es 0.310 lb/in.^{3}, el del aluminio es 0.100 lb/in.^{3} y el del neopreno es 0.0452 lb/in.^{3})

9.129 Si el cascarón cilíndrico delgado que se muestra en la figura tiene una masa m, un grosor t y una altura h, determine su momento de inercia de masa con respecto al eje x. (*Sugerencia*: Considere que el cascarón se formó al remover un cilindro de radio a y altura h de un cilindro de radio $a + t$ y altura h. En las expresiones resultantes, no tome en cuenta los términos que contengan t^2 y t^3, y mantenga los términos que contengan t.)

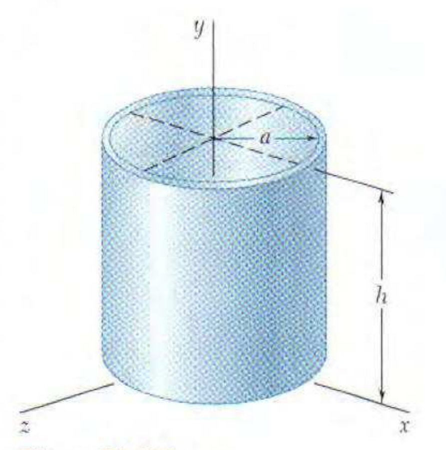


Figura P9.129

9.130 La parte de máquina mostrada en la figura se formó al maquinar una superficie cónica dentro de un cilindro circular. Para $b = \frac{1}{2}h$, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro de la parte de máquina con respecto al eje y.

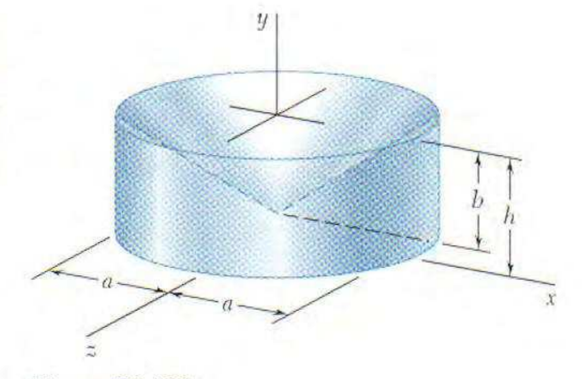


Figura *P9.130*

9.131 Después de un periodo de uso, una de las hojas de una desfibradora se ha desgastado en la forma mostrada en la figura y su masa se ha reducido a 0.18 kg. Si se sabe que los momentos de inercia de la hoja con respecto a los ejes AA' y BB' son, respectivamente, 0.320 g · m^2 y 0.680 g · m^2, determine *a*) la ubicación del eje centroidal GG' y *b*) el radio de giro con respecto al eje GG'.

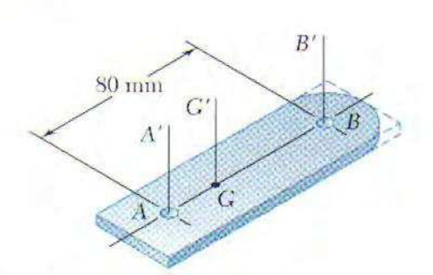


Figura P9.131

9.132 Determine el momento de inercia de masa del componente de máquina de 0.9 lb que se muestra en la figura con respecto al eje AA'.

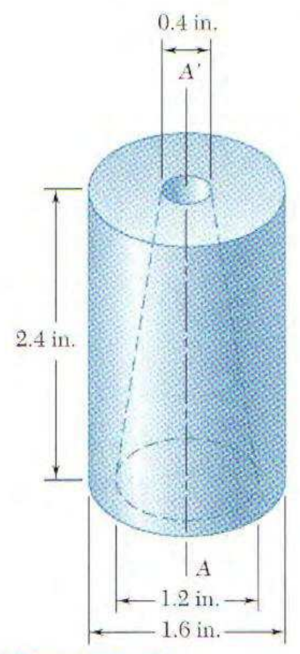


Figura *P9.132*

9.133 En la figura se muestra un agujero cuadrado y centrado, que se extiende a lo largo de un componente de máquina hecho de aluminio. Determine *a*) el valor de a para que el momento de inercia de masa con respecto al eje AA', el cual bisecta la pared superior del agujero, sea máximo y *b*) los valores correspondientes del momento de inercia de masa y del radio de giro con respecto al eje AA'. (El peso específico del aluminio es de 0.100 $lb/in.^3$)

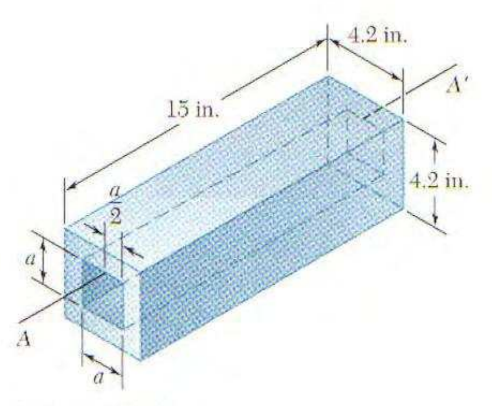


Figura P9.133

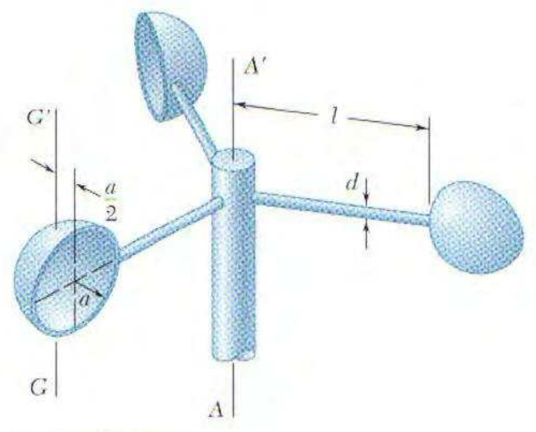


Figura P9.134

9.134 En la figura se muestran las tazas y los brazos de un anemómetro fabricados con un material de densidad ρ. Si se sabe que el momento de inercia de masa de un cascarón semiesférico delgado de masa m y de espesor t con respecto a su eje centroidal GG' es $5ma^2/12$, determine *a*) el momento de inercia de masa del anemómetro con respecto al eje AA' y *b*) la relación de a sobre l para la cual el momento de inercia de masa centroidal de las tazas es igual a 1 por ciento del momento de inercia de masa de las tazas con respecto al eje AA'.

9.135 y 9.136 Una hoja de acero de 2 mm de espesor se cortó y dobló para dar forma al componente de máquina que se muestra en las figuras. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

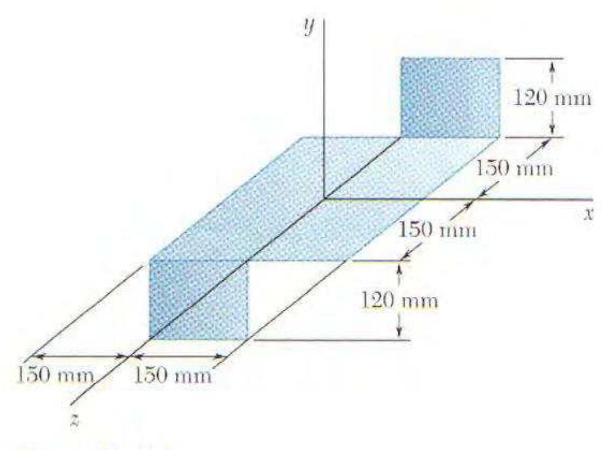


Figura P9.135

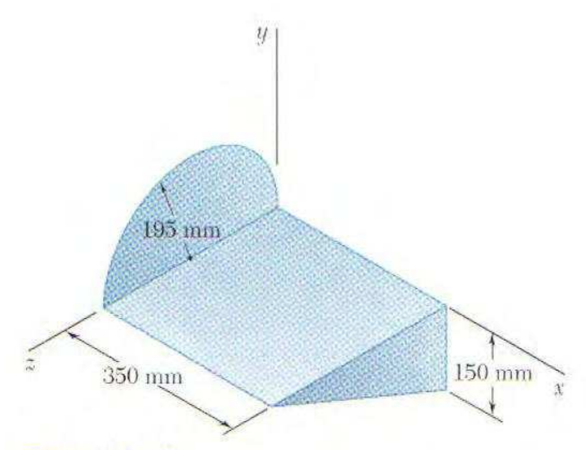


Figura P9.136

9.137 La cubierta para un dispositivo electrónico se formó a partir de una hoja de aluminio con 0.05 in. de espesor. Determine el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in.^{3}.)

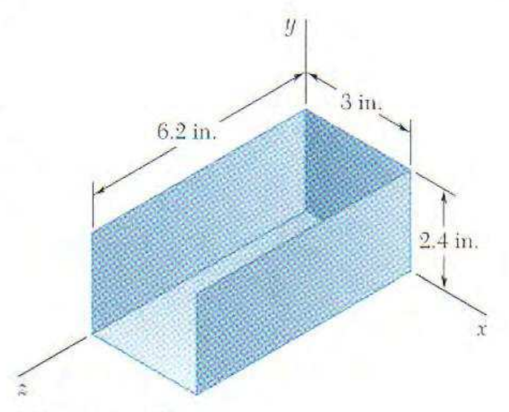


Figura P9.137

9.138 El ancla para estructuras que se muestra en la figura está hecho de acero galvanizado con 0.05 in. de espesor. Determine el momento de inercia de masa del ancla con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (El peso específico del acero galvanizado es de 470 lb/ft^3.)

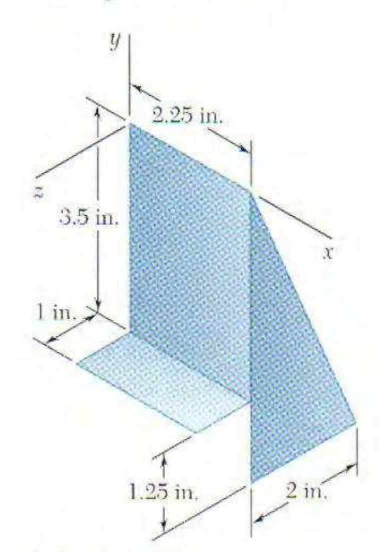


Figura P9.138

9.139 Un subensamble de un avión a escala se fabrica a partir de tres tablas de madera con 1.5 mm de espesor. Si se desprecia la masa del adhesivo utilizado para ensamblar las tres piezas, determine el momento de inercia de masa del subensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (La densidad de la madera es de 780 kg/m^3.)

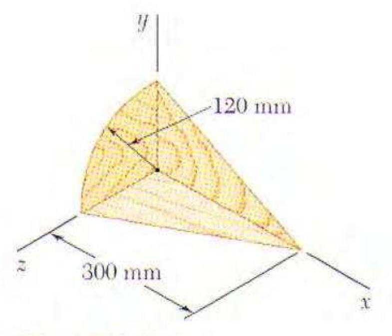


Figura *P9.139*

****9.140*** Un granjero construye un abrevadero al soldar una pieza rectangular de acero laminado de 2 mm de espesor a la mitad de un tonel de acero. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3 y que el espesor de las paredes del tonel es de 1.8 mm, determine el momento de inercia de masa del abrevadero con respecto a cada uno de los ejes coordenados. Desprecie la masa de la soldadura.

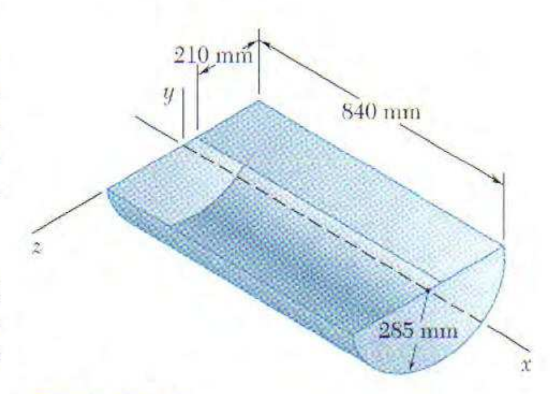


Figura *P9.140*

9.141 El elemento de máquina mostrado en la figura está fabricado de acero. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a *a*) el eje x, *b*) el eje y y *c*) el eje z. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

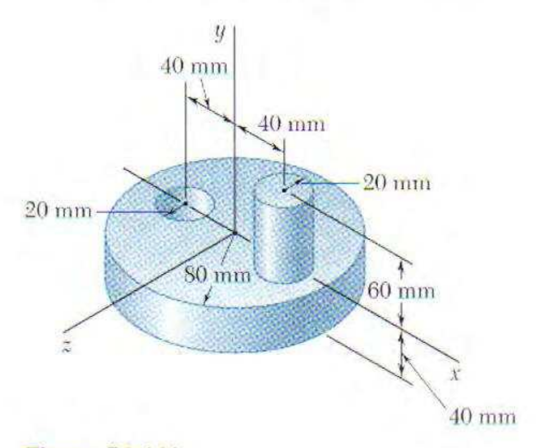


Figura P9.141

9.142 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje y. (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3.)

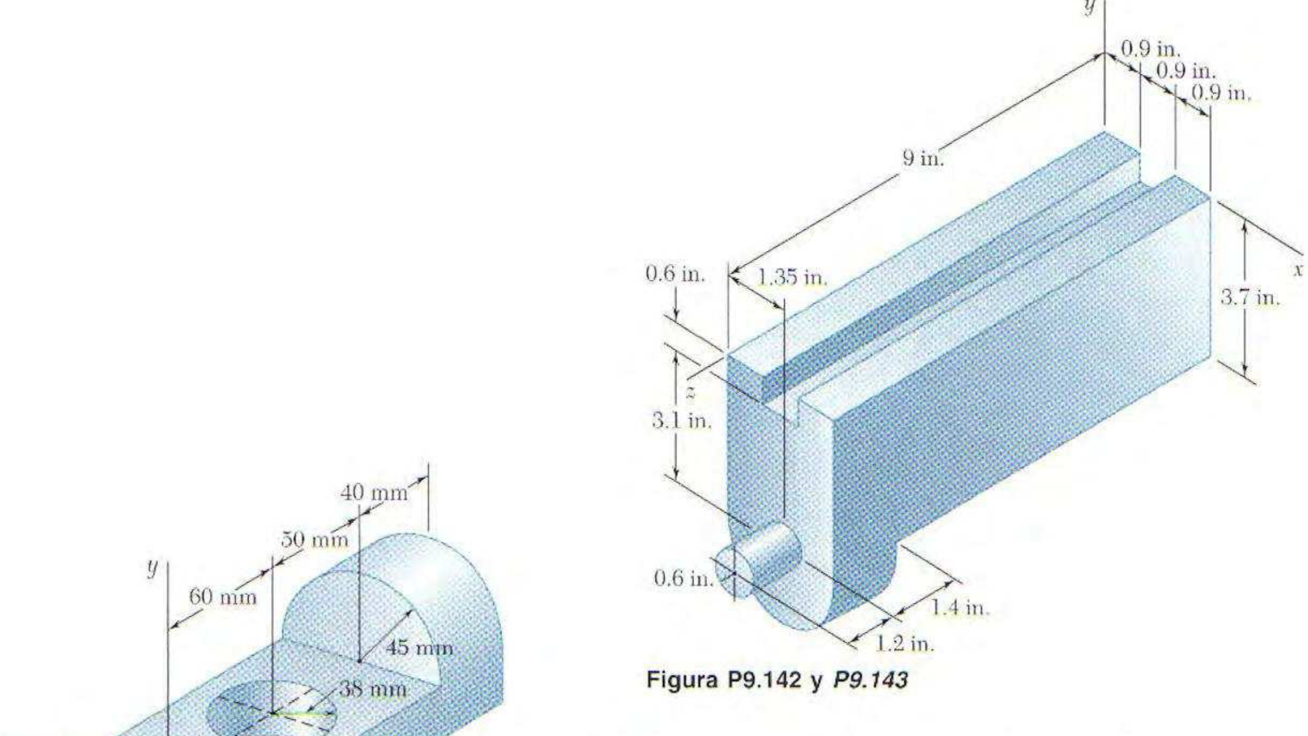


Figura P9.142 y *P9.143*

9.143 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje z. (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3.)

9.144 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje x. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.145 Para el dispositivo de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa con respecto *a*) al eje x, *b*) al eje y y *c*) al eje z. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.146 Un alambre de aluminio con un peso por unidad de longitud de 0.033 lb/ft se utiliza para formar un círculo y los elementos rectos mostrados en la figura. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

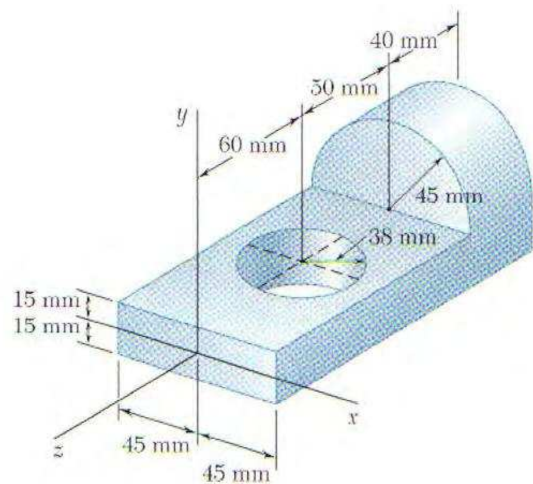


Figura P9.144

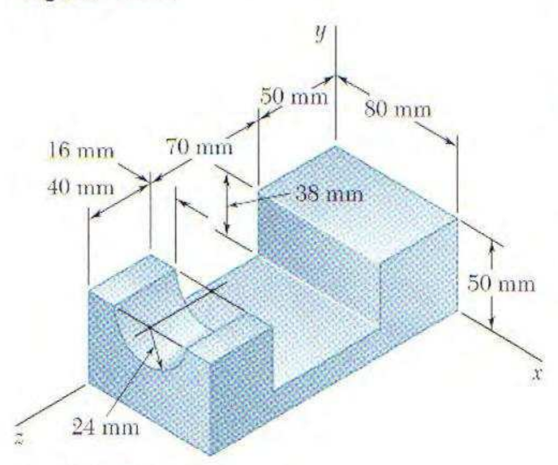


Figura P9.145

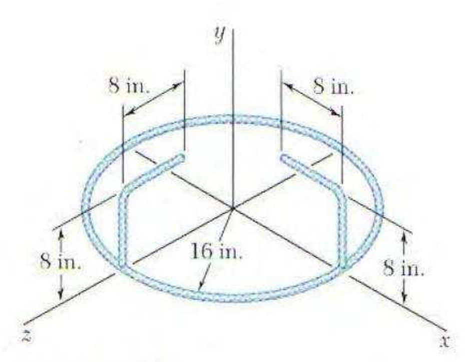


Figura *P9.146*

9.147 El arreglo que se muestra en la figura se formó con alambre de acero de $\frac{1}{8}$ in. de diámetro. Si se sabe que la densidad del acero es de 490 lb/ft^3, determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

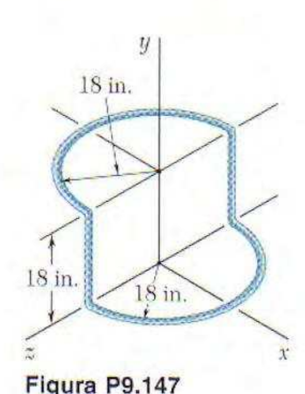


Figura P9.147

9.148 El arreglo que se muestra en la figura se formó con un alambre homogéneo que tiene una masa por unidad de longitud de 0.056 kg/m. Determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

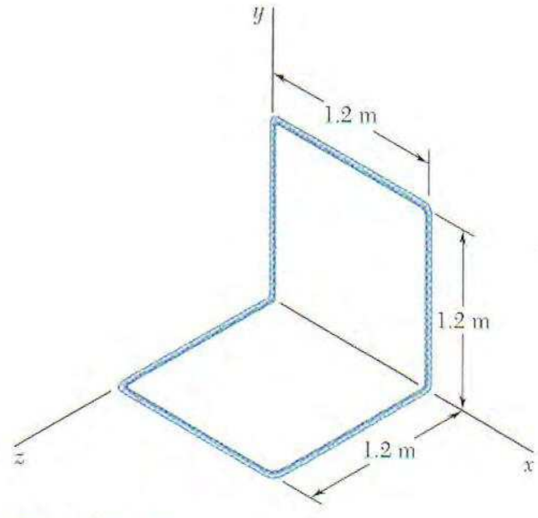


Figura P9.148

*9.16. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN EJE ARBITRARIO QUE PASA POR EL PUNTO *O*. PRODUCTOS DE INERCIA DE MASA

En esta sección se verá cómo puede calcularse el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario OL que pasa por el origen (figura 9.29) si ya se han determinado tanto los momentos de inercia de dicho cuerpo respecto a los tres ejes coordenados como otras cantidades, las cuales se definirán a continuación.

El momento de inercia I_{OL} de x, y y z de $\mathbf{r}$ respecto al eje OL es igual a $\int p^2\,dm$, donde p representa la distancia perpendicular desde el elemento de masa dm hasta el eje OL. Si se representa mediante $\boldsymbol{\lambda}$ al vector unitario localizado a lo largo de OL, y con $\mathbf{r}$ al vector de posición del elemento dm, puede advertirse que la distancia perpendicular p es igual a r sen θ, que es la magnitud del producto vectorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Por tanto, se escribe

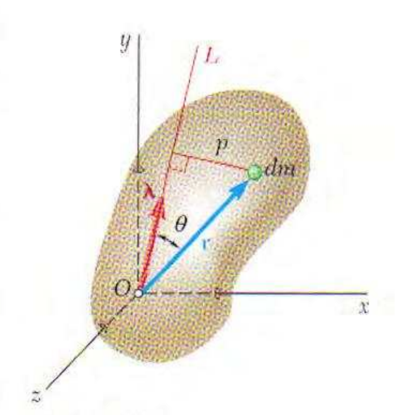


Figura 9.29

$$I_{OL} = \int p^2\,dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2\,dm \tag{9.43}$$

Expresando $|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2$ en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, se tiene que

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2]\,dm$$

donde las componentes λ_x, λ_y y λ_z del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ representan los cosenos directores del eje OL, y las componentes x, y y z de $\mathbf{r}$ representan las coordenadas del elemento de masa dm. Al expandir los términos elevados al cuadrado, y reordenando términos, se escribe

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2)\,dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2)\,dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2)\,dm$$
$$- 2\lambda_x\lambda_y \int xy\,dm - 2\lambda_y\lambda_z \int yz\,dm - 2\lambda_z\lambda_x \int zx\,dm \tag{9.44}$$

En las ecuaciones (9.30) se observa que las primeras integrales en (9.44) representan, respectivamente, los momentos de inercia I_x, I_y e I_z del cuerpo respecto a los ejes coordenados. Las últimas tres integrales en (9.44) involucran productos de las coordenadas, las cuales reciben el nombre de *productos de inercia* del cuerpo con respecto a los ejes x y y, a los ejes y y z y a los ejes z y x, respectivamente. Así se escribe

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{9.45}$$

Si se reescribe la ecuación (9.44) en términos de las integrales definidas en las ecuaciones (9.30) y (9.45), se tiene que

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{9.46}$$

Es necesario señalar que la definición de los productos de inercia de masa proporcionada en las ecuaciones (9.45) es una extensión de la definición del producto de inercia de un área (sección 9.8). Los productos de inercia de masa se reducen a cero bajo las mismas condiciones de simetría que lo hacen los productos de inercia de áreas, y el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa está expresado por relaciones similares a la fórmula derivada para el producto de inercia de un área. Sustituyendo en las ecuaciones (9.45) las expresiones para x, y y z dadas en las ecuaciones (9.45), se encuentra que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \tag{9.47}$$

donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ representan los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' (figura 9.22).

*9.17. ELIPSOIDE DE INERCIA. EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Suponga que se determina el momento de inercia del cuerpo considerado en la sección anterior con respecto a bastantes ejes OL que pasan a través del punto fijo O y que se grafica un punto Q en cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O. El lugar geométrico de los puntos Q obtenidos de esta manera forman una superficie (figura 9.30). La ecuación de dicha superficie se puede obtener sustituyendo $1/(OQ)^2$ en lugar de I_{OL} en la ecuación (9.46) y después multiplicando ambos lados de la ecuación por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ)\lambda_x = x \qquad (OQ)\lambda_y = y \qquad (OQ)\lambda_z = z$$

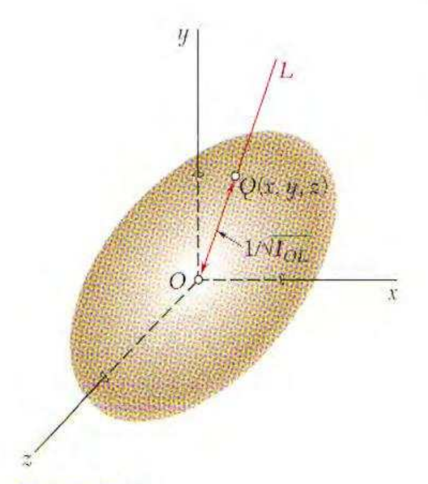


Figura 9.30

donde x, y y z representan las coordenadas rectangulares de Q, se escribe

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \tag{9.48}$$

La ecuación obtenida es de una *superficie cuadrática*. Como el momento de inercia I_{OL} es distinto de cero para cada eje OL, ningún punto Q puede estar a una distancia infinita a partir de O. Por tanto, la superficie cuadrática obtenida es un *elipsoide*. Éste define el momento

de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa a través de O y se conoce como el *elipsoide de inercia* del cuerpo en O.

Se observa que si se rotan los ejes en la figura 9.30, cambian los coeficientes de la ecuación que define al elipsoide, puesto que dichos coeficientes son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes coordenados rotados. Sin embargo, el *elipsoide en sí permanece inalterado* puesto que su forma depende sólo de la distribución de la masa en el cuerpo dado. Suponga que se seleccionan como ejes coordenados a los ejes principales x', y' y z' del elipsoide de inercia (figura 9.31). Se sabe que la ecuación del elipsoide con respecto a dichos ejes coordenados tiene la siguiente forma

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \tag{9.49}$$

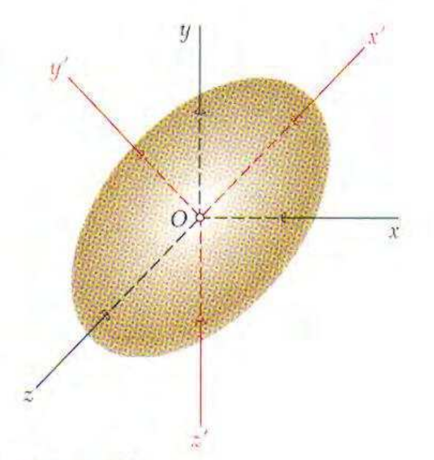


Figura 9.31

la cual no contiene productos de las coordenadas. Comparando las ecuaciones (9.48) y (9.49), se observa que los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x', y' y z' deben ser iguales a cero. Los ejes x', y' y z' se conocen como *los ejes principales de inercia* del cuerpo en O. Obsérvese que, dado un cuerpo con forma arbitraria y un punto O, siempre es posible encontrar ejes que sean principales de inercia del cuerpo en O, esto es, ejes con respecto a los cuales los productos de inercia del cuerpo sean iguales a cero. De hecho, sin importar cuál sea la forma del cuerpo, los momentos y productos de inercia del mismo con respecto a los ejes x, y y z que pasan a través de O definirán un elipsoide y dicho elipsoide tendrá ejes principales que, por definición, son los ejes principales de inercia del cuerpo en O.

Si se utilizan los ejes principales de inercia x', y' y z' como ejes coordenados, la expresión obtenida en la ecuación (9.46) para el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través de O se reduce a

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{9.50}$$

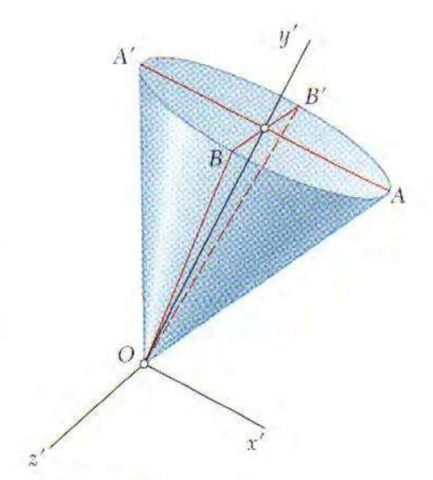


Figura 9.32

La determinación de los ejes principales de inercia de un cuerpo con forma arbitraria es algo complicada y será expuesta en la siguiente sección. Sin embargo, existen muchos casos en los que se pueden identificar dichos ejes de forma inmediata. Por ejemplo, considere el cono homogéneo de base elíptica mostrado en la figura 9.32; dicho cono posee dos planos de simetría mutuamente perpendiculares entre sí OAA' y OBB'. A partir de la definición (9.45), se observa que si se seleccionan los planos $x'y'$ y $y'z'$ de manera que coincidan con los dos planos de simetría, todos los productos de inercia serán iguales a cero. Por tanto, los ejes x', y' y z' seleccionados de esta forma son los ejes principales de inercia del cono O. En el caso del tetraedro regular homogéneo $OABC$ mostrado en la figura 9.33, la línea que une la esquina O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O y cualquier línea a través de O que sea perpendicular a OD también es un eje principal de inercia en O. Esta propiedad resulta evidente si se observa que al rotar al tetraedro a través de 120° alrededor de OD permanecen inalteradas su forma y la distribución de su masa. Se concluye que el elipsoide de inercia en O también permanece inalterado bajo dicha rotación. Por tanto, el elipsoide es un cuerpo de revolución cuyo eje de rotación es OD y la línea OD, al igual que cualquier línea perpendicular a ésta que pasa a través de O, debe ser un eje principal del elipsoide.

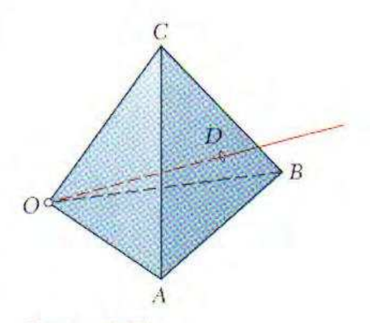


Figura 9.33

*9.18. DETERMINACIÓN DE LOS EJES Y LOS MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE UN CUERPO DE FORMA ARBITRARIA

El método de análisis descrito en esta sección debe utilizarse en casos donde el cuerpo bajo consideración no tenga una propiedad de simetría obvia.

Considere el elipsoide de inercia del cuerpo en un punto dado O (figura 9.34); sea $\mathbf{r}$ el radio vector de un punto P sobre la superficie del elipsoide y sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a la superficie en P. Se observa que los únicos puntos donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{n}$ son colineales son los puntos P_1, P_2 y P_3, donde los ejes principales intersecan la porción visible de la superficie del elipsoide y los puntos correspondientes que están en el otro lado del elipsoide.

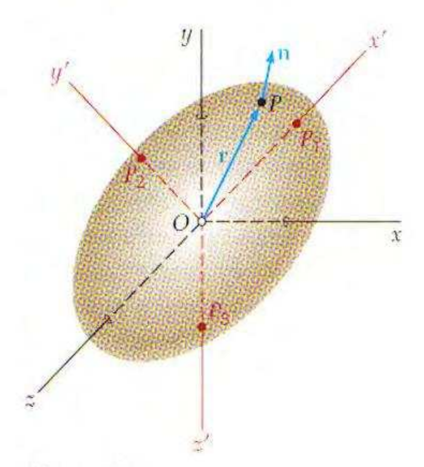


Figura 9.34

Se debe recordar que en el cálculo se establece que la dirección de la normal a la superficie cuya ecuación es $f(x, y, z) = 0$ en un punto $P(x, y, z)$ está definida por el gradiente ∇f de la función f en dicho punto. Por tanto, para obtener los puntos donde los ejes principales intersecan la superficie del elipsoide de inercia, se debe escribir que $\mathbf{r}$ y ∇f son colineales, esto es,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \tag{9.51}$$

donde K es una constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}$$

Recordando la ecuación (9.48), se observa que la función $f(x, y, z)$ correspondiente al elipsoide de inercia es

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a ∇f en la ecuación (9.51) y también los coeficientes de los vectores unitarios, se escribe

$$\begin{aligned} I_x x \quad - I_{xy}y - I_{zx}z &= Kx \\ -I_{xy}x + I_y y \quad - I_{yz}z &= Ky \\ -I_{zx}x - I_{yz}y + I_z z \quad &= Kz \end{aligned} \tag{9.52}$$

Al dividir cada uno de los términos entre la distancia r desde O hasta P, se obtienen ecuaciones similares que involucran los cosenos directores λ_x, λ_y y λ_z:

$$\begin{aligned} I_x\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= K\lambda_x \\ -I_{xy}\lambda_x + I_y\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= K\lambda_y \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + I_z\lambda_z &= K\lambda_z \end{aligned} \tag{9.53}$$

Si se transponen los términos del lado derecho se llega a las siguientes ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} (I_x - K)\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= 0 \\ -I_{xy}\lambda_x + (I_y - K)\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= 0 \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + (I_z - K)\lambda_z &= 0 \end{aligned} \tag{9.54}$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución distinta de $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, su discriminante debe ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \tag{9.55}$$

Al expandir este determinante y cambiar signos, se escribe

$$\begin{aligned} K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K \\ - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \end{aligned} \tag{9.56}$$

Ésta es una ecuación cúbica en K que proporciona tres raíces reales positivas K_1, K_2 y K_3.

Para obtener los cosenos directores del eje principal correspondiente a la raíz K_1, se sustituye K_1 en lugar de K en las ecuaciones (9.54). Puesto que ahora dichas ecuaciones son linealmente dependientes, sólo pueden usarse dos de éstas para determinar a λ_x, λ_y y λ_z. Sin embargo, se puede obtener una ecuación adicional recordando, a partir de la sección 2.12, que los cosenos directores deben satisfacer la relación

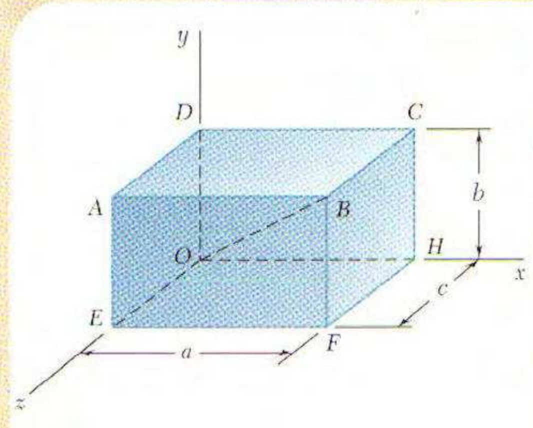
$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \tag{9.57}$$

Si se repite este procedimiento con K_2 y K_3, se obtienen los cosenos directores de los otros dos ejes principales.

Ahora se demostrará que *las raíces K_1, K_2 y K_3 de la ecuación (9.56) son los momentos principales de inercia del cuerpo dado*. Para esto, se sustituye en las ecuaciones (9.53) la raíz K_1 en lugar de K y los valores de los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ en lugar de los valores correspondientes de λ_x, λ_y y λ_z; las tres ecuaciones serán satisfechas. Ahora se multiplica cada término en la primera, la segunda y la tercera ecuación por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$, respectivamente, y se suman las ecuaciones obtenidas así. De esta manera, se escribe

$$\begin{aligned} I_x^2(\lambda_x)_1^2 + I_y^2(\lambda_y)_1^2 + I_z^2(\lambda_z)_1^2 - 2I_{xy}(\lambda_x)_1(\lambda_y)_1 \\ - 2I_{yz}(\lambda_y)_1(\lambda_z)_1 - 2I_{zx}(\lambda_z)_1(\lambda_x)_1 = K_1[(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2] \end{aligned}$$

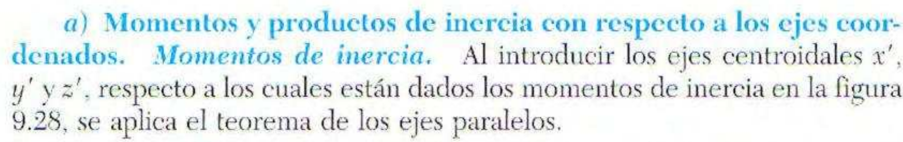
Si se recuerda la ecuación (9.46), se observa que el lado izquierdo de esta ecuación representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje principal de inercia correspondiente a K_1; por tanto, dicho valor es el momento principal de inercia correspondiente a esa raíz. Por otra parte, recordando la ecuación (9.57), se observa que el lado derecho se reduce a K_1. Por tanto, el propio K_1 es el momento principal de inercia. De la misma forma, se puede demostrar que K_2 y K_3 son los otros dos momentos principales de inercia del cuerpo.



PROBLEMA RESUELTO 9.14

Considere un prisma rectangular de masa m y lados a, b y c. Determine: a) los momentos y productos de inercia del prisma con respecto a los ejes coordenados mostrados y b) el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a la diagonal OB.

SOLUCIÓN



a) Momentos y productos de inercia con respecto a los ejes coordenados. ***Momentos de inercia.*** Al introducir los ejes centroidales x', y' y z', respecto a los cuales están dados los momentos de inercia en la figura 9.28, se aplica el teorema de los ejes paralelos.

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad ◀$$

En forma similar, $\quad I_y = \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2) \quad I_z = \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)$ ◀

Productos de inercia. Debido a la simetría, los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' son iguales a cero y dichos ejes son ejes principales de inercia. Utilizando el teorema de los ejes paralelos, se tiene que

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{1}{2}b) \qquad I_{xy} = \tfrac{1}{4}mab \quad ◀$$

En forma similar, $\quad I_{yz} = \tfrac{1}{4}mbc \quad I_{zx} = \tfrac{1}{4}mca$ ◀



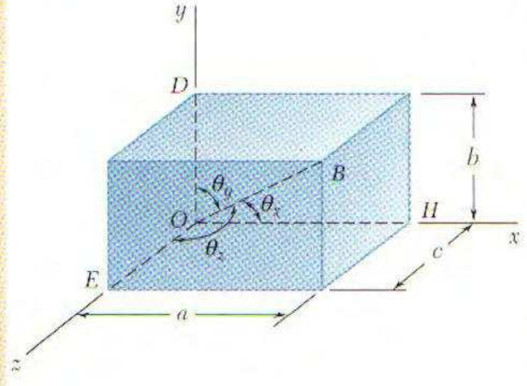
b) Momento de inercia con respecto a OB. Recordando la ecuación (9.46), se tiene que:

$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

donde los cosenos directores de OB son

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

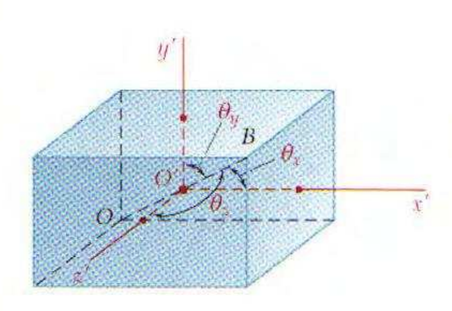
$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$



Si se sustituyen los valores obtenidos para los momentos y productos de inercia y para los cosenos directores en la ecuación para I_{OB}, se tiene que

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}[\tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \tfrac{1}{2}ma^2b^2 - \tfrac{1}{2}mb^2c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2a^2]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$



Solución alterna. El momento de inercia I_{OB} puede obtenerse directamente a partir de los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$, puesto que la línea OB pasa a través del centroide O'. Como los ejes x', y' y z' son ejes principales de inercia, se utiliza la ecuación (9.50) y se escribe

$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$

PROBLEMA RESUELTO 9.15

Si para el prisma rectangular del problema resuelto 9.14 se tiene que $a = 3c$ y $b = 2c$, determine: *a*) los momentos principales de inercia en el origen O y *b*) los ejes principales de inercia en O.

SOLUCIÓN

***a*) Momentos principales de inercia en el origen *O*.** Si se sustituyen $a = 3c$ y $b = 2c$ en la solución del problema resuelto 9.14, se tiene lo siguiente

$$I_x = \tfrac{5}{3}mc^2 \qquad I_y = \tfrac{10}{3}mc^2 \qquad I_z = \tfrac{13}{3}mc^2$$
$$I_{xy} = \tfrac{3}{2}mc^2 \qquad I_{yz} = \tfrac{1}{2}mc^2 \qquad I_{zx} = \tfrac{3}{4}mc^2$$

Sustituyendo los valores de los momentos y productos de inercia en la ecuación (9.56) y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$K^3 - (\tfrac{28}{3}mc^2)K^2 + (\tfrac{3\,479}{144}m^2c^4)K - \tfrac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Entonces se resuelve para las raíces de esta ecuación; a partir de la exposición de la sección 9.18, se concluye que dichas raíces son los momentos principales de inercia del cuerpo en el origen.

$$K_1 = 0.568867mc^2 \qquad K_2 = 4.20885mc^2 \qquad K_3 = 4.55562mc^2$$
$$K_1 = 0.569mc^2 \qquad K_2 = 4.21mc^2 \qquad K_3 = 4.56mc^2 \quad ◀$$

***b*) Ejes principales de inercia en *O*.** Para determinar la dirección de un eje principal de inercia, primero se sustituye el valor correspondiente de K en dos de las ecuaciones (9.54); las ecuaciones resultantes junto con la ecuación (9.57) forman un sistema de tres ecuaciones a partir del cual se pueden determinar los cosenos directores del eje principal correspondiente. Por tanto, para el primer momento principal de inercia K_1 se tiene lo siguiente:

$$(\tfrac{5}{3} - 0.568867)mc^2(\lambda_x)_1 - \tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$-\tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + (\tfrac{10}{3} - 0.568867)mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 = 1$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene

$$(\lambda_x)_1 = 0.836600 \qquad (\lambda_y)_1 = 0.496001 \qquad (\lambda_z)_1 = 0.232557$$

Entonces, los ángulos que forma el primer eje principal de inercia con los ejes coordenados son

$$(\theta_x)_1 = 33.2° \qquad (\theta_y)_1 = 60.3° \qquad (\theta_z)_1 = 76.6° \quad ◀$$

Si se utiliza sucesivamente el mismo conjunto de ecuaciones con K_2 y K_3, se encuentra que los ángulos asociados con el segundo y con el tercer momento principal de inercia en el origen son, respectivamente,

$$(\theta_x)_2 = 57.8° \qquad (\theta_y)_2 = 146.6° \qquad (\theta_z)_2 = 98.0° \quad ◀$$

y

$$(\theta_x)_3 = 82.8° \qquad (\theta_y)_3 = 76.1° \qquad (\theta_z)_3 = 164.3° \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definieron los *productos inercia de masa de un cuerpo* I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} y se mostró cómo se determinan los momentos de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través del origen O. También se aprendió cómo determinar en el origen O los *ejes principales de inercia* de un cuerpo y los correspondientes *momentos principales de inercia.*

1. *Determinación de los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto.* Los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto con respecto a los ejes coordenados pueden expresarse como la suma de los productos de inercia de las partes que constituyen dicho cuerpo con respecto a esos mismos ejes. Para cada una de las partes que constituyen al cuerpo, se puede utilizar el teorema de los ejes paralelos y escribir las ecuaciones (9.47)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \qquad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \qquad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x}$$

donde las primas representan los ejes centroidales de cada una de las partes componentes y donde $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ representan las coordenadas de sus centros de gravedad. Se debe recordar que los productos de inercia de masa pueden ser positivos, negativos o cero. Además, se debe estar seguro de tomar en cuenta los signos de $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$.

a) Con base en las propiedades de simetría de una parte componente, se puede deducir que dos o los tres productos de inercia de masa centroidales de dicha parte son iguales a cero. Por ejemplo, se puede verificar que para una placa delgada paralela al plano xy; para un alambre que se encuentra en un plano paralelo al plano xy; para un cuerpo con un plano de simetría paralelo al plano xy, y para un cuerpo con un eje de simetría paralelo al eje z, los *productos de inercia* $\bar{I}_{y'z'}$ *e* $\bar{I}_{z'x'}$ *son iguales a cero.*

Para placas rectangulares, circulares o semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados; para alambres rectos paralelos a un eje coordenado; para alambres circulares y semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, y para prismas rectangulares con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados, *todos los productos de inercia* $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ *e* $\bar{I}_{z'x'}$ *son iguales a cero.*

b) Los productos de inercia de masa que son distintos a cero se pueden calcular a partir de las ecuaciones (9.45). Aun cuando, en general, se requiere de triple integración para determinar un producto de inercia de masa, se puede utilizar una sola integración si el cuerpo dado puede dividirse en una serie de placas delgadas paralelas. Entonces, los cálculos son similares a los expuestos en la lección anterior para los momentos de inercia.

(continúa)

2. *Cálculo del momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario OL.* En la sección 9.16 se derivó una expresión para el momento de inercia I_{OL}, la cual está dada en la ecuación (9.46). Antes de calcular I_{OL}, primero se deben determinar los momentos y productos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los ejes coordenados dados, así como los cosenos directores del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL.

3. *Cálculo de los momentos principales de inercia de un cuerpo y determinación de sus ejes principales de inercia.* En la sección 9.17 se vio que siempre es posible encontrar una orientación de los ejes coordenados para la cual los productos de inercia de masa son iguales a cero. Dichos ejes se conocen como los *ejes principales de inercia* y los momentos de inercia correspondientes se conocen como los *momentos principales de inercia* del cuerpo. En muchos casos, los ejes principales de inercia de un cuerpo pueden determinarse a partir de sus propiedades de simetría. El procedimiento requerido para determinar los momentos principales y los ejes principales de inercia de un cuerpo que no tiene propiedades de simetría obvias, se presentó en la sección 9.18 y se ilustró en el problema resuelto 9.15. Dicho procedimiento consta de los siguientes pasos.

a) Expandir el determinante en la ecuación (9.55) y resolver la ecuación cúbica resultante. La solución puede obtenerse por prueba y error o, de preferencia, con una calculadora científica avanzada o con un programa computacional apropiado para tal fin. Las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo.

b) Para determinar la dirección del eje principal correspondiente a K_1, se sustituye ese valor en lugar de K en dos de las ecuaciones (9.54) y se resuelven dichas ecuaciones con la ecuación (9.57) para encontrar los cosenos directores del eje principal correspondiente a K_1.

c) Repetir este procedimiento con K_2 y K_3 para determinar las direcciones de los otros dos ejes principales. Como una comprobación de los cálculos realizados, se puede verificar que el producto escalar de algunos de los dos vectores unitarios que vaya a lo largo de los tres ejes que se obtuvieron sea igual a cero y que, por tanto, dichos ejes sean perpendiculares entre sí.

Problemas

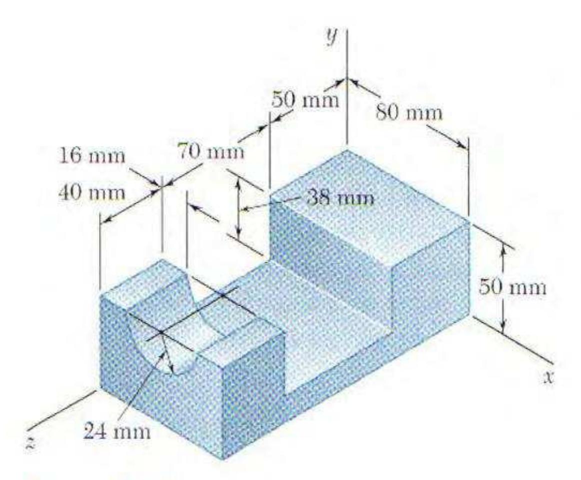


Figura P9.149

9.149 Para el dispositivo de acero que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

9.150 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

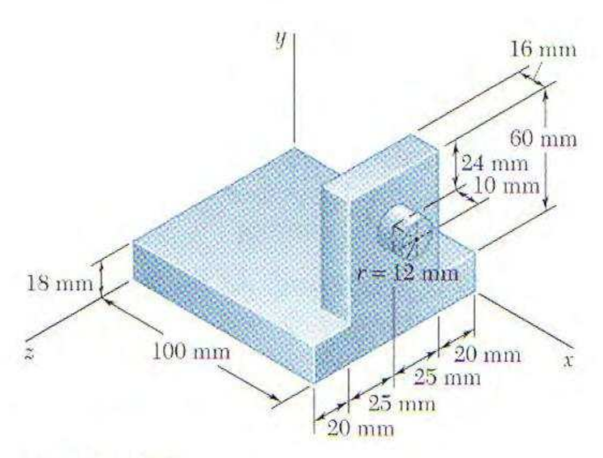


Figura P9.150

9.151 y 9.152 Para el componente de máquina hecho de aluminio colado que se muestra en las figuras, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}. (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in.^{3})

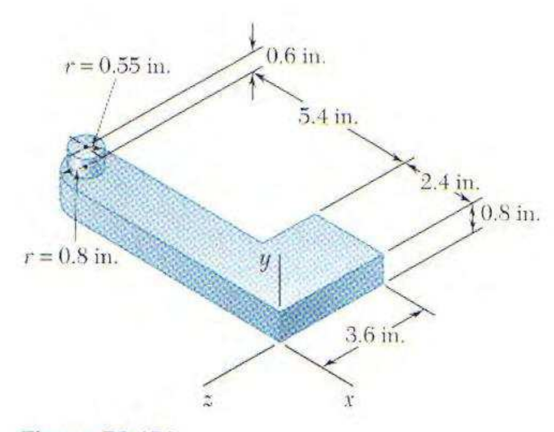


Figura P9.151

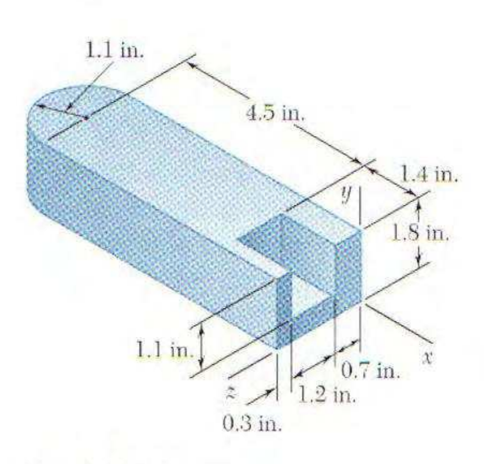


Figura P9.152

9.153 a 9.156 Una sección de hoja de acero con 2 mm de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Si la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} del componente.

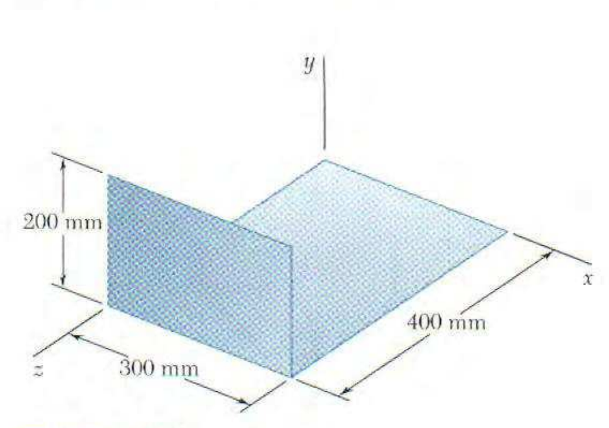


Figura P9.153

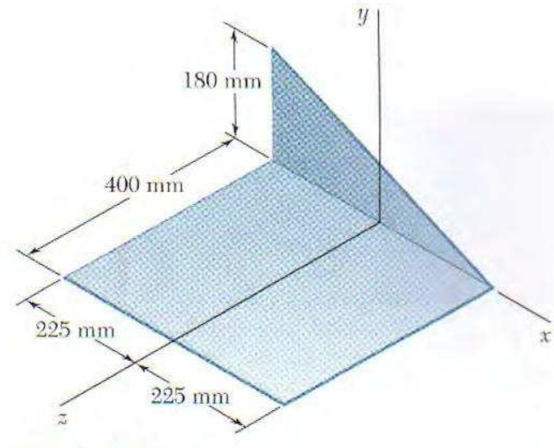


Figura P9.154

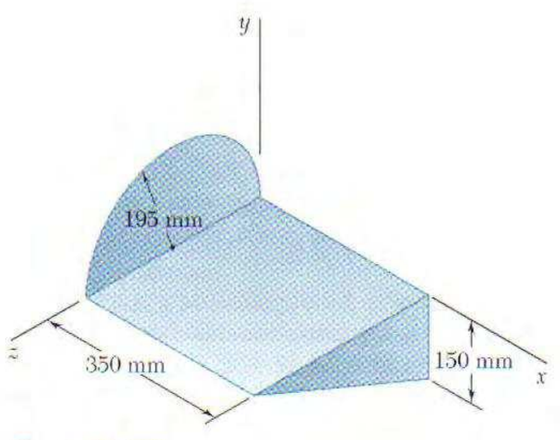


Figura P9.155

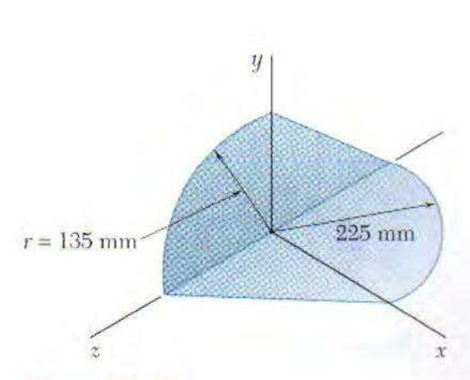


Figura P9.156

9.157 y 9.158 El arreglo mostrado en las figuras se formó con alambre de latón que tiene un peso por unidad de longitud w, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

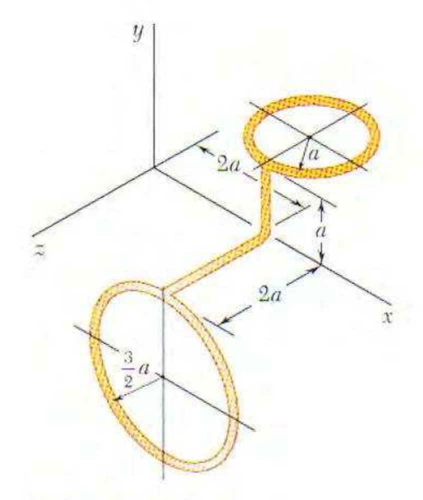


Figura P9.157

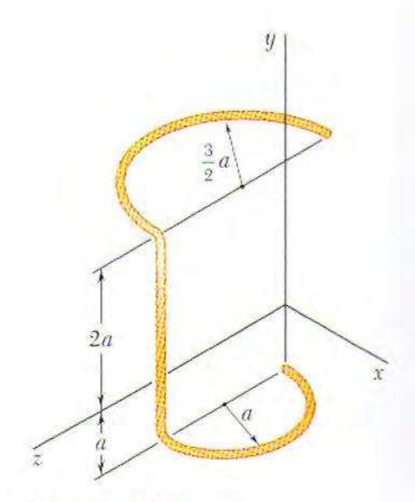


Figura P9.158

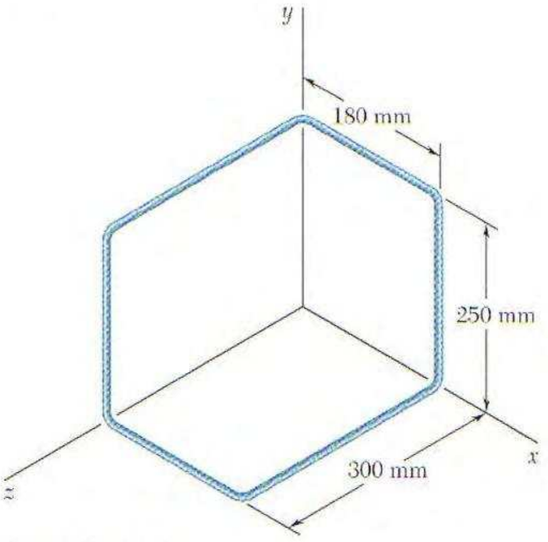


Figura P9.159

9.159 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre de aluminio de 1.5 mm de diámetro. Si la densidad del aluminio es de 2 800 kg/m^3, determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

9.160 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre delgado de aluminio de diámetro uniforme. Si la masa por unidad de longitud del alambre se denota con m', determine los productos de inercia de masa I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

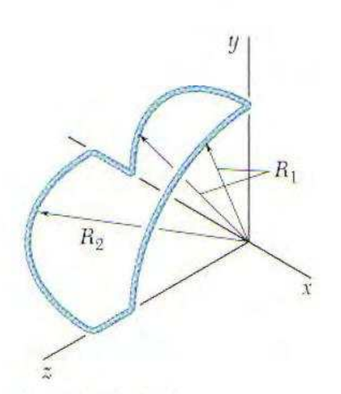


Figura P9.160

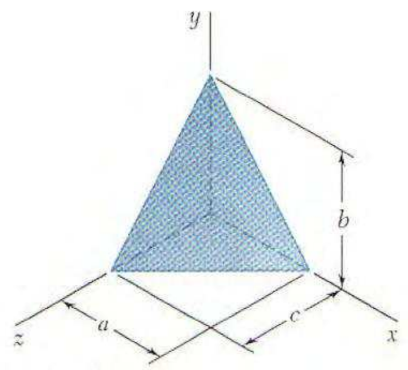


Figura P9.162

9.161 Complete la obtención de las ecuaciones (9.47) que expresan el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masas.

9.162 Para el tetraedro homogéneo de masa m que se muestra en la figura, *a*) determine por integración directa el producto de inercia de masa I_{zx} y *b*) con base en el resultado del inciso *a*) deduzca I_{yz} e I_{xy}.

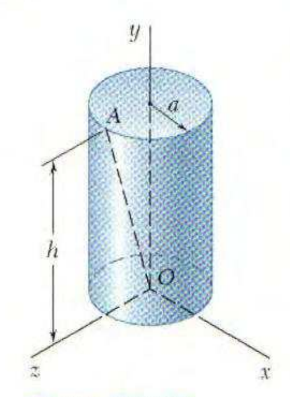


Figura *P9.163*

9.163 En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m. Determine el momento de inercia de masa del cilindro con respecto a la línea que une al origen O y al punto A que se encuentra localizado sobre el perímetro de la superficie superior del cilindro.

9.164 En la figura se muestra un cono circular homogéneo de masa m. Determine el momento de inercia de masa del cono con respecto a la línea que une al origen O con el punto A.

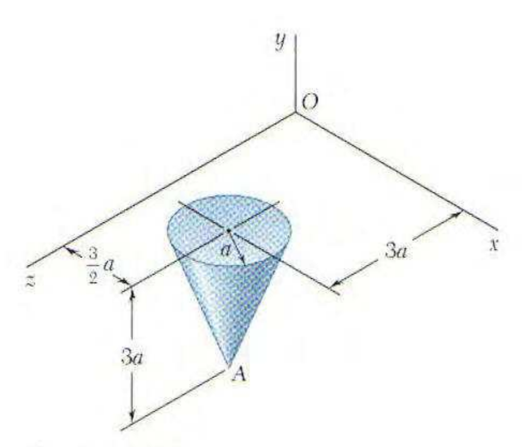


Figura *P9.164*

9.165 Para el elemento de máquina del problema 9.141 que se muestra en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A.

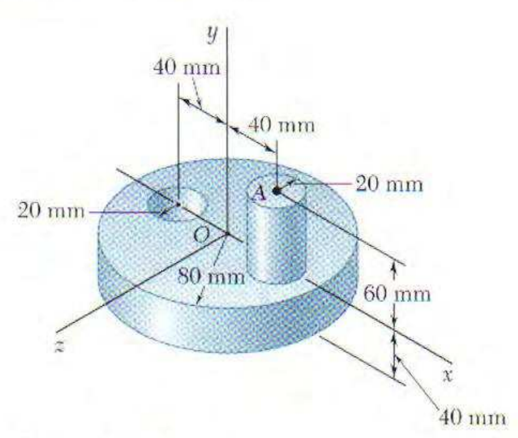


Figura P9.165

9.166 Determine el momento de inercia de masa del dispositivo de acero de los problemas 9.145 y 9.149 con respecto a un eje que pasa por el origen y que forma ángulos iguales con los ejes x, y y z.

9.167 Una placa delgada con densidad uniforme y peso W está doblada en la forma que se muestra en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A.

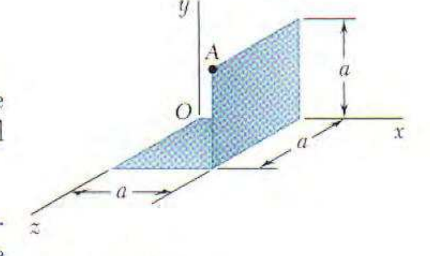


Figura P9.167

9.168 Una pieza de hoja de metal con espesor t y peso específico γ se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a una línea que une al origen O y al punto A.

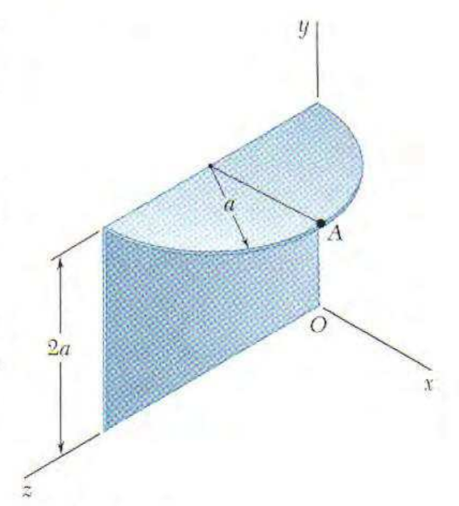


Figura P9.168

9.169 Para los componentes de máquina de los problemas 9.136 y 9.155, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

9.170 a 9.172 Para el arreglo de alambre del problema indicado, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

9.170 Problema 9.148.
9.171 Problema 9.147.
9.172 Problema 9.146.

9.173 Para el prisma rectangular mostrado en la figura, determine los valores de las relaciones b/a y c/a tales que el elipsoide de inercia del prisma se transforme en una esfera cuando se calcule en *a*) el punto A y *b*) el punto B.

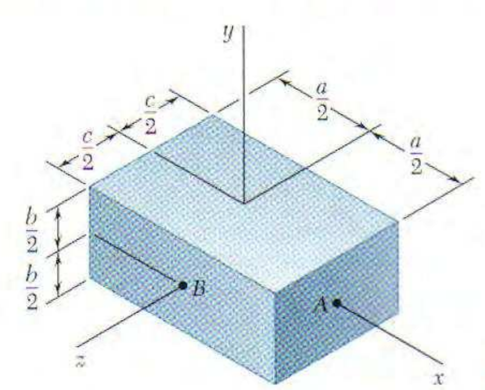


Figura P9.173

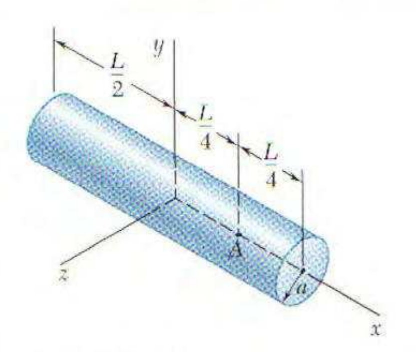


Figura P9.175

9.174 Para el cono circular recto del problema resuelto 9.11, determine el valor de la relación a/h tal que el elipsoide de inercia del cono se transforme en una esfera cuando se calcule en *a*) el ápice del cono y *b*) el centro de la base del cono.

9.175 Para el cilindro circular homogéneo de radio a y longitud L que se muestra en la figura, determine el valor de la relación a/L tal que el elipsoide de inercia del cilindro se transforme en una esfera cuando la inercia se calcule en *a*) el centroide del cilindro y *b*) el punto A.

9.176 Dados un cuerpo arbitrario y tres ejes rectangulares x, y y z, demuestre que el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a cualquiera de los tres ejes no puede ser mayor que la suma de los momentos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los otros dos ejes. Esto es, demuestre que se cumple la desigualdad $I_x \leq I_y + I_z$ así como las otras desigualdades. Además, demuestre que si el cuerpo es un sólido homogéneo de revolución entonces $I_y \geq \frac{1}{2} I_x$, donde x es el eje de revolución y y es el eje transversal.

9.177 Considere un cubo de masa m y lados de longitud a. *a*) Demuestre que el elipsoide de inercia en el centro del cubo es una esfera y utilice esta propiedad para determinar el momento de inercia del cubo con respecto a una de sus diagonales. *b*) Demuestre que el elipsoide de inercia en una de las esquinas del cubo es un elipsoide de revolución y determine los momentos principales de inercia del cubo en dicho punto.

9.178 Dados un cuerpo homogéneo de masa m y de forma arbitraria, así como los tres ejes rectangulares x, y y z con origen en O, demuestre que la suma de los momentos de inercia de masa $I_x + I_y + I_z$ del cuerpo no puede ser menor que la suma de los momentos de inercia de una esfera del mismo material y masa m con centro en O. Además, con el resultado del problema 9.176, demuestre que si el cuerpo es un sólido de revolución, donde x es el eje de revolución, su momento de inercia de masa I_y alrededor del eje transversal y no puede ser menor que $3ma^2/10$, donde a es el radio de una esfera con la misma masa y del mismo material.

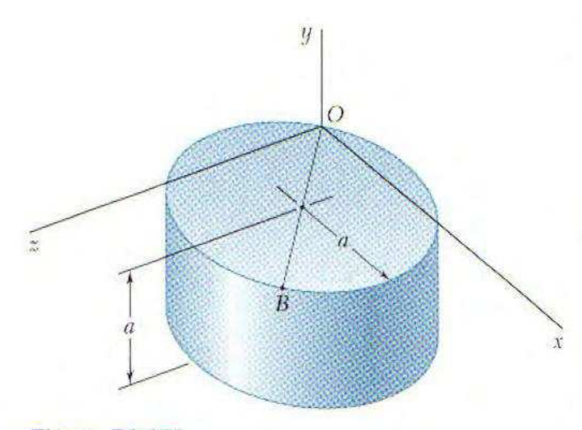


Figura P9.179

***9.179** En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m. El diámetro OB de la cara superior forma un ángulo de 45° con los ejes x y z. *a*) Determine los principales momentos de inercia de masa del cilindro en el origen O. *b*) Calcule los ángulos que los ejes principales de inercia en O forman con los tres ejes coordenados. *c*) Trace el cilindro y muestre la orientación que tienen sus ejes principales de inercia con respecto a los ejes x, y y z.

9.180 a 9.184 Para el componente que se describe en el problema indicado, determine *a*) los momentos principales de inercia de masa en el origen y *b*) los ejes principales de inercia en el origen. Dibuje el cuerpo y muestre la orientación que sus ejes principales de inercia tienen con respecto a los ejes x, y y z.

***9.180** Problema 9.165.
****9.181*** Problemas 9.145 y 9.149.
***9.182** Problema 9.167.
***9.183** Problema 9.168.
****9.184*** Problemas 9.148 y 9.170.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 9

En la primera mitad de este capítulo se expuso la determinación de la resultante **R** de las fuerzas $\Delta\mathbf{F}$ distribuidas sobre un área plana A cuando las magnitudes de dichas fuerzas son proporcionales, tanto a las áreas ΔA de los elementos sobre las cuales actúan, como a las distancias y desde dichos elementos hasta un eje dado x; por consiguiente, se tiene $\Delta F = ky\,\Delta A$. Se encontró que la magnitud de la resultante **R** es proporcional al primer momento $Q_x = \int y\,dA$ del área A, mientras que el momento de **R** con respecto al eje x es proporcional al *segundo momento* o *momento de inercia*, $I_x = \int y^2\,dA$ de A con respecto al mismo eje [sección 9.2].

Momentos rectangulares de inercia

Los *momentos rectangulares de inercia* I_x *e* I_y *de un área* [sección 9.3] se obtuvieron al evaluar las integrales

$$I_x = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int x^2\,dA \tag{9.1}$$

Estos cálculos se pueden reducir a una sola integración seleccionando dA como una tira delgada paralela a uno de los ejes coordenados. También se debe recordar que es posible calcular I_x e I_y a partir de la misma tira elemental (figura 9.35) utilizando la fórmula para el momento de inercia de un área rectangular [problema resuelto 9.3].

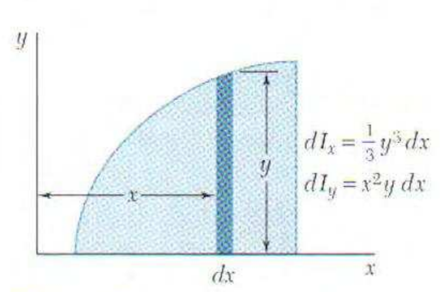


Figura 9.35

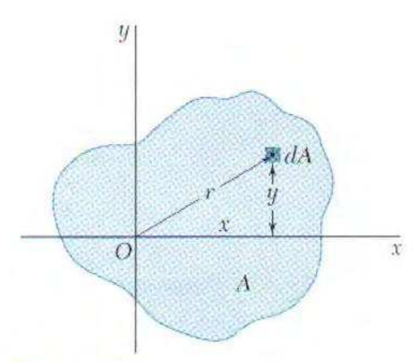


Figura 9.36

Momento polar de inercia

El *momento polar de inercia de un área* A con respecto al polo O [sección 9.4] se definió como

$$J_O = \int r^2\,dA \tag{9.3}$$

donde r es la distancia que hay desde O hasta el elemento de área dA (figura 9.36). Observe que $r^2 = x^2 + y^2$ estableció la relación

$$J_O = I_x + I_y \tag{9.4}$$

Radio de giro

El *radio de giro de un área* A con respecto al eje x [sección 9.5] se definió como la distancia k_x, donde $I_x = k_x^2 A$. Con definiciones similares como los radios de giro de A con respecto al eje y y con respecto a O, se obtuvo

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \qquad (9.5\text{-}9.7)$$

Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.6 se presentó el *teorema de los ejes paralelos*, el cual establece que el momento de inercia I de un área con respecto a un eje dado AA' (figura 9.37) es igual al momento de inercia $\bar{I}$ del área con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo AA' *más* el producto del área A y el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \qquad (9.9)$$

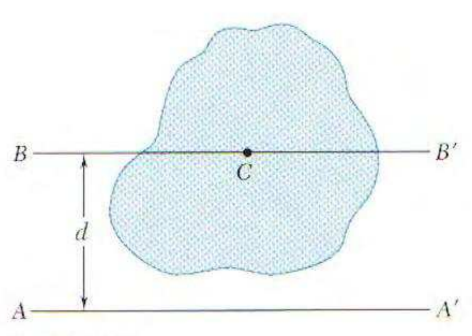


Figura 9.37

La fórmula anterior también puede utilizarse para determinar el momento de inercia $\bar{I}$ de un área con respecto a un eje centroidal BB' cuando se conoce su momento de inercia I con respecto de un eje paralelo AA'. Sin embargo, en este caso se debe *restar* el producto Ad^2 del momento de inercia I conocido.

Una relación similar se cumple entre el momento polar de inercia J_O de un área con respecto a un punto O y el momento polar de inercia $\bar{J}_C$ de la misma área con respecto a su centroide C. Representando con d la distancia entre O y C, se tiene

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad (9.11)$$

Áreas compuestas

El teorema de los ejes paralelos se puede utilizar en forma efectiva para calcular el *momento de inercia de un área compuesta* con respecto a un eje dado [sección 9.7]. Considerando cada área componente por separado, primero se calcula el momento de inercia de cada área con respecto a su eje centroidal, con la información proporcionada en las figuras 9.12 y 9.13 cuando sea posible. Entonces se aplica el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de cada una de las áreas componentes con respecto al eje deseado y se suman los valores obtenidos de esta forma [problemas resueltos 9.4 y 9.5].

Producto de inercia

Las secciones 9.8 a la 9.10 estuvieron dedicadas a la transformación de los momentos de inercia de un área *mediante una rotación de ejes coordenados*. En primer lugar, se definió el *producto de inercia de un área* A como

$$I_{xy} = \int xy\, dA \qquad (9.12)$$

y se demostró que $I_{xy} = 0$ si el área A es simétrica con respecto a uno de ambos ejes coordenados. También se derivó el *teorema de los ejes paralelos para productos de inercia*. Se obtuvo

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \qquad (9.13)$$

donde $\bar{I}_{x'y'}$ es el producto de inercia del área con respecto a los ejes centroidales x' y y' que son paralelos a los ejes x y y, respectivamente, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las coordenadas del centroide del área [sección 9.8].

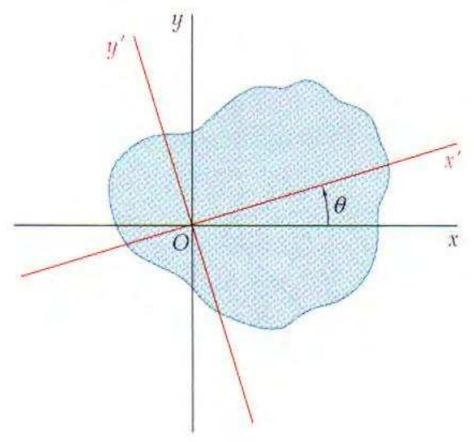


Figura 9.38

Rotación de ejes

En la sección 9.9 se determinaron los momentos y el producto de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de un área con respecto a los ejes x' y y' que fueron obtenidos rotando los ejes coordenados x y y originales a través de un ángulo θ en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 9.38). Se expresó $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ en términos de los momentos y el producto de inercia I_x, I_y e I_{xy} calculados con respecto a los ejes x y y originales. Se obtuvo que

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (9.19)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

Ejes principales

Los *ejes principales del área con respecto a O* se definieron como los dos ejes perpendiculares entre sí respecto a los cuales los momentos de inercia de un área son máximo y mínimo. Los valores correspondientes de θ, representados por θ_m, se obtuvieron a partir de la fórmula

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

Momentos principales de inercia

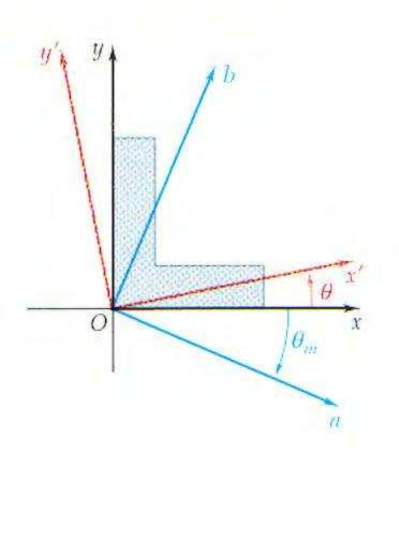
Los valores máximo y mínimo correspondientes de I son llamados los *momentos principales de inercia* del área con respecto a O; se obtuvo

$$I_{\text{máx,mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.27)$$

También se señaló que el valor correspondiente del producto de inercia es cero.

Círculo de Mohr

La transformación de los momentos y el producto de inercia del área bajo rotación de ejes puede representarse con gráficas al dibujar el *círculo de Mohr* [sección 9.10]. Dados los momentos y el producto de inercia I_x, I_y e I_{xy} del área con respecto a los ejes



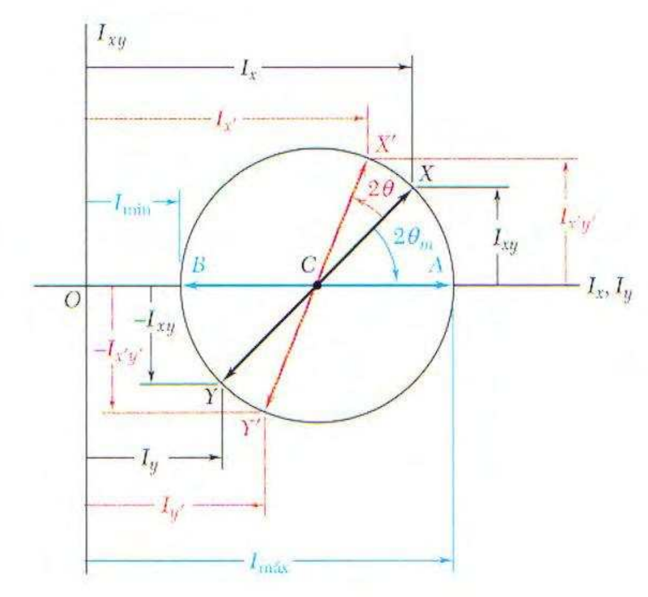


Figura 9.39

coordenados x y y se grafican los puntos X (I_x, I_{xy}) y Y $(I_y, -I_{xy})$ y se dibuja la línea que une estos dos puntos (figura 9.39). Esta línea es un diámetro del círculo de Mohr y, por tanto, define dicho círculo. Conforme se rotan los ejes coordenados a través de un ángulo θ, el diámetro rota a través del *doble de dicho ángulo* y las coordenadas de X' y Y' proporcionan los nuevos valores $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de los momentos y el producto de inercia del área. Además, el ángulo θ_m y las coordenadas de los puntos A y B definen los ejes principales a y b y los momentos principales de inercia del área [problema resuelto 9.8].

Momentos de inercia de masas

La segunda parte del capítulo estuvo dedicada a calcular los *momentos de inercia de masas*, los cuales aparecen en dinámica en problemas que involucran la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. El momento de inercia de masa de un cuerpo con respecto a un eje AA' (figura 9.40) se definió como

$$I = \int r^2 \, dm \tag{9.28}$$

donde r es la distancia desde AA' hasta el elemento de masa [sección 9.11]. El *radio de giro* del cuerpo de definió como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{9.29}$$

Figura 9.40

Los momentos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes coordenados se expresaron de la siguiente manera

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \, dm$$

$$I_y = \int (z^2 + x^2) \, dm \tag{9.30}$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

Teorema de los ejes paralelos

Se vio que el *teorema de los ejes paralelos* también se aplica a los momentos de inercia de masa [sección 9.12]. Por tanto, el momento de inercia I de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario AA' (figura 9.41) puede expresarse como

$$I = \bar{I} + md^2 \qquad (9.33)$$

donde $\bar{I}$ es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo al eje AA', m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los dos ejes.

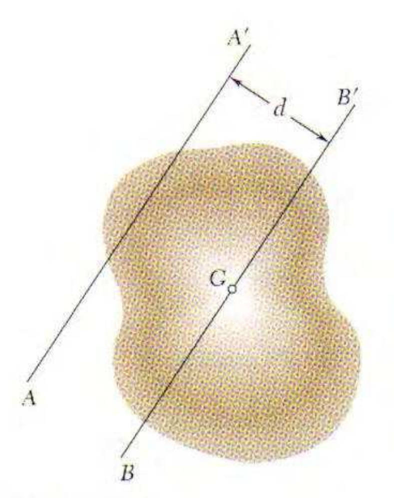



Figura 9.41

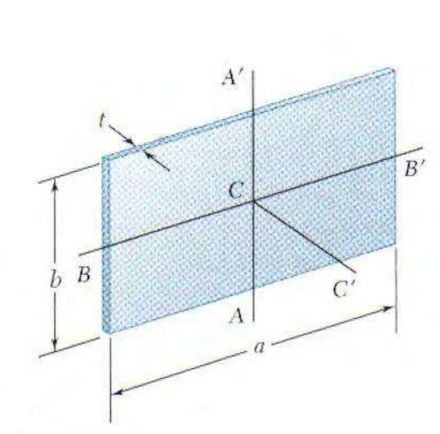


Figura 9.42

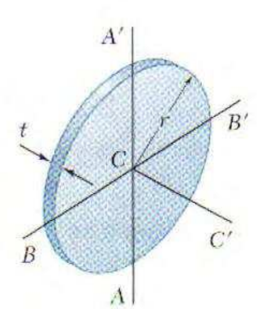


Figura 9.43

Momentos de inercia de placas delgadas

Los momentos de inercia de *placas delgadas* se pueden obtener a partir de los momentos de inercia de sus áreas [sección 9.13]. Se encontró que para una *placa rectangular* los momentos de inercia con respecto a los ejes mostrados (figura 9.42) son

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12} ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12} mb^2 \qquad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12} m(a^2 + b^2) \qquad (9.40)$$

mientras que para una *placa circular* (figura 9.43) están dados por

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4} mr^2 \qquad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2} mr^2 \qquad (9.42)$$

Cuerpos compuestos

Cuando un cuerpo posee *dos planos de simetría*, es posible utilizar una sola integración para determinar su momento de inercia con respecto a un eje dado si se selecciona el elemento de masa dm como una placa delgada [problemas resueltos 9.10 y 9.11]. Por otra parte, cuando un cuerpo consta de *varias formas geométricas comunes*, su momento de inercia con respecto a un eje dado puede obtenerse con las fórmulas proporcionadas en la figura 9.28 con el teorema de los ejes paralelos [problemas resueltos 9.12 y 9.13].

Momento de inercia con respecto a un eje arbitrario

En la última parte del capítulo se aprendió a determinar el momento de inercia de un cuerpo *con respecto a un eje arbitrario OL* que se dibuja a través del origen O [sección 9.16]. Si se presentan

con λ_x, λ_y y λ_z las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de OL (figura 9.44) y se introducen los *productos de inercia*

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \quad (9.45)$$

se encontró que el momento de inercia del cuerpo con respecto a OL se pueden expresar como

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \quad (9.46)$$

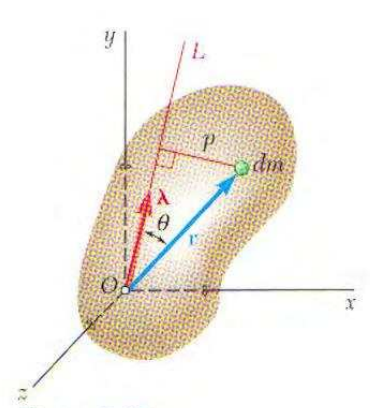


Figura 9.44

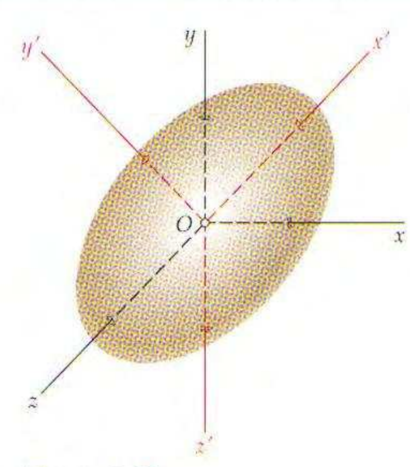


Figura 9.45

Elipsoide de inercia

Graficando un punto Q a lo largo de cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O [sección 9.17], se obtuvo la superficie de un elipsoide, conocido como el *elipsoide de inercia* del cuerpo en el punto O. Los ejes principales x', y' y z' de este elipsoide (figura 9.45) son los *ejes principales de inercia* del cuerpo; esto es, los productos de inercia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ del cuerpo con respecto a dichos ejes son iguales a cero. Existen muchas situaciones en las cuales se pueden deducir los ejes principales de inercia de un cuerpo a partir de las propiedades de simetría de este último. Entonces, si se seleccionan los ejes principales como los ejes coordenados, se puede expresar a I_{OL} como

Ejes principales de inercia
Momenos principales de inercia

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \quad (9.50)$$

donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O.

Cuando no se pueden obtener los ejes principales de inercia por inspección [sección 9.17], es necesario resolver la ecuación cúbica

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K$$
$$- (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \quad (9.56)$$

Se encontró [sección 9.18] que las raíces K_1, K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo dado. Entonces, se determinan los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ del eje principal correspondiente al momento principal de inercia K_1 sustituyendo K_1 en las ecuaciones (9.54) y resolviendo simultáneamente dos de esas ecuaciones y la ecuación (9.57). Después se repite el mismo procedimiento con K_2 y K_3 para determinar los cosenos directores de los otros dos ejes principales [problema resuelto 9.15].

Problemas de repaso

9.185 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y.

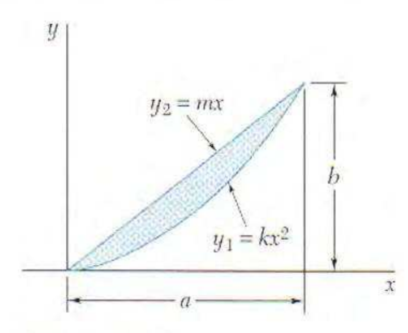


Figura P9.185

9.186 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia y el radio de giro con respecto a los ejes x y y.

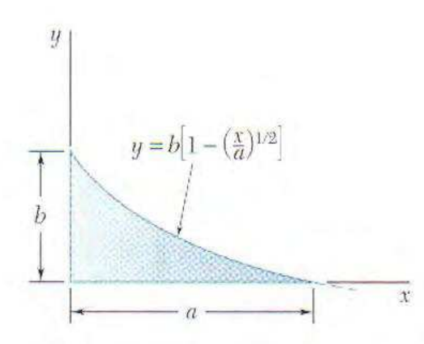


Figura *P9.186*

9.187 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y.

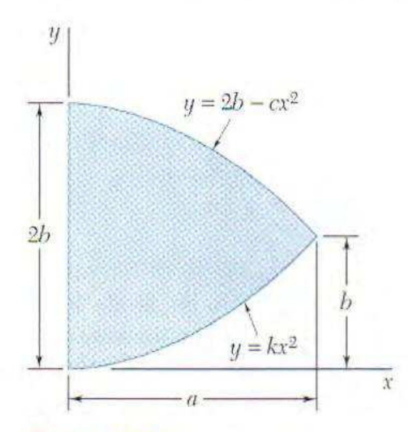


Figura P9.187



9.188 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y.

Figura P9.188

9.189 Para el área que se muestra en la figura, determine el momento polar de inercia con respecto a a) el punto O y b) el centroide del área.

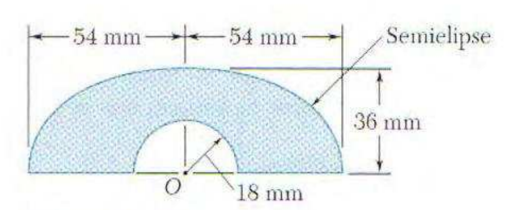


Figura P9.189

9.190 Con el propósito de construir una viga asimétrica, se sueldan entre sí dos ángulos L76 × 76 × 6.4 mm y dos ángulos L152 × 102 × 12.7 mm, como se muestra en la figura. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a sus ejes centroidales x y y.

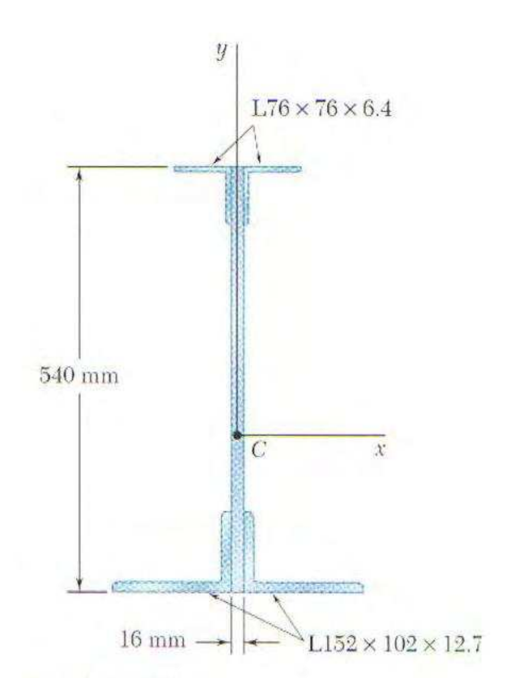


Figura P9.190

9.191 Para la sección transversal del ángulo L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ in. que se muestra en la figura, utilice el teorema de los ejes paralelos y determine el producto de inercia con respecto a los ejes centroidales x y y.

9.192 Para la sección transversal del ángulo L5 × 3 × $\frac{1}{2}$ in. que se muestra en la figura, utilice el círculo de Mohr y determine a) los momentos y productos de inercia con respecto a los nuevos ejes centroidales que se obtienen al rotar los ejes x y y un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj, b) la orientación de los ejes principales a través del centroide y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

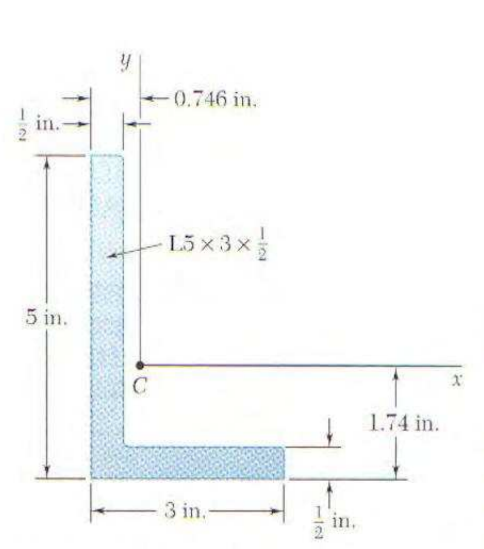


Figura P9.191 y *P.192*

9.193 El componente de máquina que se muestra en la figura se cortó de una pieza de hoja de metal delgada y uniforme. Si la masa del componente se representa con m, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje x y *b*) el eje y.

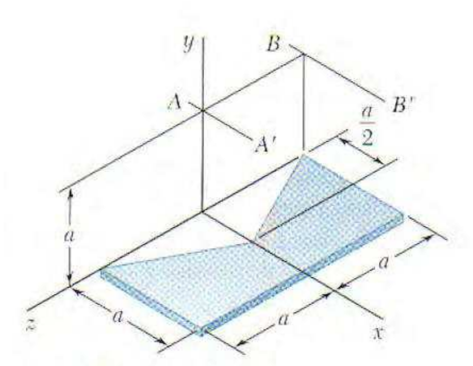


Figura P9.193 y *P.194*

9.194 El componente de máquina que se muestra en la figura se cortó de una pieza de hoja de metal delgada y uniforme. Si la masa del componente se representa con m, determine su momento de inercia de masa con respecto a *a*) el eje AA' y *b*) el eje BB', donde los ejes AA' y BB' son paralelos al eje x y se encuentran en un plano paralelo y que está a una distancia a por encima del plano xz.

9.195 Una pieza gruesa de 2 mm de hoja de acero se corta y se dobla para formar el componente de máquina que se muestra en la figura. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m^3, determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

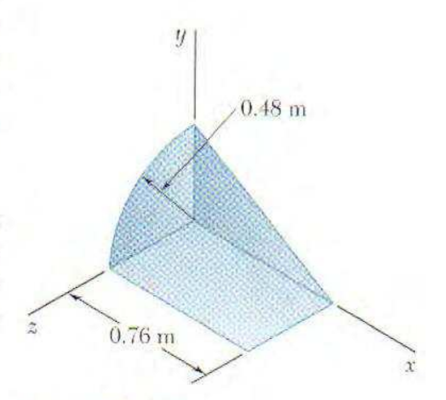


Figura P9.195

9.196 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia de masa y los radios de giro con respecto a los ejes x y y. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m^3.)

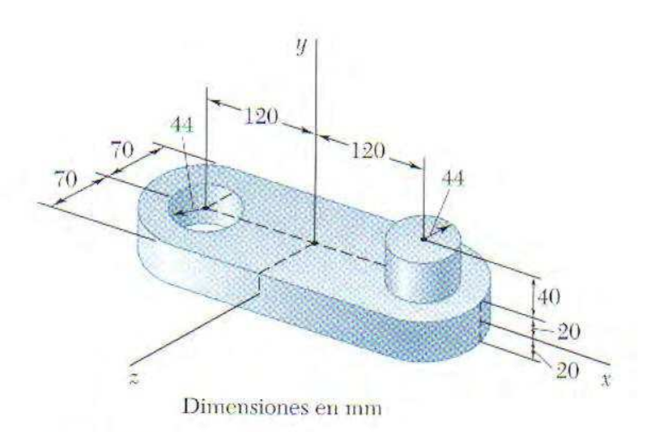


Figura *P9.196*

Problemas de computadora

9.C1 Para un área con momentos y productos de inercia conocidos I_x, I_y e I_{xy}, utilice software para calcular los momentos y productos de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ del área con respecto a los ejes x' y y' obtenidos al rotar, en un ángulo θ y en sentido inverso al de las manecillas del reloj, los ejes originales. Utilice este programa para calcular $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ de la sección del problema resuelto 9.7 con valores de θ desde 0 hasta 90° con incrementos de 5°.

9.C2 Para un área con momentos y productos de inercia conocidos I_x, I_y e I_{xy}, utilice software para calcular la orientación de los ejes principales del área y los valores correspondientes de los momentos de inercia principales. Utilice este programa para resolver *a*) el problema 9.89, *b*) el problema resuelto 9.7.

9.C3 En la figura se muestra cómo las secciones transversales pueden aproximarse mediante una serie de rectángulos. Con un software calcule los momentos de inercia y los radios de giro de secciones transversales de esta forma con respecto a sus ejes centroidales horizontal y vertical. Utilice este programa en las secciones transversales mostradas en *a*) las figuras P9.31 y P9.33, *b*) las figuras P9.32 y P9.34, *c*) la figura P9.43 y *d*) la figura P9.44.

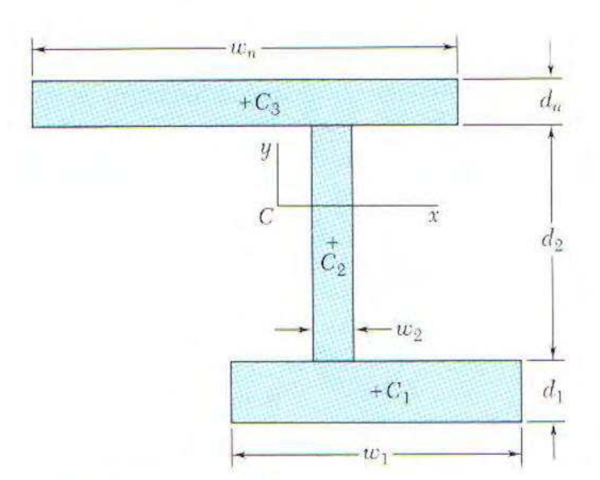


Figura P9.C3 y P9.C4

9.C4 En la figura se muestra cómo las secciones transversales pueden aproximarse mediante una serie de rectángulos. Con un software calcule los productos de inercia de las secciones transversales de este tipo con respecto a sus ejes centroidales horizontal y vertical. Utilice este programa para resolver *a*) el problema P9.71, *b*) el problema P9.75, *c*) el problema P9.77.

9.C5 El área mostrada en la figura se rota alrededor del eje x para formar un sólido homogéneo de masa m. Aproxime esta área usando una serie de 400 rectángulos de la forma $bcc'b'$, cada uno con un ancho Δl, y utilice software para determinar el momento de inercia de masa del sólido de revolución con respecto al eje x. Use este programa para resolver *a*) el problema resuelto 9.11, *b*) el problema 9.121. Suponga que en estos problemas $m = 2$ kg, $a = 100$ mm y $h = 400$ mm.

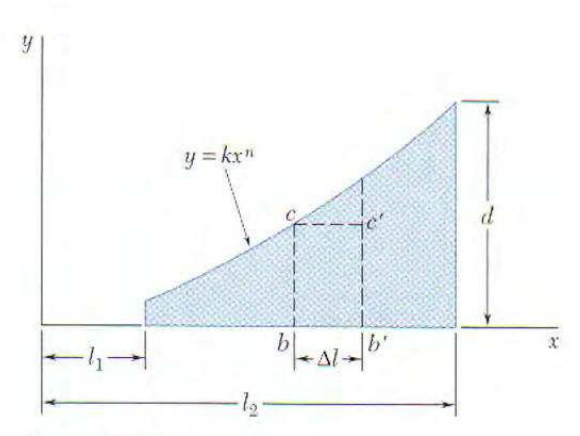


Figura P9.C5

9.C6 Un alambre homogéneo con un peso por unidad de longitud de 0.04 lb/ft se usa para formar la figura que se muestra. Aproxime esta figura usando 10 segmentos de línea recta y utilice software para determinar el momento de inercia de masa I_x del alambre con respecto al eje x. Utilice este programa para determinar I_x cuando *a*) $a = 1$ in., $L = 11$ in., $h = 4$ in., *b*) $a = 2$ in., $L = 17$ in., $h = 10$ in. y *c*) $a = 5$ in., $L = 25$ in. y $h = 6$ in.

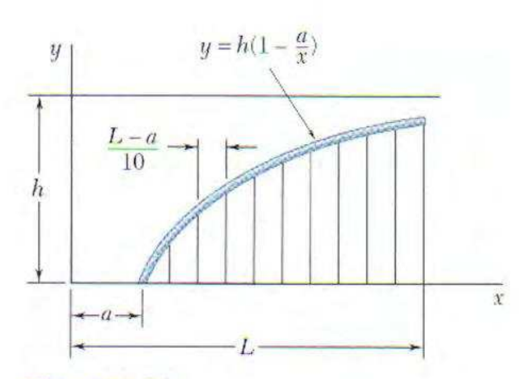


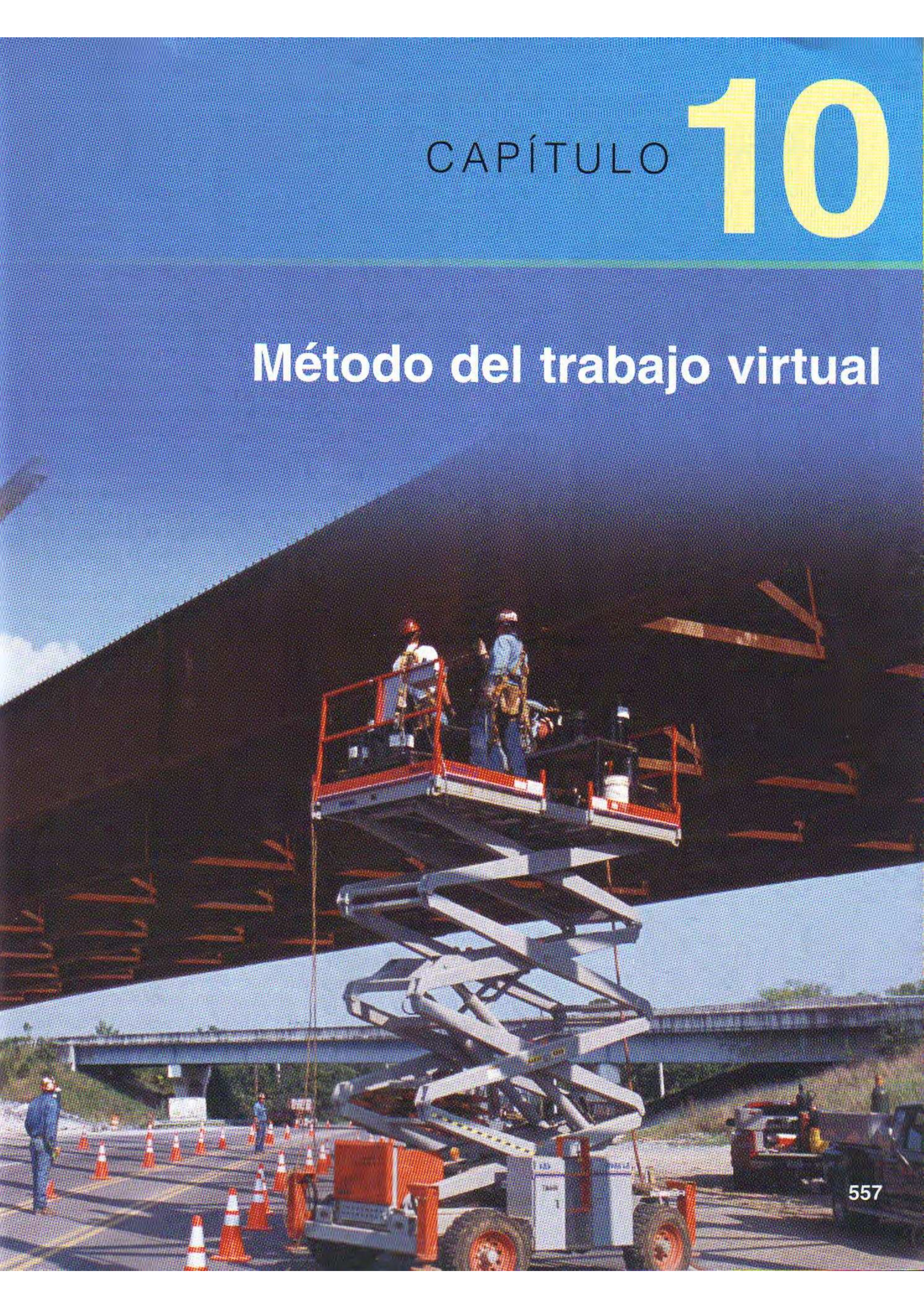
Figura P9.C6

***9.C7** Para un cuerpo con momentos y productos de inercia de masa conocidos I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}, utilice software para calcular los momentos de inercia de masa principales K_1, K_2 y K_3 del cuerpo en el origen. Utilice este programa para resolver el inciso *a*) del *a*) problema 9.180, *b*) problema 9.181 y *c*) problema 9.184.

***9.C8** En la configuración del problema 9.C7 incluya el cálculo de los ángulos que forman los ejes principales de inercia en el origen con los ejes coordenados. Utilice este programa para resolver *a*) el problema 9.180, *b*) el problema 9.181 y *c*) el problema 9.184.

El método del trabajo virtual es particularmente efectivo cuando puede encontrarse una relación simple entre los desplazamientos de los puntos de aplicación de las diferentes fuerzas involucradas. Es el caso de la plataforma levadiza de tijeras que utilizan los trabajadores de la fotografía para obtener acceso a un puente de carretera en construcción.





CAPÍTULO 10

Método del trabajo virtual

*10.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores los problemas relacionados con el equilibrio de cuerpos rígidos se resolvieron al considerar que las fuerzas aplicadas sobre los mismos estaban balanceadas. Se plantearon y resolvieron las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma M_A = 0$ para determinar el valor de las incógnitas. Sin embargo, un método que ha resultado ser más eficiente para resolver cierto tipo de problemas de equilibrio es el basado en el *principio de trabajo virtual*, el cual fue utilizado por primera vez en el siglo XVIII por el matemático suizo Jean Bernoulli.

Como se verá en la sección 10.3, el principio del trabajo virtual establece que si a una partícula o un cuerpo rígido o en general un sistema de cuerpos rígidos unidos, los cuales están en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas, se les aplica un desplazamiento arbitrario a partir de la posición de equilibrio, el trabajo realizado por las fuerzas externas durante el desplazamiento será cero. Este principio es efectivo cuando se aplica a la solución de problemas relacionados con el equilibrio de máquinas o mecanismos que están constituidos por varios elementos conectados entre sí.

En la segunda parte del capítulo se aplicará el método del trabajo virtual en forma alternativa basada en el concepto de *energía potencial*. En la sección 10.8 se estudiará que si una partícula, cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos están en equilibrio, la derivada de la energía potencial con respecto a la variable que define la posición debe ser cero.

También en este capítulo se aprenderá a evaluar la eficiencia mecánica de una máquina (sección 10.5) y poder determinar si la posición de equilibrio es estable, inestable o neutra (sección 10.9).

*10.2. TRABAJO DE UNA FUERZA

Primero se definirán los conceptos de *desplazamiento* y *trabajo* como se usan en la mecánica. Considere que la partícula mostrada (figura 10.1) se mueve del punto A a un punto cercano A'. Si con $\mathbf{r}$ se denota el vector de posición correspondiente al punto A, el pequeño vector que une a A con A' debe representarse con el diferencial $d\mathbf{r}$; al vector $d\mathbf{r}$ se le llama *desplazamiento* de la partícula. Suponga que sobre la partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}$, el *trabajo de la fuerza* $\mathbf{F}$ *correspondiente al desplazamiento* $d\mathbf{r}$ se define como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

Figura 10.1

la cual se obtiene al formar el producto escalar del vector de fuerza $\mathbf{F}$ con el vector de desplazamiento $d\mathbf{r}$. Si se representan con F y ds las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, respectivamente, y con α el ángulo que forman los vectores $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ y, recordando la definición del producto escalar de dos vectores (sección 3.9), se escribe

$$dU = F\, ds \cos \alpha \tag{10.1'}$$

Como el trabajo es una *cantidad escalar*, éste tiene magnitud y signo pero no dirección. También note que el trabajo debe estar expresado en unidades obtenidas al multiplicar unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos el trabajo se expresa en unidades de ft · lb o in. · lb. Pero si se

usan unidades del SI, entonces el trabajo se expresa en N · m. A esta unidad se le denomina *joule* (J).[†]

Con base en la ecuación (10.1′) se puede concluir que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si el ángulo α es obtuso. Existen tres casos de interés especial: si el vector fuerza **F** tiene la misma dirección que el vector desplazamiento $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo dU se reduce a $F\,ds$, pero si **F** tiene dirección opuesta a $d\mathbf{r}$, entonces el trabajo se obtiene como $dU = -F\,ds$. Por último, si **F** es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es igual a cero.

También el trabajo dU de una fuerza **F** durante un desplazamiento $d\mathbf{r}$ se puede considerar como el producto de F con la componente $ds \cos \alpha$ del desplazamiento $d\mathbf{r}$ a lo largo de **F** (figura 10.2*a*). Este enfoque es muy práctico cuando se desea determinar el trabajo realizado

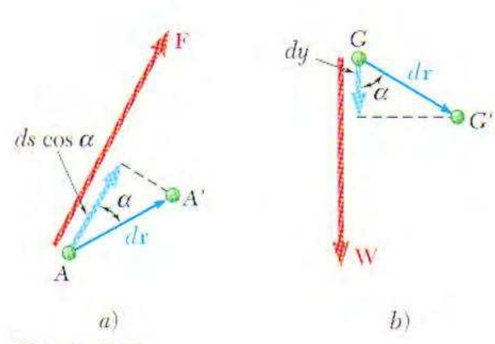


Figura 10.2



Fotografía 10.1 Las fuerzas ejercidas por los cilindros hidráulicos para posicionar el elevador de canasta mostrado en la fotografía pueden determinarse de manera efectiva mediante el método del trabajo virtual; lo anterior es posible porque existe una relación simple entre los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas que actúan sobre los elementos del elevador.

por el peso **W** de un cuerpo (figura 10.2*b*). En este caso, el trabajo **W** es igual al producto de W y el desplazamiento vertical dy del centro de gravedad G del cuerpo. Si el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo realizado es positivo, pero si el desplazamiento es hacia arriba, entonces el trabajo realizado será negativo.

Hay cierto número de fuerzas que se estudian en estática y que *no realizan trabajo*: fuerzas aplicadas a puntos fijos ($ds = 0$) o que actúan en dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos \alpha = 0$). Dentro de este tipo de fuerzas se pueden citar las fuerzas de reacción que se generan en pernos sin fricción cuando el cuerpo que se sostiene rota con respecto al perno; las fuerzas de reacción en superficies sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie; la fuerza de reacción que genera un rodillo cuando se mueve a lo largo de un riel; el peso de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve en forma horizontal, y la fuerza de fricción que una rueda genera cuando ésta gira sin deslizarse (debido a que en todo instante el punto de contacto no se mueve). Algunos ejemplos de fuerzas que *sí realizan trabajo* son el peso del cuerpo (excepto en el caso considerado anteriormente), la fuerza de fricción que actúa en un cuerpo que se desliza sobre una superficie rugosa y la mayoría de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en movimiento.

[†]El joule es la unidad de *energía* en las unidades del SI, sin importar si dicha energía está en forma mecánica (trabajo, energía potencial y energía cinética), química, eléctrica o térmica. Se debe notar que aunque N · m = J, el momento de una fuerza debe expresarse en N · m y no en joules, puesto que el momento de una fuerza no es una forma de energía.

En ciertos casos, la suma del trabajo realizado por varias fuerzas es cero. Por ejemplo, considérense los dos cuerpos rígidos AC y BC conectados en C mediante un *perno sin fricción* (figura 10.3*a*). Entre las fuerzas que actúan en AC está la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida en C por BC.

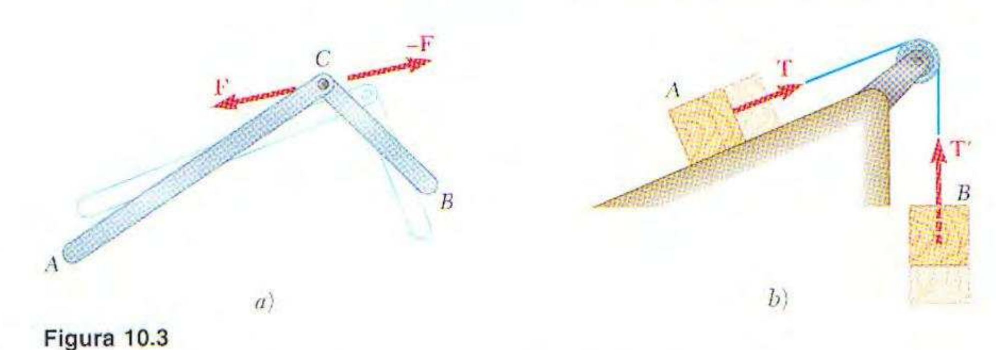


Figura 10.3

En general, el trabajo de esta fuerza no será cero, pero éste será igual en magnitud y de signo opuesto al trabajo generado por la fuerza $-\mathbf{F}$ ejercida por AC sobre BC debido a que estas fuerzas son iguales y opuestas y se aplican sobre la misma partícula. Así, cuando se considera el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre AB y BC, el trabajo realizado por las dos fuerzas internas en C se anula. Se puede obtener una conclusión análoga al considerar un sistema compuesto de dos bloques conectados mediante una *cuerda inextensible* AB (figura 10.3*b*). El trabajo de la fuerza de tensión $\mathbf{T}$ en A es igual en magnitud al trabajo realizado por la fuerza de tensión $\mathbf{T}'$ en B, debido a que estas dos fuerzas tienen la misma magnitud y los puntos A y B recorren la misma distancia; sin embargo, en un caso el trabajo es positivo mientras que en el otro es negativo y, de nuevo, el trabajo realizado por las fuerzas internas se cancela.

Se puede demostrar que el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unido a un cuerpo rígido es cero. En este caso, considere dos partículas A y B de un mismo cuerpo rígido y dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ iguales y opuestas que actúan una sobre la otra (figura 10.4). Como en

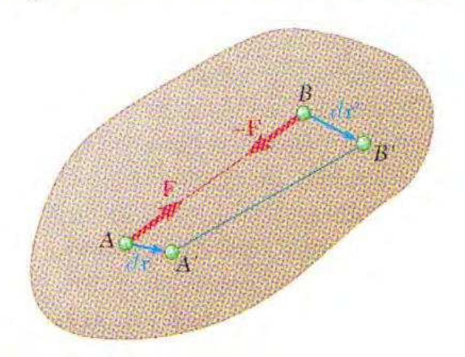


Figura 10.4

general los desplazamientos pequeños $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de estos desplazamientos a lo largo de AB deben ser iguales; de otra manera, las partículas no permanecerían a la misma distancia una con respecto a la otra, por tanto, el cuerpo no sería rígido. En este sentido, el trabajo de $\mathbf{F}$ es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$, y su suma es cero.

Al calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido es conveniente considerar el trabajo de un par sin considerar por separado el trabajo de cada una de las dos fuerzas que lo

forman. Considere las dos fuerzas **F** y $-\mathbf{F}$ que forman un par de momento **M**, las cuales actúan sobre un cuerpo rígido (figura 10.5). Cualquier desplazamiento pequeño del cuerpo rígido que lleve a A y B a A' y B'', respectivamente, puede dividirse en dos partes, una en la cual los puntos A y B sufren desplazamientos iguales $d\mathbf{r}_1$ y la otra en la cual A' permanece fijo mientras que B' se mueve a B'' mediante un desplazamiento $d\mathbf{r}_2$ de magnitud $ds_2 = r\,d\theta$. Durante la primera parte del movimiento, el trabajo de **F** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$ y por tanto su suma es cero. Sin embargo, en la segunda parte del movimiento sólo la fuerza **F** hace trabajo y éste es igual a $dU = F\,ds_2 = Fr\,d\theta$. Pero el producto Fr es igual a la magnitud M del momento del par. De esta manera, el trabajo de un par de momento **M** que actúa sobre un cuerpo rígido es:

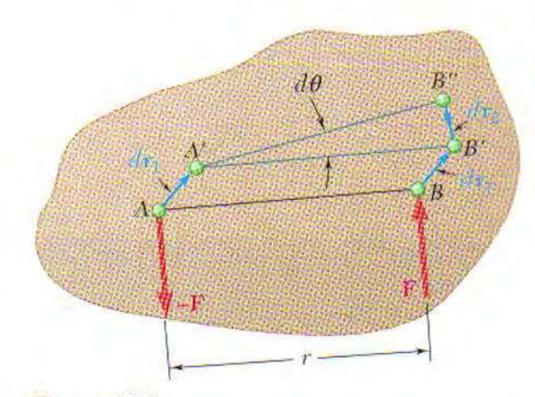


Figura 10.5

$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

donde $d\theta$ representa el ángulo pequeño que rota el cuerpo, expresado en radianes. Se debe enfatizar nuevamente que el trabajo debe estar expresado en unidades que se obtienen al multiplicar unidades de fuerza por unidades de longitud.

*10.3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Considere una partícula sobre la que actúan varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ (figura 10.6). Suponga que la partícula realiza un desplazamiento pequeño desde A hasta A', el cual en ocasiones es posible, pero no necesariamente sucede. Las fuerzas pueden estar balanceadas y la partícula en reposo o la partícula puede moverse bajo la acción de las fuerzas dadas en una dirección diferente a la de AA'. A este desplazamiento, denotado por $\delta\mathbf{r}$, se le llama *desplazamiento virtual*, puesto que en realidad no sucede. El símbolo $\delta\mathbf{r}$ representa una diferencial de primer orden y se le usa para distinguir el desplazamiento virtual del desplazamiento $d\mathbf{r}$ que podría suceder si la partícula estuviera en movimiento. Como se verá más adelante, los desplazamientos virtuales pueden usarse para determinar si se satisfacen las condiciones de equilibrio de una partícula dada.

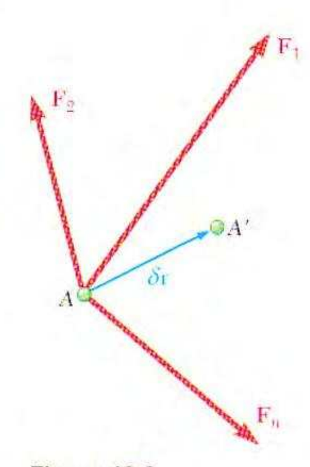


Figura 10.6

Al trabajo realizado por las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ durante el desplazamiento virtual $\delta\mathbf{r}$ se le llama *trabajo virtual*. El trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula de la figura 10.6 es

$$\begin{aligned}\delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) \cdot \delta\mathbf{r}\end{aligned}$$

o

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} \tag{10.3}$$

donde con **R** se representa la resultante de las fuerzas dadas. Por tanto, el trabajo virtual total realizado por las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ es igual al trabajo virtual realizado por su resultante **R**.

El principio del trabajo virtual para una partícula establece que *si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre la partícula es cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula*. Así, esta condición necesaria establece que si la partícula está en equilibrio, la resultante **R** de las fuerzas es cero y, por tanto, se concluye con base en la ecuación (10.3) que el trabajo virtual δU es cero. La condición es suficiente para afirmar que si el trabajo virtual δU es cero para cualquier desplazamiento virtual, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}$ es cero para cualquier $\delta\mathbf{r}$, y que la resultante **R** debe ser cero.

En el caso de un cuerpo rígido, el principio del trabajo virtual establece que *si el cuerpo rígido está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido es cero para cualquier desplazamiento virtual del cuerpo*. Esta condición necesaria establece que si el cuerpo está en equilibrio, todas las partículas que lo forman están en equilibrio y el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre todas las partículas debe ser cero. Pero en la sección anterior se vio que el trabajo total de las fuerzas internas es cero, por tanto, el trabajo total de las fuerzas externas también debe ser cero. Puede demostrarse que esta condición también es suficiente.

El principio del trabajo virtual se puede extender al caso de un *sistema de cuerpos rígidos unidos*. Si el sistema permanece unido durante un desplazamiento virtual, debe *considerarse sólo el trabajo de las fuerzas externas al sistema* puesto que el trabajo de las fuerzas internas entre las diferentes uniones del sistema es cero.

*10.4. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

El principio del trabajo virtual es particularmente efectivo cuando se aplica a la solución de problemas que involucran máquinas o mecanismos compuestos de varios cuerpos rígidos conectados entre sí. Por

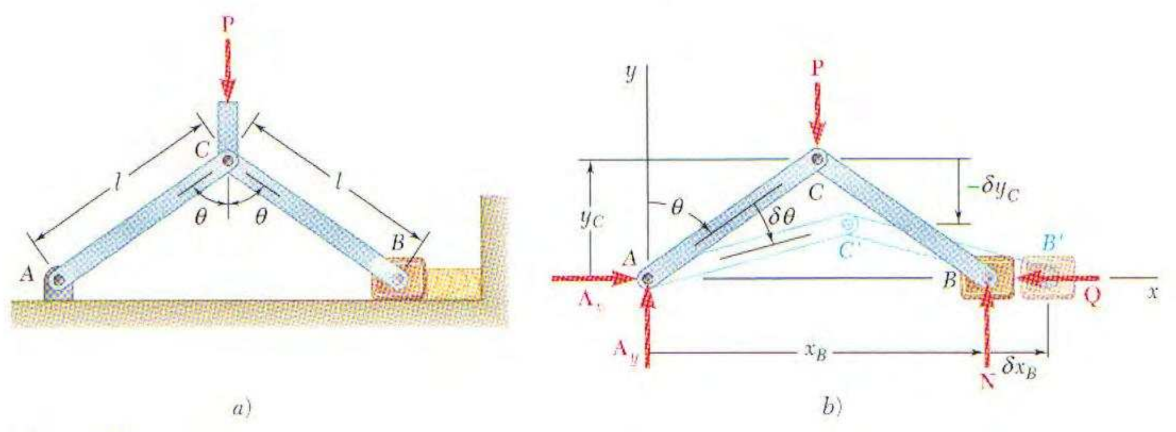


Figura 10.7

ejemplo, la prensa de banco ACB mostrada en la figura 10.7*a*, la cual se usa para comprimir un bloque de madera. Se desea determinar la fuerza ejercida por la prensa sobre el bloque cuando se aplica en C una fuerza **P** suponiendo que no hay fricción. Representando con **Q** la reacción que ejerce el bloque sobre la prensa, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la misma y se considera el desplazamiento virtual que se obtiene al incrementar en forma positiva el ángulo θ en $\delta\theta$ (figura 10.7*b*). Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en A, se nota que x_B se incrementa mientras que y_C disminuye. En la figura se muestra un incremento positivo δx_B y un incremento negativo $-\delta y_C$. Las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **N** no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual considerado y sólo se debe calcular el trabajo realizado por **P** y **Q**. Como **Q** y δx_B tienen sentidos opuestos, el trabajo virtual de **Q** es $\delta U_Q = -Q\,\delta x_B$. Como **P** y el incremento mostrado en la figura ($-\delta y_C$) tienen el mismo sentido, el trabajo virtual de **P** es $\delta U_P = +P(-\delta y_C) = -P\,\delta y_C$. El signo negativo en la relación anterior pudo haberse previsto al observar que las fuerzas **Q** y **P** tienen, res-

pectivamente, direcciones opuestas a los ejes positivos x y y. Si se expresa las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ y diferenciando, se obtiene

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \operatorname{sen} \theta & y_C &= l \cos \theta \\ \delta x_B &= 2l \cos \theta \, \delta\theta & \delta y_C &= -l \operatorname{sen} \theta \, \delta\theta \end{aligned} \qquad (10.4)$$

Por tanto, el trabajo virtual realizado por las fuerzas **Q** y **P** es

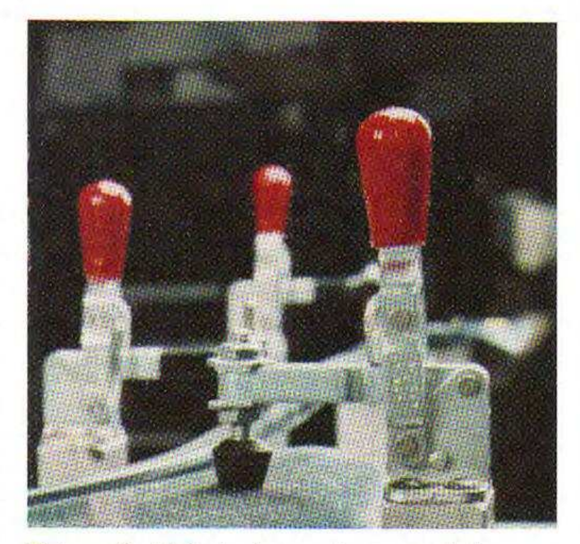
$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_Q + \delta U_P = -Q \, \delta x_B - P \, \delta y_C \\ &= -2Ql \cos \theta \, \delta\theta + Pl \operatorname{sen} \theta \, \delta\theta \end{aligned}$$

Estableciendo $\delta U = 0$ se obtiene

$$2Ql \cos \theta \, \delta\theta = Pl \operatorname{sen} \theta \, \delta\theta \qquad (10.5)$$

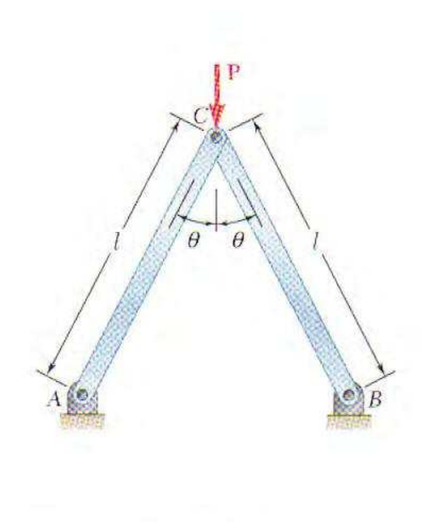
$$Q = \tfrac{1}{2} P \tan \theta \qquad (10.6)$$

En este problema es clara la superioridad del método del trabajo virtual sobre las ecuaciones de equilibrio convencionales: al utilizar el método del trabajo virtual se pudieron eliminar todas las reacciones desconocidas mientras que al plantear la ecuación de equilibrio $\Sigma M_A = 0$ sólo se hubieran podido eliminar dos de éstas. Esta propiedad del método del trabajo virtual se puede utilizar para resolver problemas relacionados con máquinas y mecanismos. *Si el desplazamiento virtual considerado es consistente con las restricciones impuestas por los apoyos y uniones, todas las reacciones y las fuerzas internas se eliminan y sólo debe considerarse el trabajo de las cargas, las fuerzas aplicadas y las fuerzas de fricción.*



Fotografía 10.2 La fuerza de agarre de la abrazadera de seguro que se presenta en la fotografía puede ser expresada como una función de la fuerza aplicada a la manivela, estableciendo primero las relaciones geométricas entre los elementos de la abrazadera, para después aplicar el método del trabajo virtual.

También el método del trabajo virtual puede utilizarse para resolver problemas que involucran estructuras completamente restringidas, aunque en realidad nunca se presenten los desplazamientos virtuales considerados. Por ejemplo, considere el armazón ACB mostrado en la figura 10.8*a*. Si se mantiene fijo el punto A mientras que al punto B se le aplica un desplazamiento virtual horizontal (figura 10.8*b*), sólo es necesario considerar el trabajo realizado por **P** y $\mathbf{B}_x$. Entonces, se puede determinar el valor de la componente de reacción $\mathbf{B}_x$ de la misma



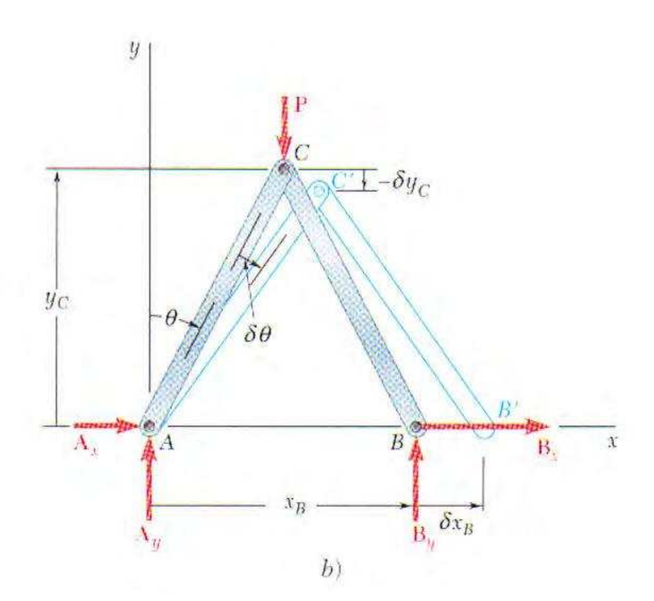


Figura 10.8

forma en que se calculó la fuerza **Q** del ejemplo anterior (figura 10.7*b*); por tanto, se obtiene

$$B_x = -\tfrac{1}{2}P \tan \theta$$

En forma análoga se puede determinar la componente de la reacción $\mathbf{A}_x$ al mantener fijo el punto B y aplicar un desplazamiento virtual horizontal al punto A. Las restantes componentes $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{B}_y$ se pueden calcular rotando el armazón ACB como si fuera un cuerpo rígido, respectivamente, con relación a B y A.

El método de trabajo virtual también se puede emplear para determinar la configuración de un sistema en equilibrio sujeto a la acción de varias fuerzas dadas. Por ejemplo, puede obtenerse el valor del ángulo θ para el cual el mecanismo de la figura 10.7 está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas **P** y **Q** resolviendo la ecuación (10.6) para $\tan \theta$.

Es necesario señalar que lo atractivo del método del trabajo virtual depende en gran medida de la existencia de relaciones geométricas simples entre los diferentes desplazamientos virtuales involucrados en la solución de cierto problema dado. Cuando no es posible obtener dichas relaciones geométricas simples es necesario recurrir al método convencional de solución expuesto en el capítulo 6.

*10.5. MÁQUINAS REALES. EFICIENCIA MECÁNICA

Al hacer el análisis de la prensa de banco de la sección anterior, se supuso que no había fuerzas de fricción. Así, el trabajo virtual consistía sólo en el trabajo de la fuerza aplicada **P** y de la fuerza de reacción **Q**. Note que el trabajo de la reacción **Q** es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo realizado por la fuerza ejercida por la prensa de banco sobre el bloque. Por tanto, la ecuación (10.5) expresa que el *trabajo de salida* $2Ql \cos \theta \, \delta\theta$ es igual al *trabajo de entrada* $Pl \operatorname{sen} \theta \, \delta\theta$. Una máquina en la cual el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida se le conoce como máquina "ideal". Pero en una máquina "real" las fuerzas de fricción siempre realizan trabajo, por lo que el trabajo de salida será menor que el trabajo de entrada.

Por ejemplo, considere la prensa de banco de la figura 10.7*a* y suponga que existe una fuerza de fricción **F** entre el bloque deslizante B y el plano horizontal (figura 10.9). Con el uso de los métodos convencionales de la estática y al sumar los momentos con respecto a A, se encuentra que $N = P/2$. Si se representa con μ el coeficiente de fric-

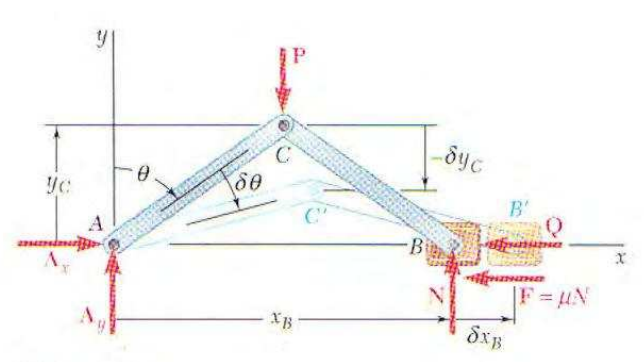


Figura 10.9

ción entre el bloque B y el plano horizontal, se tiene que $F = \mu N = \mu P/2$. Recordando las fórmulas (10.4), es posible determinar el trabajo virtual total de las fuerzas **Q**, **P** y **F** realizado durante el desplazamiento virtual mostrado en la figura 10.9, esto es:

$$\begin{aligned}\delta U &= -Q\ \delta x_B - P\ \delta y_C - F\ \delta x_B \\ &= -2Ql \cos\theta\ \delta\theta + Pl \operatorname{sen}\theta\ \delta\theta - \mu Pl \cos\theta\ \delta\theta\end{aligned}$$

Estableciendo $\delta U = 0$, se obtiene

$$2Ql \cos\theta\ \delta\theta = Pl \operatorname{sen}\theta\ \delta\theta - \mu Pl \cos\theta\ \delta\theta \qquad (10.7)$$

la cual expresa que el trabajo de salida es igual al trabajo de entrada menos el trabajo de la fuerza de fricción. Resolviendo para Q se tiene

$$Q = \tfrac{1}{2}P(\tan\theta - \mu) \qquad (10.8)$$

Note que si $\tan\theta = \mu$, entonces $Q = 0$; esto sucede cuando θ es igual al ángulo de fricción ϕ. Por otra parte, si $\theta < \phi$ entonces $Q < 0$. Por tanto, la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción.

La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la relación

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \qquad (10.9)$$

Es claro que la eficiencia mecánica de una máquina ideal es $\eta = 1$, debido a que el trabajo de entrada es igual al trabajo de salida. Pero la eficiencia mecánica de una máquina real siempre será menor que 1.

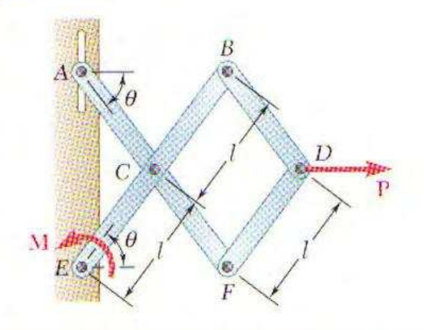
En el caso de la prensa de banco que se acaba de estudiar, se escribe

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{2Ql \cos\theta\ \delta\theta}{Pl \operatorname{sen}\theta\ \delta\theta}$$

Al sustituir el valor de Q de la ecuación (10.8), se obtiene

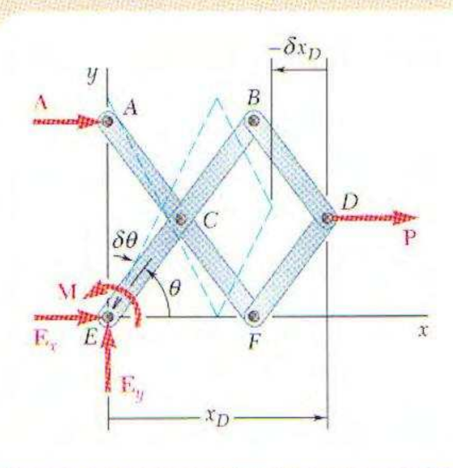
$$\eta = \frac{P(\tan\theta - \mu)l \cos\theta\ \delta\theta}{Pl \operatorname{sen}\theta\ \delta\theta} = 1 - \mu \cot\theta \qquad (10.10)$$

Se puede comprobar que en ausencia de las fuerzas de fricción, $\mu = 0$ y $\eta = 1$. En general, para valores de μ diferentes de cero, la eficiencia η es cero cuando $\mu \cot\theta = 1$, esto es, cuando $\tan\theta = \mu$, o $\theta = \tan^{-1}\mu = \phi$. De nuevo se comprueba que la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción ϕ.



PROBLEMA RESUELTO 10.1

Con el método de trabajo virtual, determine la magnitud del par **M** requerido para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura.



SOLUCIÓN

Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en E, se escribe

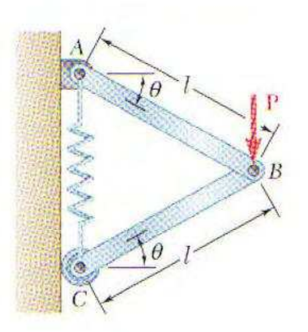
$$x_D = 3l \cos\theta \qquad \delta x_D = -3l \operatorname{sen}\theta\, \delta\theta$$

Principio del trabajo virtual. Como las reacciones **A**, $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{E}_y$ no realizan trabajo durante el desplazamiento virtual, el trabajo virtual total realizado por **M** y **P** debe ser cero. Note que tanto **P** como **M** actúan, respectivamente, en la dirección positiva de x y θ, por lo que se puede escribir

$$\delta U = 0: \qquad +M\,\delta\theta + P\,\delta x_D = 0$$

$$+M\,\delta\theta + P(-3l \operatorname{sen}\theta\,\delta\theta) = 0$$

$$M = 3Pl \operatorname{sen}\theta \quad ◀$$



PROBLEMA RESUELTO 10.2

Para el mecanismo mostrado en la figura, determine las expresiones para θ y para la tensión en el resorte que corresponden a la posición de equilibrio. El resorte de constante k tiene una longitud sin estirar h. Por esto ignore el peso del mecanismo.

SOLUCIÓN

Con el sistema de coordenadas mostrado en la figura se tiene

$$y_B = l \operatorname{sen}\theta \qquad y_C = 2l \operatorname{sen}\theta$$

$$\delta y_B = l \cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta y_C = 2l \cos\theta\,\delta\theta$$

La elongación del resorte es

$$s = y_C - h = 2l \operatorname{sen}\theta - h$$

La magnitud de la fuerza ejercida en C por el resorte es

$$F = ks = k(2l \operatorname{sen}\theta - h) \tag{1}$$

Principio del trabajo virtual. Como las reacciones $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y **C** no realizan trabajo, el trabajo virtual total realizado por **P** y **F** debe ser cero.

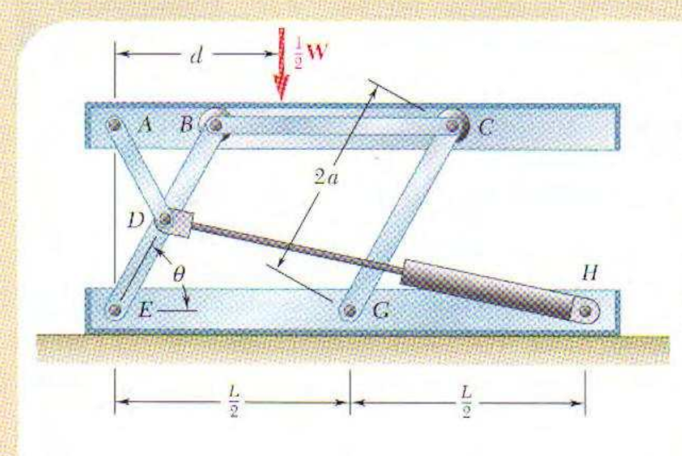
$$\delta U = 0: \qquad P\,\delta y_B - F\,\delta y_C = 0$$

$$P(l \cos\theta\,\delta\theta) - k(2l \operatorname{sen}\theta - h)(2l \cos\theta\,\delta\theta) = 0$$



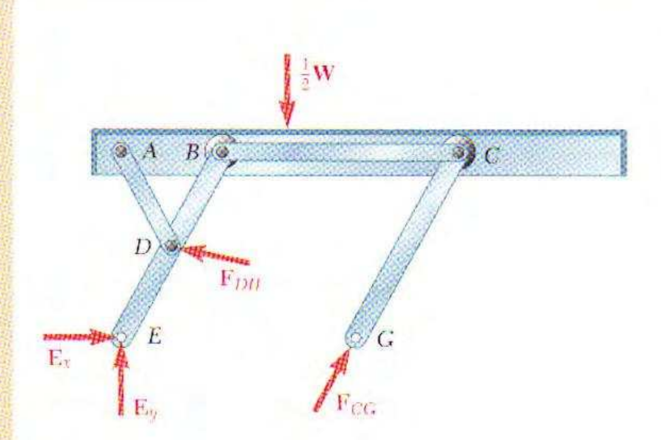
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{P + 2kh}{4kl} \quad ◀$$

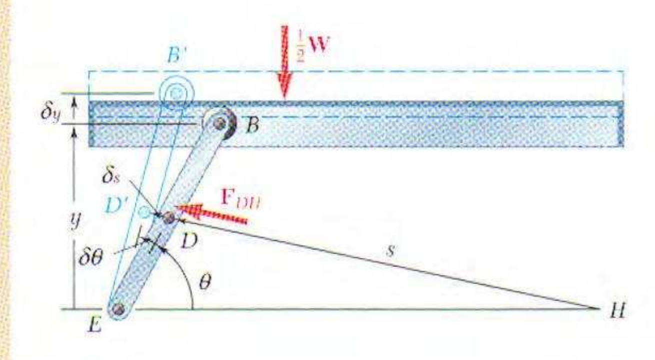
Si se sustituye esta expresión en (1), se tiene $\qquad F = \tfrac{1}{2}P \quad ◀$

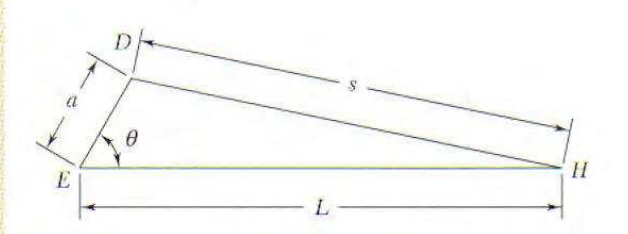


PROBLEMA RESUELTO 10.3

Una mesa de elevación hidráulica se utiliza para levantar una caja de 1 000 kg. La mesa consiste de una plataforma y de dos mecanismos idénticos en los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales (en la figura se muestran sólo un mecanismo y un cilindro hidráulico). Los elementos EDB y CG miden $2a$ de longitud cada uno y el elemento AD se une mediante un perno al punto medio de EDB. Si la caja se coloca sobre la caja de manera que la mitad de su peso es soportado por el sistema mostrado en la figura, determine la fuerza ejercida por cada cilindro al levantar la caja para los valores de $\theta = 60°$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. Este mecanismo se estudió previamente en el problema resuelto 6.7.







SOLUCIÓN

La máquina considerada consiste de la plataforma y del mecanismo en el que se ejerce una fuerza de entrada $\mathbf{F}_{DH}$ por medio del cilindro y una fuerza de salida igual y opuesta a $\frac{1}{2}\mathbf{W}$.

Principio del trabajo virtual. Observe primero que las reacciones en E y G no realizan trabajo. Al representar con y la elevación de la plataforma sobre la base y con s la longitud DH del sistema cilindro-pistón, se escribe

$$\delta U = 0: \qquad -\tfrac{1}{2}W\,\delta y + F_{DH}\,\delta s = 0 \tag{1}$$

El desplazamiento vertical δy de la plataforma se puede expresar en términos del desplazamiento angular $\delta\theta$ del elemento EDB de la siguiente forma:

$$y = (EB)\text{ sen }\theta = 2a\text{ sen }\theta$$
$$\delta y = 2a\cos\theta\,\delta\theta$$

Para expresar δs de una forma análoga en términos de $\delta\theta$, se aplica primero la ley de cosenos,

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$

Diferenciando,

$$2s\,\delta s = -2aL(-\text{sen }\theta)\,\delta\theta$$
$$\delta s = \frac{aL\text{ sen }\theta}{s}\,\delta\theta$$

Sustituyendo los valores de δy y δs en (1), se escribe

$$(-\tfrac{1}{2}W)2a\cos\theta\,\delta\theta + F_{DH}\frac{aL\text{sen }\theta}{s}\,\delta\theta = 0$$
$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\cot\theta$$

Con los datos numéricos dados, se tiene

$$W = mg = (1\,000\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 9\,810\text{ N} = 9.81\text{ kN}$$
$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$
$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20)\cos 60° = 8.49$$
$$s = 2.91\text{ m}$$

$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\cot\theta = (9.81\text{ kN})\frac{2.91\text{ m}}{3.20\text{ m}}\cot 60°$$

$$F_{DH} = 5.15\text{ kN} \quad ◀$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se aprendió a utilizar el *método del trabajo virtual*, el cual representa una alternativa diferente para resolver problemas relacionados con el equilibrio de los cuerpos rígidos.

El trabajo realizado por una fuerza durante un desplazamiento de su punto de aplicación o por un par durante una rotación se puede determinar utilizando, respectivamente, las ecuaciones (10.1) y (10.2):

$$dU = F\,ds\cos\alpha \tag{10.1}$$
$$dU = M\,d\theta \tag{10.2}$$

Principio del trabajo virtual. En su forma más general y más útil, este principio se puede enunciar de la siguiente manera: *si un sistema de cuerpos rígidos unidos está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas externas aplicadas al sistema es siempre cero para cualquier desplazamiento virtual que experimente el sistema.*

Cuando se quiera aplicar el principio del trabajo virtual, es importante tener presente lo siguiente:

1. ***Desplazamiento virtual.*** Una máquina o mecanismo en equilibrio no tiene ninguna tendencia a moverse. Sin embargo, *se puede causar o imaginar un desplazamiento pequeño*. Como en realidad dicho desplazamiento no ocurre, a éste se le conoce como *desplazamiento virtual*.

2. ***Trabajo virtual.*** Al trabajo realizado por una fuerza o un par durante un desplazamiento virtual se le conoce como *trabajo virtual*.

3. ***Se deben considerar sólo las fuerzas que realizan trabajo*** durante el desplazamiento virtual.

4. ***Las fuerzas que no realizan trabajo*** durante un desplazamiento virtual que es consistente con las restricciones impuestas sobre el sistema son:

   a) Las reacciones en los apoyos
   b) Las fuerzas internas en las uniones
   c) Las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles

   Ninguna de estas fuerzas debe tomarse en cuenta al utilizar el método del trabajo virtual.

5. ***Se debe estar seguro de que los diversos desplazamientos virtuales*** relacionados con los cálculos estén expresados en términos de un *solo desplazamiento virtual*. Esto se realizó en cada uno de los tres problemas resueltos de esta sección, donde todos los desplazamientos virtuales fueron expresados en términos de $\delta\theta$.

6. ***Se debe recordar que el método del trabajo virtual sólo es efectivo en aquellos casos*** en donde la geometría de los sistemas permite relacionar de una forma simple los desplazamientos involucrados en el análisis.

Problemas

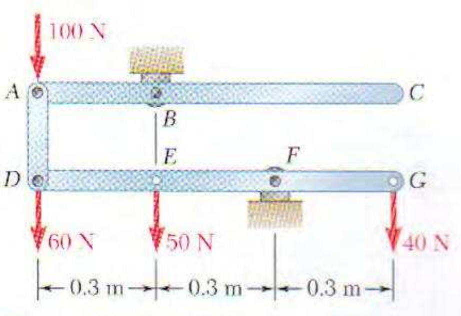


Figura P10.1 y P10.3

10.1 Determine la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en C para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.2 Determine la fuerza horizontal **P** que debe aplicarse en A para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

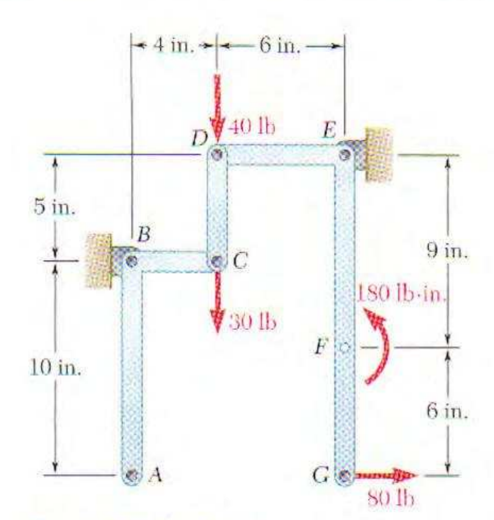


Figura P10.2 y P10.4

10.3 y 10.4 Determine el par **M** que debe aplicarse en el elemento ABC para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en las figuras.

10.5 Si se sabe que la fuerza de fricción máxima ejercida por la botella mostrada en la figura sobre el corcho es de 60 lb, determine *a*) la fuerza **P** que se debe aplicar al sacacorchos para abrir la botella y *b*) la fuerza máxima ejercida por la base del sacacorchos sobre la parte superior de la botella.

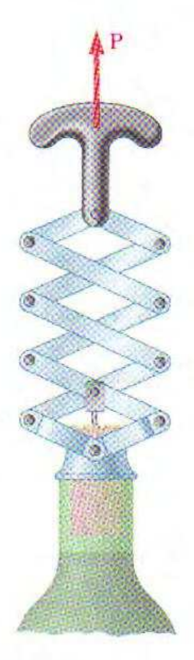


Figura *P10.5*

10.6 El mecanismo de dos barras mostrado en la figura se sostiene mediante un soporte de perno en B y por medio de un collarín en D, el cual se desliza libremente sobre una barra vertical. Determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del mecanismo.

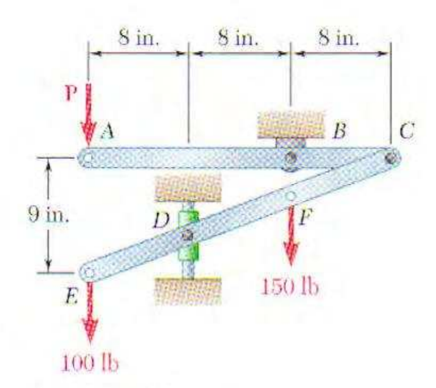


Figura *P10.6*

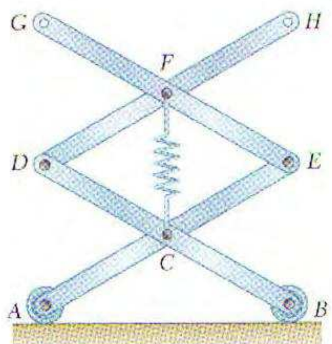
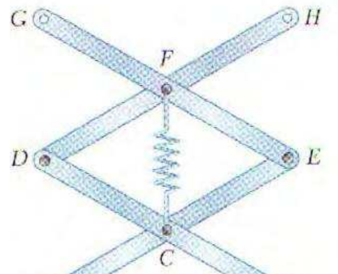



Figura P10.7 y P10.8

10.7 Un resorte de constante igual a 15 kN/m se conecta a los puntos C y F del mecanismo mostrado en la figura. Si se desprecia el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento vertical del punto G cuando una fuerza vertical de 120 N, dirigida hacia abajo, se aplica *a*) en el punto C y *b*) en los puntos C y H.

10.8 Un resorte de constante igual a 15 kN/m se conecta a los puntos C y F del mecanismo mostrado en la figura. Si se desprecia el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento vertical del punto G cuando una fuerza vertical de 120 N, dirigida hacia abajo, se aplica *a*) en el punto E y *b*) en los puntos E y F.

10.9 Si se sabe que la línea de acción de la fuerza **Q** pasa por el punto C del mecanismo mostrado en la figura, deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio.

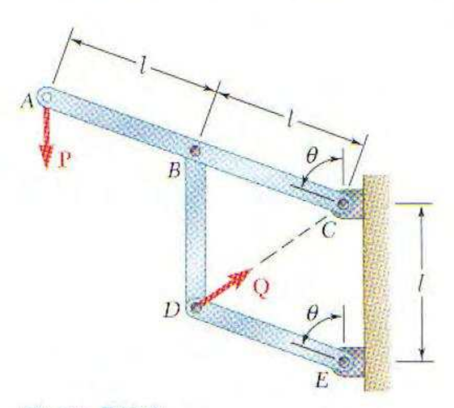
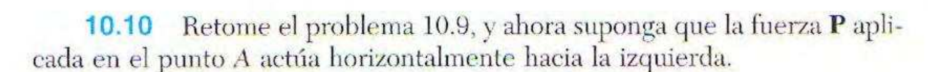
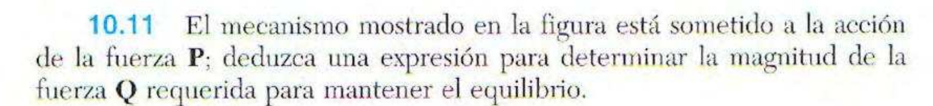
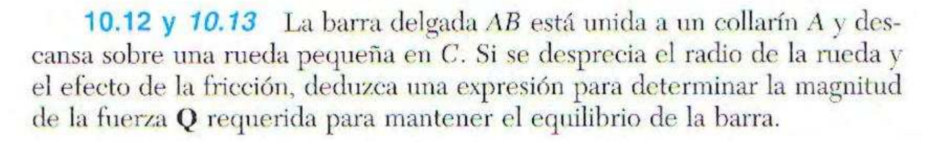


Figura P10.9


10.10 Retome el problema 10.9, y ahora suponga que la fuerza **P** aplicada en el punto A actúa horizontalmente hacia la izquierda.


10.11 El mecanismo mostrado en la figura está sometido a la acción de la fuerza **P**; deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio.


10.12 y *10.13* La barra delgada AB está unida a un collarín A y descansa sobre una rueda pequeña en C. Si se desprecia el radio de la rueda y el efecto de la fricción, deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio de la barra.

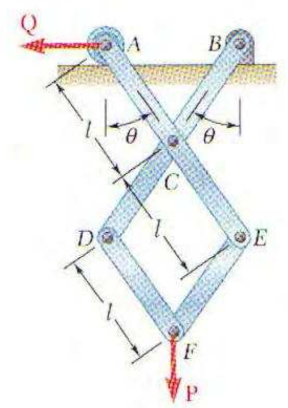


Figura P10.11

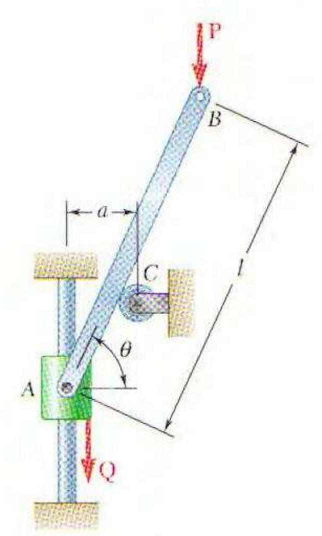


Figura P10.12

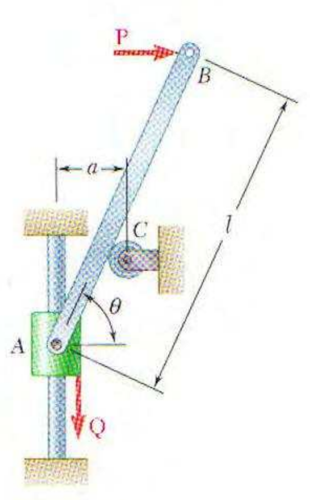


Figura *P10.13*

10.14 Obtenga una expresión para determinar la magnitud de la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

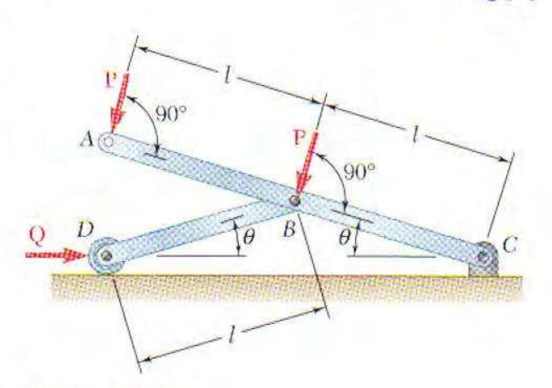


Figura *P10.14*

10.15 Una barra uniforme AB de longitud l y peso W está suspendida de dos cuerdas AC y BC con igual longitud. Deduzca una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio de la barra en la posición mostrada.

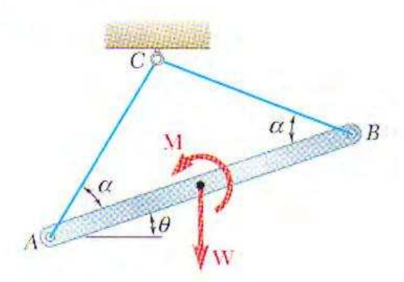


Figura P10.15

10.16 y 10.17 Obtenga una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en las figuras.

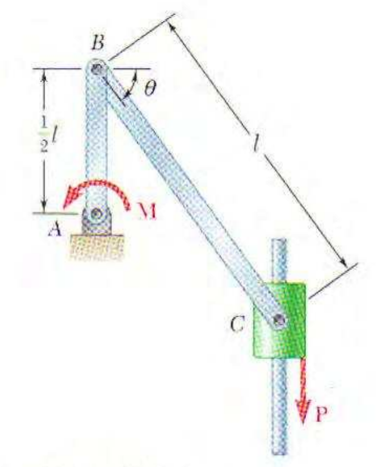


Figura P10.16

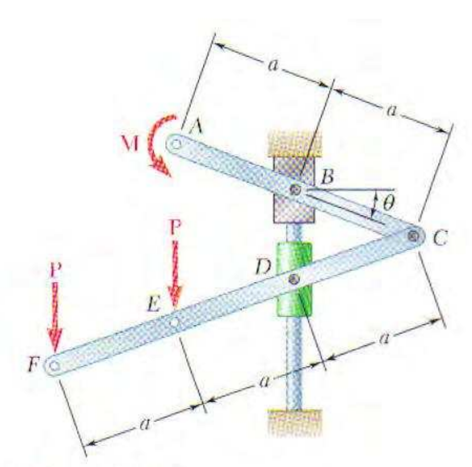


Figura P10.17

10.18 El perno en C está unido al elemento BCD y puede deslizarse a lo largo de la ranura de la placa fija mostrada en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, deduzca una expresión para determinar la magnitud del par **M** requerido para mantener el equilibrio cuando la fuerza **P**, que actúa en D, está orientada *a*) en la forma que se muestra en la figura, *b*) verticalmente hacia abajo y *c*) horizontalmente hacia la derecha.

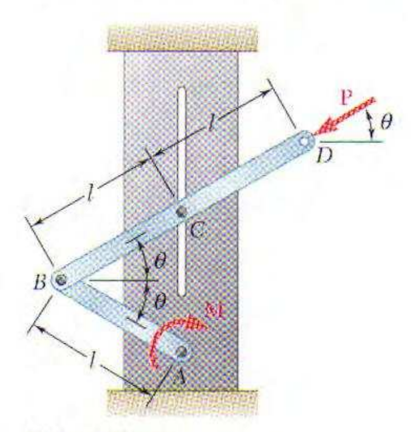


Figura P10.18

10.19 Una fuerza **P** de 4 kN se aplica sobre el pistón del sistema motriz mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y que $BC = 200$ mm, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando *a*) $\theta = 30°$ y *b*) $\theta = 150°$.

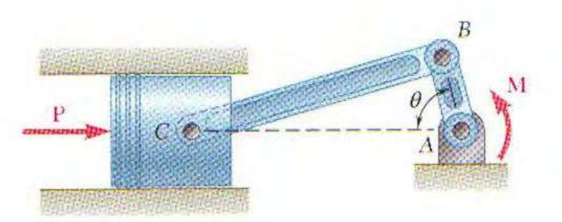


Figura ***P10.19*** **y** ***P10.20***

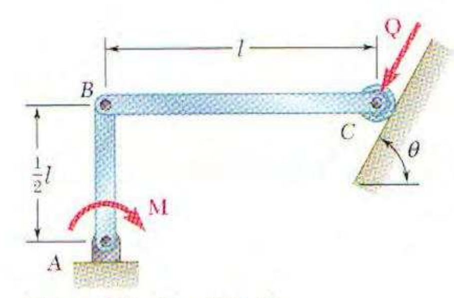


Figura P10.21 y P10.22

10.20 Un par **M** de 100 N · m de magnitud se aplica sobre la manivela del sistema motriz mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y que $BC = 200$ mm, determine la fuerza **P** requerida para mantener el equilibrio del sistema cuando *a*) $\theta = 60°$ y *b*) $\theta = 120°$.

10.21 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine el par **M** requerido para mantener el equilibrio cuando $l = 1.8$ ft, $Q = 40$ lb, y $\theta = 65°$.

10.22 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine la fuerza **Q** requerida para mantener el equilibrio cuando $l = 18$ in., $M = 600$ lb · in., y $\theta = 70°$.

10.23 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.11 cuando $P = 45$ lb y $Q = 160$ lb.

10.24 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.9 cuando $P = 80$ N y $Q = 100$ N.

10.25 La barra *AB* está unida en *A* a un bloque que puede deslizarse libremente por la ranura vertical que se muestra en la figura. Si se desprecia el efecto de la fricción y los pesos de las barras, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

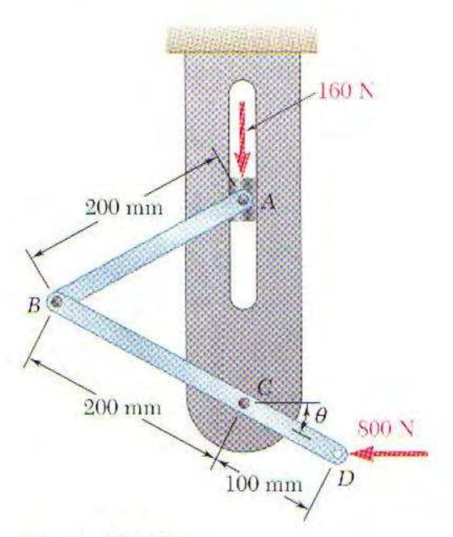


Figura P10.25

10.26 Retome el problema 10.25, y ahora suponga que la fuerza de 800 N se reemplaza por un par de 24 N · m en el sentido de las manecillas del reloj aplicado en D.

10.27 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio de la barra del problema 10.12 cuando l = 30 in., a = 5 in., P = 25 lb y Q = 40 lb.

10.28 Determine los valores de θ que corresponden a la posición de equilibrio de la barra del problema 10.13 cuando l = 600 mm, a = 100 mm, P = 50 N y Q = 90 N.

10.29 En la figura se muestran dos barras AC y CE que se conectan entre sí mediante un perno en C y por medio del resorte AE. La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30°$. Para la carga mostrada, deduzca una ecuación en función de P, θ, l y k que se cumpla cuando el sistema esté en equilibrio.

10.30 En la figura se muestran dos barras AC y CE que se conectan entre sí mediante un perno en C y por medio del resorte AE. La constante del resorte es de 1.5 lb/in. y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30°$. Si se sabe que l = 10 in., y sin tomar en cuenta el peso de las barras, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando P = 40 lb.

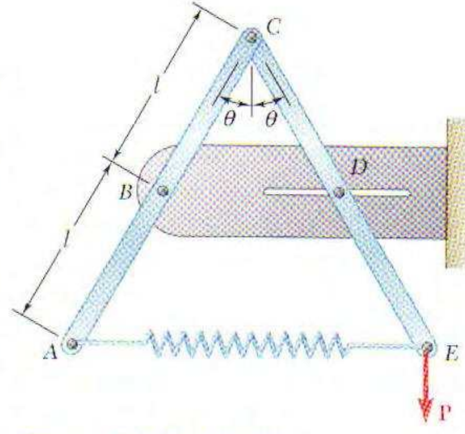


Figura *P10.29* y P10.30

10.31 Retome el problema 10.30, y ahora suponga que la fuerza **P** se traslada a C y actúa verticalmente hacia abajo.

10.32 La barra ABC está unida a los bloques A y B que pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. La constante del resorte unido en A es k = 3 kN/m y el resorte está sin estirar cuando la barra se encuentra en posición vertical. Para la carga mostrada, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

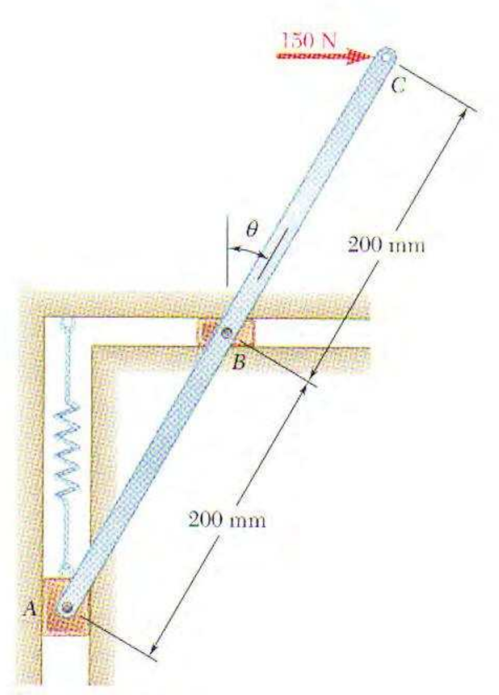


Figura P10.32

10.33 Una carga vertical **W** con 600 N de magnitud se aplica en el punto B del mecanismo mostrado en la figura. El resorte, con una constante de $k = 2.5$ kN/m, se encuentra sin estirar cuando AB y BC están en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo y puesto que $l = 300$ mm, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.34 Una carga vertical **W** se aplica en el punto B del mecanismo mostrado en la figura. Cuando AB y BC están en posición horizontal el resorte, con una constante k, se encuentra sin estirar. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, obtenga una ecuación en función de θ, W, l y k que se cumpla cuando el mecanismo esté en equilibrio.

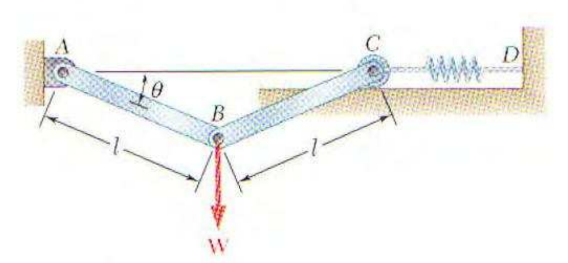


Figura P10.33 y *P10.34*

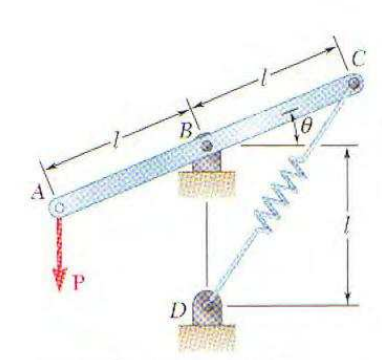


Figura P10.35 y P10.36

10.35 y 10.36 Si la constante del resorte CD mostrado en la figura es k y éste se encuentra sin estirar cuando la barra ABC está en posición horizontal, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio para los datos indicados.

10.35 $P = 300$ N, $l = 400$ mm, $k = 5$ kN/m.

10.36 $P = 75$ lb, $l = 15$ in., $k = 20$ lb/in.

10.37 Una carga **W** con magnitud de 72 lb se aplica en el punto C del mecanismo mostrado en la figura. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine el valor de θ correspondiente al equilibrio. La constante del resorte es $k = 20$ lb/in. y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$.

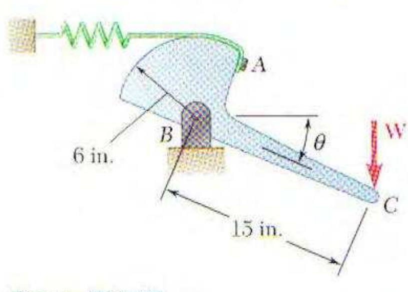


Figura P10.37

10.38 Una fuerza **P** con magnitud de 240 N se aplica al extremo E del cable CDE, el cual pasa bajo la polea D y se encuentra unido al mecanismo en C. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo ni el radio de la polea, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio. La constante del resorte es $k = 4$ kN/m y el resorte está si estirar cuando $\theta = 90°$.

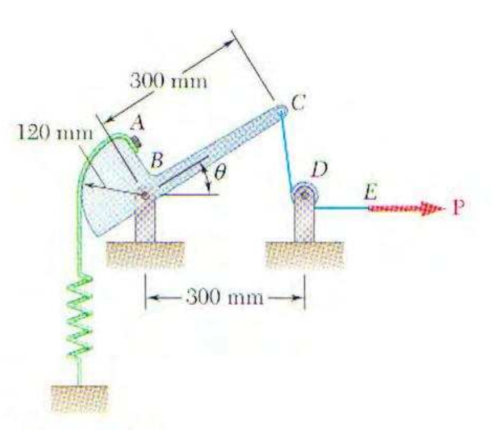


Figura P10.38

10.39 La palanca AB mostrada en la figura se une al eje horizontal BC que pasa a través del cojinete y está soldado sobre el apoyo fijo en C. La constante de torsión del resorte del eje BC es K; esto es, se requiere de un par de magnitud K para rotar 1 radián al extremo B del eje. Si se sabe que el eje no está sometido a torsión cuando la palanca AB está en posición horizontal, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio si $P = 100$ N, $l = 250$ mm y $K = 12.5$ N · m/rad.

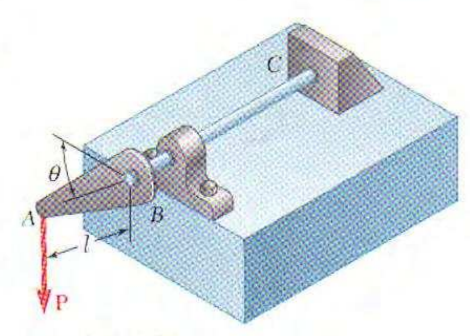


Figura P10.39

10.40 Retome el problema 10.39, y ahora suponga que $P = 350$ N, $l = 250$ mm y $K = 12.5$ N · m/rad. Obtenga respuestas en cada uno de los cuadrantes siguientes: $0 < \theta < 90°$, $270° < \theta < 360°$ y $360° < \theta < 450°$.

10.41 La posición del pescante ABC se controla mediante un cilindro hidráulico BD. Para la carga mostrada, determine la fuerza que ejerce el cilindro sobre el pasador B cuando $\theta = 65°$.

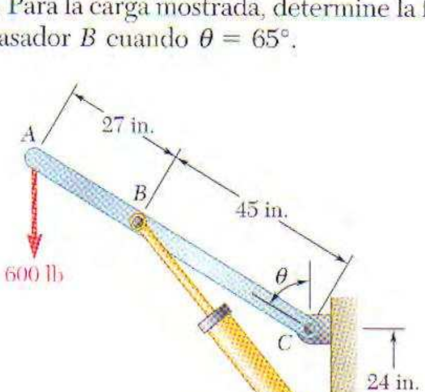


Figura *P10.41* y *P10.42*

10.42 La posición del pescante ABC se controla mediante un cilindro hidráulico BD. Para la carga mostrada, *a*) exprese la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador B en función de la longitud BD, *b*) determine el valor mínimo posible del ángulo θ si la fuerza máxima que el cilindro puede ejercer sobre el pasador B es de 2.5 kips.

10.43 La posición del elemento ABC se controla por medio del cilindro hidráulico CD, como se muestra en la figura. Para la carga mostrada, determine la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador C cuando $\theta = 55°$.

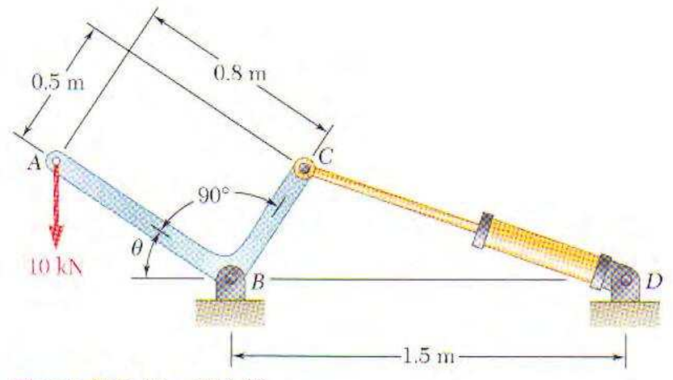


Figura P10.43 y P10.44

10.44 La posición del elemento ABC se controla por medio del cilindro hidráulico CD, como se muestra en la figura. Si se sabe que el cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 15 kN sobre el pasador C, determine el valor del ángulo θ.

10.45 El brazo de extensión telescópica ABC se utiliza para levantar una plataforma con trabajadores de la construcción. El peso conjunto de los trabajadores y de la plataforma es de 500 lb y su centro de gravedad combinado se localiza directamente por encima de C. Para la posición en la cual $\theta = 20°$, determine la fuerza ejercida sobre el pasador B por el cilindro hidráulico único BD.

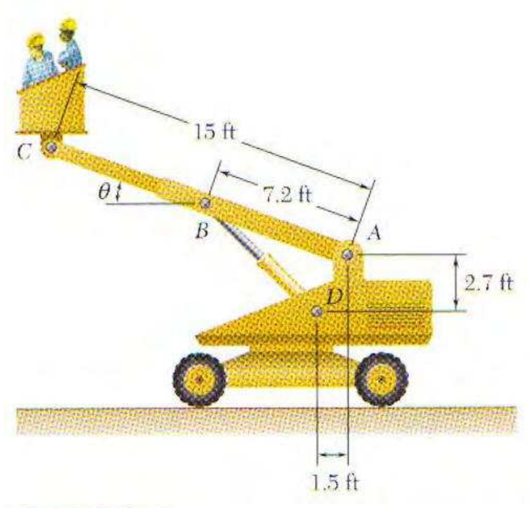


Figura P10.45

10.46 Retome el problema 10.45, y ahora suponga que los trabajadores descienden hasta un punto cercano al suelo, de modo que $\theta = -20°$.

10.47 Un bloque de peso W se jala mediante una fuerza **P** dirigida hacia arriba de un plano el cual está inclinado a un ángulo α con respecto a la horizontal. Si μ es el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano, deduzca una expresión para la eficiencia mecánica del sistema. También demuestre que la eficiencia mecánica no puede ser mayor de $\frac{1}{2}$ si se desea que el bloque permanezca en su lugar cuando se retira la fuerza **P**.

10.48 Si se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el bloque que se encuentra unido a la barra ACE y la superficie horizontal que se muestra en la figura, deduzca expresiones en términos de P, μ_s y θ, a fin de determinar la magnitud máxima y mínima de la fuerza **Q** para que el sistema se mantenga en equilibrio.

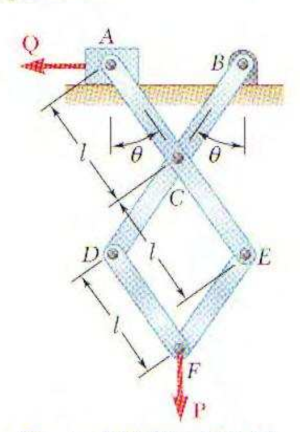


Figura *P10.48* y P10.49

10.49 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque que se encuentra unido a la barra ACE y la superficie horizontal que se muestra en la figura es de 0.15, determine las magnitudes máxima y mínima de la fuerza **Q** con las que el sistema se mantiene en equilibrio, para valores de $\theta = 30°$, $l = 0.2$ m y $P = 40$ N.

10.50 Si se representa con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical, deduzca una expresión a fin de determinar la magnitud máxima del par $\mathbf{M}$ para que el sistema se mantenga en equilibrio en la posición que se muestra en la figura. Explique qué pasa si $\mu_s \geq \tan\theta$.

10.51 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical es de 0.40, determine las magnitudes máxima y mínima del par $\mathbf{M}$ para que el sistema se mantenga en equilibrio en la posición mostrada en la figura, cuando $\theta = 35°$, $l = 600$ mm y $P = 300$ N.

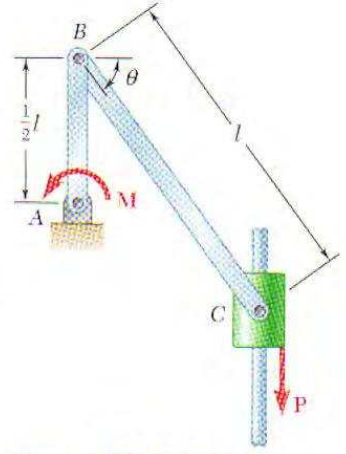


Figura *P10.50* y P10.51

10.52 Obtenga una expresión para determinar la eficiencia mecánica del gato mecánico analizado en la sección 8.6. Demuestre que si el gato debe ser autobloqueante, la eficiencia mecánica no puede ser mayor de $\frac{1}{2}$.

10.53 Con el método del trabajo virtual, determine la reacción en el punto E de la viga mostrada en la figura.

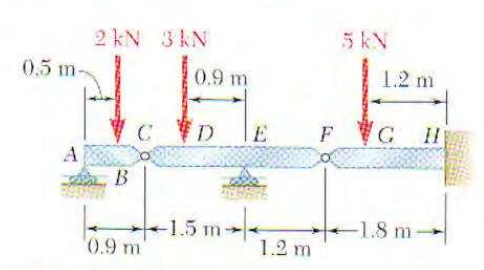


Figura P10.53 y P10.54

10.54 Con el método del trabajo virtual, determine por separado la fuerza y el par que representan la reacción en el punto H de la viga mostrada en la figura.

10.55 Con referencia al problema 10.43, utilice el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico CD y determine el cambio en la longitud de CD requerido para elevar 15 mm la carga de 10 kN.

10.56 Con referencia al problema 10.45, utilice el valor encontrado para la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico BD y determine el cambio en la longitud de BD requerido para elevar 2.5 in. la plataforma unida en C.

10.57 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento vertical del nodo D si la longitud del elemento BF se incrementa en 1.5 in. (*Sugerencia*: Aplique una carga vertical en el nodo D y utilice los métodos del capítulo 6 para calcular la fuerza ejercida por el elemento BF sobre los nodos B y F. Después aplique el método del trabajo virtual para un desplazamiento virtual equivalente al incremento en la longitud del elemento BF. Este método debe usarse sólo cuando hay pequeños cambios en la longitud de los elementos.)

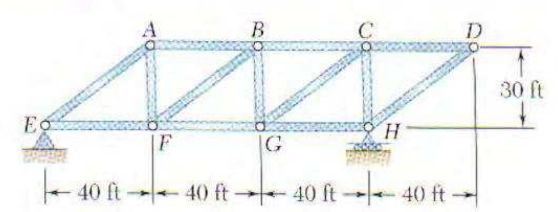


Figura P10.57 y P10.58

10.58 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento horizontal del nodo D si la longitud del elemento BF se incrementa en 1.5 in. (Vea la sugerencia para el problema 10.57.)

*10.6. TRABAJO DE UNA FUERZA DURANTE UN DESPLAZAMIENTO FINITO

Considere una fuerza **F** que actúa sobre una partícula. El trabajo de **F** correspondiente a un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{r}$ de la partícula se definió en la sección 10.2 como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.1)$$

El trabajo de **F** correspondiente a un desplazamiento finito de la partícula desde A_1 hasta A_2 (figura 10.10*a*) se denota con $U_{1\to2}$ y se obtiene integrando la ecuación (10.1) a lo largo de la curva que sigue la partícula:

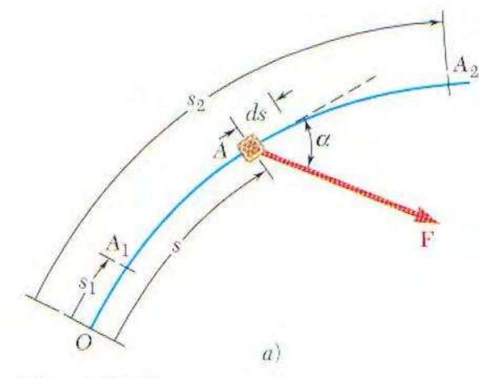
$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.11)$$

Con la expresión alternativa

$$dU = F\,ds\,\cos\alpha \qquad (10.1')$$

dada en la sección 10.2 para el trabajo elemental dU, también es posible expresar el trabajo $U_{1\to2}$ como

$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\,ds \qquad (10.11')$$



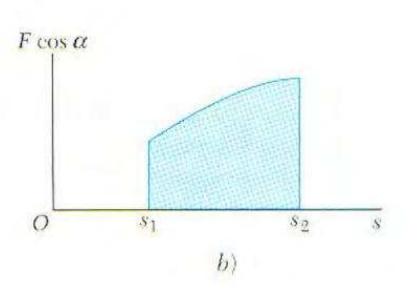


Figura 10.10

donde la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria. También el trabajo $U_{1\to2}$ está representado por el área bajo la curva que se obtiene al graficar $F\cos\alpha$ contra s (figura 10.10*b*). En el caso de que la magnitud de la fuerza **F** que actúa en dirección del movimiento es constante, entonces de la fórmula (10.11′) se obtiene que $U_{1\to2} = F(s_2 - s_1)$.

Si se recuerda la sección 10.2, el trabajo de un par de momento **M** que se genera durante una rotación infinitesimal $d\theta$ de un cuerpo rígido es

$$dU = M\,d\theta \qquad (10.2)$$

entonces el trabajo de un par durante una rotación finita del cuerpo puede expresarse como:

$$U_{1\to2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \qquad (10.12)$$

En el caso de un par de magnitud constante, de la fórmula (10.12) se obtiene:

$$U_{1\to2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Trabajo de un peso. En la sección 10.2 se estableció que el trabajo de un peso **W** de un cuerpo durante un desplazamiento infinitesimal de éste es igual al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo. Si el eje y se dirige hacia arriba, entonces el trabajo de **W** realizado durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 10.11) se obtiene escribiendo

$$dU = -W\,dy$$

Integrando desde A_1 hasta A_2, se tiene

$$U_{1\to2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\,dy = Wy_1 - Wy_2 \qquad (10.13)$$

o

$$U_{1\to2} = -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y \qquad (10.13')$$

donde Δy representa el desplazamiento vertical desde A_1 hasta A_2. Por tanto, el trabajo del peso **W** es igual *al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo*. Note que el trabajo es *positivo* cuando $\Delta y < 0$, esto es, *cuando el cuerpo se mueve hacia abajo*.

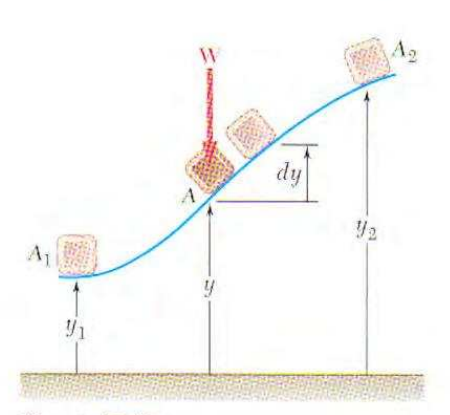


Figura 10.11

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte. Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que el resorte está sin estirar cuando el cuerpo está en A_0 (figura 10.12*a*). La evidencia experimental muestra que la magnitud de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo A es directamente proporcional a la deflexión x del resorte, medida a partir de la posición A_0. Esto es:

$$F = kx \qquad (10.14)$$

donde k es la *constante del resorte* expresada en N/m si se usan unidades del SI y en lb/ft o lb/in. si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos. El trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtiene escribiendo

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (10.15)$$

Se debe tener cuidado de expresar a k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, entonces k debe expresarse en lb/ft y x en pies o k en lb/in. y x en pulgadas; en el primer caso, el trabajo se obtiene en ft · lb y en el segundo en in. · lb. Además, note que el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es *positivo* cuando $x_2 < x_1$, esto es, *cuando el resorte está regresando a su posición sin estirar*.

Como la ecuación (10.14) representa la ecuación de una línea recta que pasa por el origen con una pendiente k, el trabajo $U_{1\to2}$ de **F** durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 se puede obtener al evaluar el área bajo la curva del trapezoide mostrado en la figura 10.12*b*. Esto puede hacerse al calcular los valores de F_1 y F_2 y multiplicando la base Δx del trapezoide por su altura media $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Como el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx entonces, se puede escribir

$$U_{1\to2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \qquad (10.16)$$

La fórmula (10.16) es usualmente más útil que la fórmula (10.15), debido a que en ésta se reducen las posibilidades de confundir las unidades involucradas.

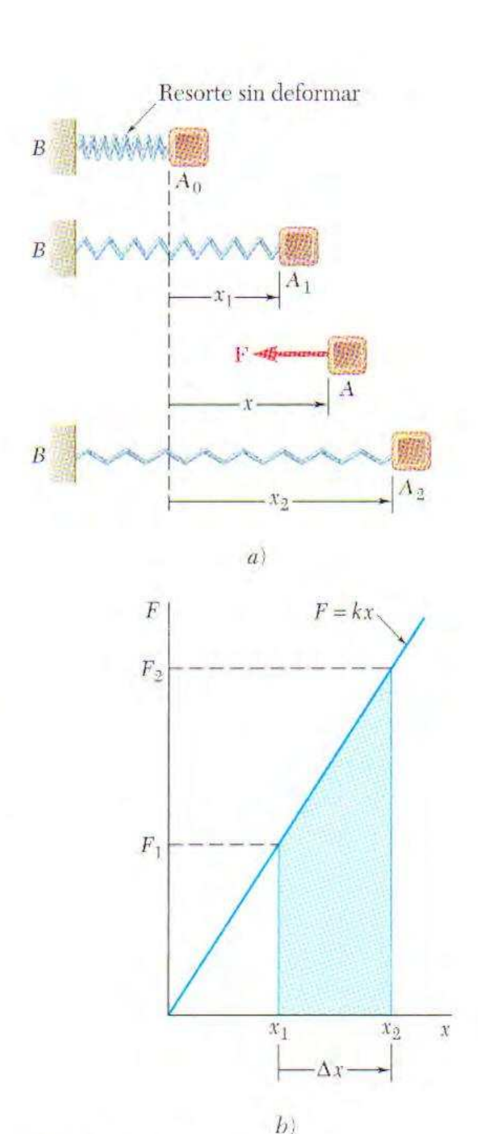


Figura 10.12

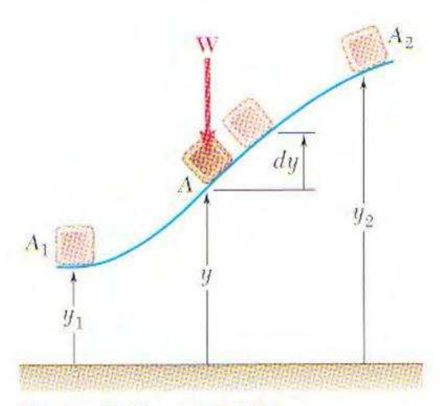


Figura 10.11 (*repetida*)

*10.7. ENERGÍA POTENCIAL

Considere otra vez el cuerpo de la figura 10. 11, en donde se observa con base en la ecuación (10.13) que el trabajo del peso **W** durante un desplazamiento finito se obtiene al restar el valor de la función Wy correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. Por tanto, el trabajo de **W** es independiente de la trayectoria que se siga; esto es, sólo depende de los valores iniciales y finales de la función Wy. A esta función se le llama *energía potencial* del cuerpo con respecto a la fuerza de gravedad **W** y se le representa con V_g. Por tanto, se escribe

$$U_{1\rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \qquad \text{con } V_g = Wy \tag{10.17}$$

Note que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, esto es, *si la energía potencial se incrementa* durante el desplazamiento (como sucede en el caso considerado aquí), *el trabajo* $U_{1\rightarrow 2}$ *es negativo*. Por otra parte, si el trabajo de **W** es positivo, la energía potencial disminuye. Por tanto, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del *trabajo que puede ser realizado* por su peso **W**. Como en la fórmula (10.17) sólo se involucran los *cambios* en la energía potencial y no el valor real de V_g, entonces se puede agregar una constante arbitraria a la expresión obtenida para V_g. En otras palabras, el nivel de referencia a partir del cual se mide la elevación y se puede seleccionar arbitrariamente. Nótese que la energía potencial está expresada en las mismas unidades que el trabajo, es decir, en joules (J) si se usan unidades del SI[†] y en ft · lb o en in. · lb si se utilizan las unidades de uso común en Estados Unidos.

Considere ahora el cuerpo mostrado en la figura 10.12*a*; se nota con base en la ecuación (10.15) que el trabajo de la fuerza elástica **F** se obtiene al restar el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo del valor correspondiente a la primera posición del mismo. Esta función se representa con V_e y se le llama *energía potencial* del cuerpo con respecto a la *fuerza elástica* **F**. Por tanto, se escribe

$$U_{1\rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \qquad \text{con } V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{10.18}$$

y se observa que durante el desplazamiento considerado, el trabajo de la fuerza **F** ejercida por el resorte sobre el cuerpo es negativo y por tanto la energía potencial V_e se incrementa. Note que la expresión que se obtuvo para V_e es válida sólo si la elongación del resorte se mide a partir de la posición sin deformar del mismo.

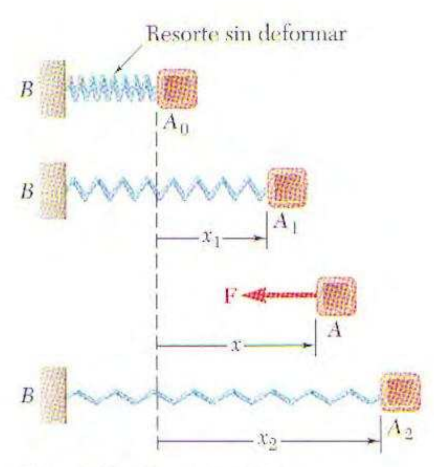


Figura 10.12a (*repetida*)

El concepto de energía potencial se puede extender a otros tipos de fuerzas diferentes a las gravitatorias y elásticas aquí consideradas. Éste sigue siendo válido mientras el trabajo elemental dU de las fuerzas bajo consideración sea una *diferencial exacta*. Por tanto, es posible encontrar una función V, llamada energía potencial, tal que

$$dU = -dV \tag{10.19}$$

Integrando la ecuación (10.19) sobre un desplazamiento finito, se obtiene la fórmula general

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \tag{10.20}$$

la cual expresa que el *trabajo de la fuerza es independiente de la trayectoria seguida y es igual al valor negativo del cambio en energía potencial*. Una fuerza que satisface la ecuación (10.20) se dice que es una *fuerza conservativa*.[‡]

[†] Véase la nota al pie de la página 559 de este capítulo.

[‡] En la sección 13.7 de *Dinámica* se presenta una exposición detallada de las fuerzas conservativas.

*10.8. ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

La aplicación del principio del trabajo virtual se simplifica en forma considerable cuando se conoce la energía potencial del sistema. En el caso de un desplazamiento virtual, la fórmula (10.19) se transforma en $\delta U = -\delta V$. Además, si la posición del sistema está definida por una sola variable independiente θ, entonces se puede escribir que $\delta V = (dV/d\theta)\,\delta\theta$. Como $\delta\theta$ debe ser diferente a cero, la condición $\delta U = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \tag{10.21}$$

Por tanto, en términos de la energía potencial, el principio del trabajo virtual establece que *si un sistema está en equilibrio, la derivada de su energía potencial total es cero*. Si la posición del sistema depende de diversas variables independientes (esto es, si el sistema *tiene varios grados de libertad*), las derivadas parciales de V con respecto a cada una de las variables independientes debe ser cero.

Por ejemplo, considere una estructura hecha de dos elementos AC y CB que sostiene una carga W en C. La estructura se sostiene mediante un perno en A y un rodillo en B y un resorte BD une B al punto fijo D (figura 10.13*a*). El resorte tiene una constante k y se supone que su longitud natural es igual a AD y, por tanto, el resorte está sin estirar cuando B coincide con A. Sin tomar en cuenta las fuerzas de fricción y el peso de los elementos, se encuentra que las únicas fuerzas que realizan trabajo durante un desplazamiento de la armadura son el peso **W** y la fuerza **F** ejercida por el resorte en el punto B (figura 10.13*b*). De esta manera, la energía potencial total del sistema se obtiene al sumar la energía potencial V_g correspondiente a la fuerza de gravedad **W** y la energía potencial V_e correspondiente a la fuerza elástica **F**.

Al seleccionar un sistema de ejes coordenados con origen en A y observar que la elongación del resorte medida a partir de su posición sin estirar es $AB = x_B$, se escribe

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_B^2 \qquad V_g = Wy_C$$

Expresando las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ, se tiene

$$x_B = 2l \text{ sen } \theta \qquad y_C = l \cos \theta$$
$$V_e = \tfrac{1}{2}k(2l \text{ sen } \theta)^2 \qquad V_g = W(l \cos \theta)$$
$$V = V_e + V_g = 2kl^2 \text{ sen}^2 \theta + Wl \cos \theta \tag{10.22}$$

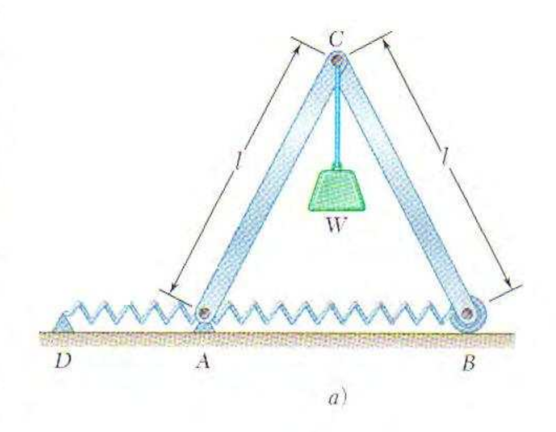
Las posiciones de equilibrio del sistema se obtienen igualando a cero la derivada de la energía potencial V. Por tanto, se escribe

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2 \text{ sen } \theta \cos \theta - Wl \text{ sen } \theta = 0$$

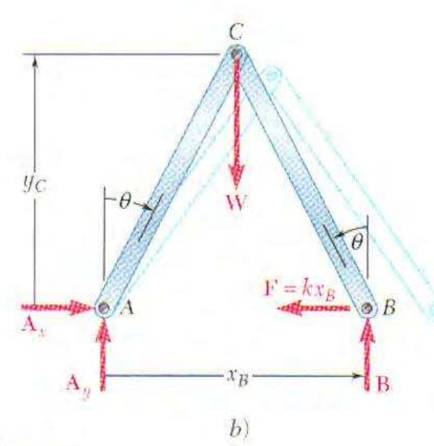
o bien, factorizando l sen θ,

$$\frac{dV}{d\theta} = l \text{ sen } \theta(4kl \cos \theta - W) = 0$$

Así, hay dos posiciones de equilibrio que corresponden, respectivamente, a los valores de $\theta = 0$ y $\theta = \cos^{-1}(W/4kl)$.[†]



a)



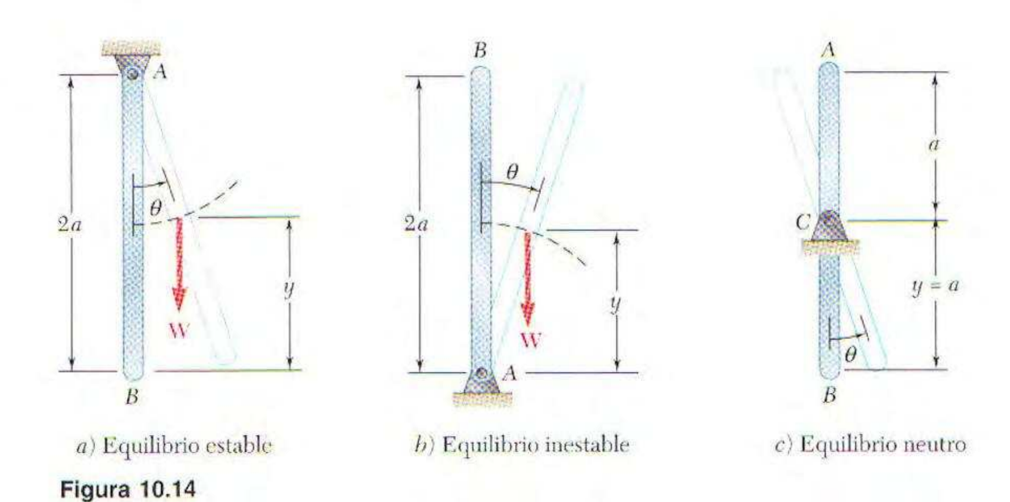
b)

Figura 10.13

[†]La segunda posición no existe si $W > 4kl$.

*10.9. ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Considere las tres barras uniformes de longitud $2a$ y peso **W** mostradas en la figura 10.14. Aunque cada una de ellas está en equilibrio, existe una diferencia importante entre estos tres casos. Suponga que se perturba ligeramente la posición de equilibrio de cada una de estas barras y después se les deja libres: la barra *a* regresará a su posición original, la barra *b* se mantendrá alejándose cada vez más de su posición inicial mientras que la barra *c* permanecerá en su nueva posición. En el caso *a* se dice que el equilibrio de la barra es *estable*; en el caso *b* que es *inestable*, mientras que en el caso *c* es *neutro*.



a) Equilibrio estable *b*) Equilibrio inestable *c*) Equilibrio neutro

Figura 10.14

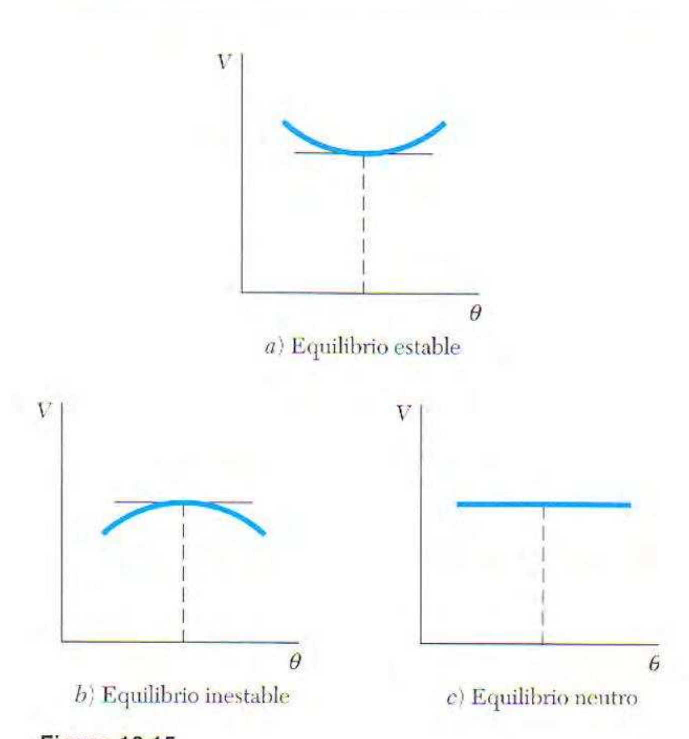
Recuerde de la sección 10.7 que la energía potencial V_g con respecto a la gravedad es Wy, en donde y es la elevación del punto de aplicación de **W** medida a partir de un nivel arbitrario de referencia, se puede observar que la energía potencial de la barra de la figura 10.14*a* es mínima en la posición de equilibrio considerada mientras que en el caso de la barra de la figura 10.14*b* la energía potencial es máxima. En cambio, en la barra de la figura 10.14*c* la energía potencial permanece constante. Por tanto, el equilibrio es *estable*, *inestable* o *neutro*, lo cual depende de si la energía potencial tiene un valor *mínimo*, *máximo* o *constante* (figura 10.15).

Como el resultado anterior es muy general, se le puede ver de la siguiente manera: primero, se puede observar que una fuerza siempre tiende a realizar trabajo positivo y por tanto, reduce la energía potencial del sistema al cual se aplica. Entonces, cuando un sistema es perturbado de su posición de equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él tienden a restaurarlo a su posición original si V es mínima (figura 10.15*a*) o tiende a moverlo lejos de dicha posición si V es máxima (figura 10.5*b*). Pero si V es constante (figura 10.15*c*), entonces las fuerzas no tienden a mover al sistema en ninguna forma posible.

Recuerde del cálculo diferencial que una función es mínima o máxima dependiendo de que su segunda derivada sea positiva o negativa; en resumen, se puede decir que las condiciones de equilibrio para un sistema con un grado de libertad (es decir, la posición del sis-

tema queda definida en todo instante por una sola variable independiente θ) son las siguientes:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0\text{: equilibrio estable}$$
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0\text{: equilibrio inestable} \tag{10.23}$$



a) Equilibrio estable

b) Equilibrio inestable

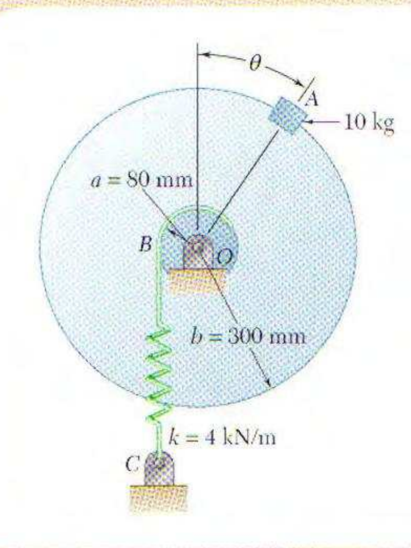
c) Equilibrio neutro

Figura 10.15

Si la primera y la segunda derivadas de V son cero, será necesario analizar las derivadas de orden superior para determinar si el equilibrio es estable, inestable o neutro. El equilibrio es neutro si todas las derivadas son cero, puesto que en este caso la energía potencial V es constante. El equilibrio es estable si la primera derivada que se tiene un valor diferente de cero es de orden par y positiva. En todos los demás casos, el equilibrio es inestable.

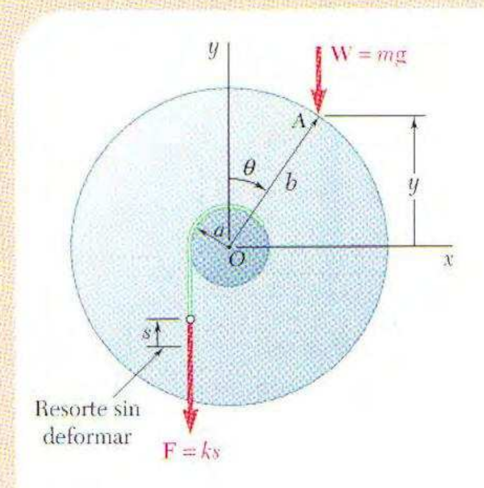
Si el sistema en estudio tiene *varios grados de libertad*, entonces la energía potencial V depende de diversas variables, por esta razón es necesario recurrir a la aplicación de la teoría para este tipo de funciones y determinar si V es mínima. Se puede demostrar que un sistema con 2 grados de libertad es estable y que la energía potencial correspondiente $V(\theta_1, \theta_2)$ es mínima siempre y cuando se cumplan de manera simultánea las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1\, \partial \theta_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} < 0 \tag{10.24}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} > 0$$



PROBLEMA RESUELTO 10.4

Un bloque de 10 kg se fija al borde de un disco de 300 mm de radio, como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte BC está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine la posición o posiciones de equilibrio del sistema y establezca, en cada caso, si el equilibrio es estable, inestable o neutro.



SOLUCIÓN

Energía potencial. Represente con s la elongación del resorte, medida a partir de su posición sin deformar y ubique el origen de un sistema de coordenadas en O, se obtendrá

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \qquad V_g = Wy = mgy$$

Midiendo θ en radianes, se tiene

$$s = a\theta \qquad y = b\cos\theta$$

Al sustituir los valores de s y y en las expresiones de V_e y V_g se escribe

$$V_e = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 \qquad V_g = mgb\cos\theta$$

$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}ka^2\theta^2 + mgb\cos\theta$$

Posiciones de equilibrio. Si se establece $dV/d\theta = 0$, se escribe

$$\frac{dV}{d\theta} = ka^2\theta - mgb\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta$$

Sustituya $a = 0.08$ m, $b = 0.3$ m, $k = 4$ kN/m y $m = 10$ kg, se obtiene

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2}{(10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})}\theta$$

$$\text{sen}\,\theta = 0.8699\,\theta$$

donde θ está expresada en radianes. Si busca numéricamente el valor de θ, se encuentra

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = 0.902\text{ rad}$$

$$\theta = 0 \quad \text{y} \quad \theta = 51.7° \quad ◀$$

Estabilidad del equilibrio. La segunda derivada de la energía potencial V con respecto a θ es

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb\cos\theta$$

$$= (4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2 - (10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})\cos\theta$$

$$= 25.6 - 29.43\cos\theta$$

Para $\theta = 0$: $\qquad \dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43\cos 0 = -3.83 < 0$

El equilibrio es inestable para $\theta = 0$ ◀

Para $\theta = 51.7°$: $\qquad \dfrac{d^2V}{d\theta^2} = 25.6 - 29.43\cos 51.7° = +7.36 > 0$

El equilibrio es estable para $\theta = 51.7°$ ◀

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definió el *trabajo que realiza una fuerza durante un desplazamiento finito* y la *energía potencial* de un cuerpo rígido o un sistema de cuerpos rígidos. Se aprendió cómo utilizar el concepto de energía potencial para determinar la *posición de equilibrio* de un cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos.

1. *La energía potencial V de un sistema* es la suma de energías potenciales asociadas con las diversas fuerzas que actúan sobre el mismo y que *realizan trabajo* conforme dicho sistema se mueve. En los problemas de esta sección se deberá determinar lo siguiente:

a) La energía potencial de un peso. Ésta es la energía potencial debida a la *gravedad*, $V_g = Wy$, donde y es la elevación del peso W medida desde un nivel arbitrario de referencia. Note que la energía potencial V_g puede usarse con cualquier fuerza vertical **P** de magnitud constante y dirigida hacia abajo; por tanto, se escribe que $V_g = Py$.

b) Energía potencial de un resorte. Ésta es la energía potencial $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, debida a las fuerzas *elásticas* ejercidas por un resorte, en donde k es la constante del resorte y x es la deformación del resorte *medida desde su posición sin estirar*.

Las reacciones en apoyos fijos, las fuerzas internas en las uniones, las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles y otras fuerzas que no realizan trabajo no hacen ninguna contribución a la energía potencial del sistema.

2. *Se deben expresar todas las distancias y los ángulos en términos de una sola variable*, como el ángulo θ, cuando se esté calculando la energía potencial V del sistema. Esto es necesario porque para poder determinar la posición de equilibrio del sistema se requiere calcular la derivada $dV/d\theta$.

3. *Cuando un sistema está en equilibrio, la primera derivada de la energía potencial es cero.* Por tanto:

a) Para determinar la posición de equilibrio de un sistema, después de que la energía potencial V haya sido expresada en función de una sola variable θ, se debe calcular su derivada y después resolver la ecuación resultante $dV/d\theta = 0$ para determinar el valor de θ.

b) Para determinar la fuerza o par requerido para mantener al sistema en una posición dada de equilibrio, se debe sustituir el valor conocido de θ en la ecuación de $dV/d\theta = 0$ y obtener la solución de ésta para poder determinar los valores deseados de fuerza o par.

4. *Estabilidad del equilibrio.* Por lo general se deben aplicar las siguientes reglas:

a) El equilibrio estable ocurre cuando la energía potencial del sistema es *mínima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 > 0$ (figuras 10.14*a* y 10.15*a*).

b) El equilibrio inestable ocurre cuando la energía potencial del sistema es *máxima*, esto es, cuando $dV/d\theta = 0$ y $d^2V/d\theta^2 < 0$ (figuras 10.14*b* y 10.15*b*).

c) El equilibrio neutro ocurre cuando la energía potencial del sistema es *constante*, por tanto, $dV/d\theta$, $dV^2/d\theta^2$, así como todas las derivadas sucesivas de V son iguales a cero (figuras 10.14*c* y 10.15*c*).

Véase la página 583 para una exposición del caso cuando se tiene $dV/d\theta$ y $dV^2/d\theta^2$, pero *no todas* las derivadas sucesivas de V son iguales a cero.

Problemas

10.59 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.29.

10.60 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.30.

10.61 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.33.

10.62 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.34.

10.63 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.35.

10.64 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.36.

10.65 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.31.

10.66 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.38.

10.67 Demuestre que en el problema 10.1 el equilibrio es neutro.

10.68 Demuestre que en el problema 10.6 el equilibrio es neutro.

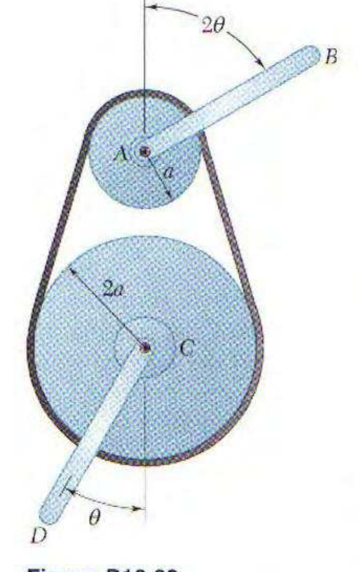


Figura P10.69

10.69 Dos barras uniformes idénticas, cada una con masa m y longitud l, están unidas a las poleas que se conectan por medio de una banda como se muestra en la figura. Si se supone que no existe deslizamiento entre la banda y las poleas, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.70 Dos barras uniformes AB y CD, con la misma longitud l, están unidas a los engranes mostrados en la figura. Si se sabe que la barra AB pesa 3 lb y que la barra CD pesa 2 lb, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

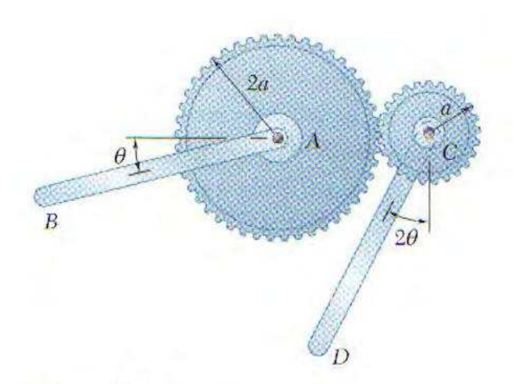


Figura P10.70

10.71 Dos barras uniformes, cada una de masa m, están unidas a los engranes de radio idéntico que se muestran en la figura. Determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

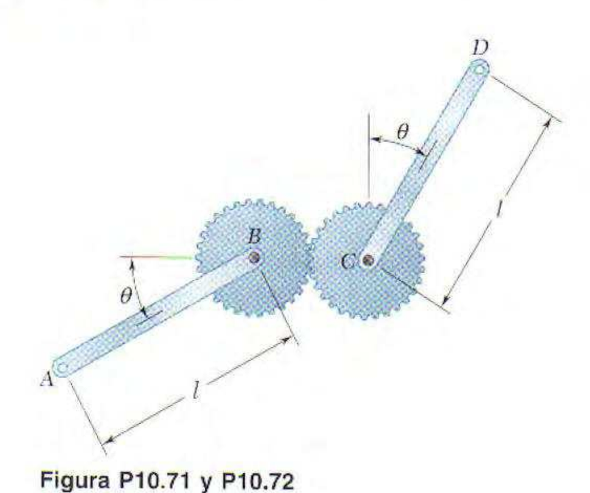


Figura P10.71 y P10.72

10.72 Dos barras uniformes, AB y CD, están unidas a los engranes de radio idéntico que se muestran en la figura. Si se sabe que $W_{AB} = 8$ lb y que $W_{CD} = 4$ lb, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.73 Con el método de la sección 10.8 retome el problema 10.39 y determine si el equilibrio es estable, inestable o neutro. (*Sugerencia*: La energía potencial correspondiente al par ejercido por un resorte de torsión es $\frac{1}{2}K\theta^2$, donde K es la constante torsional del resorte y θ es el ángulo de torsión.)

10.74 En el problema 10.40 determine si cada una de las posiciones de equilibrio es estable, inestable o neutra. (Vea la sugerencia del problema 10.73.)

10.75 Una carga **W** con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo mostrado en la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 15°$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.

10.76 Una carga **W** con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo mostrado en la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 30°$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.

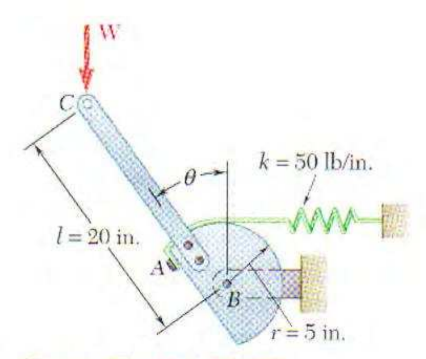
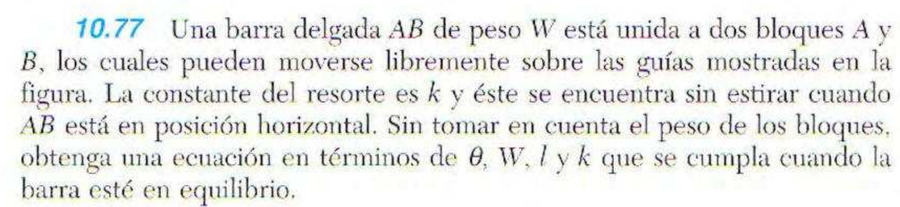


Figura *P10.75* y *P10.76*



10.77 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, obtenga una ecuación en términos de θ, W, l y k que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio.

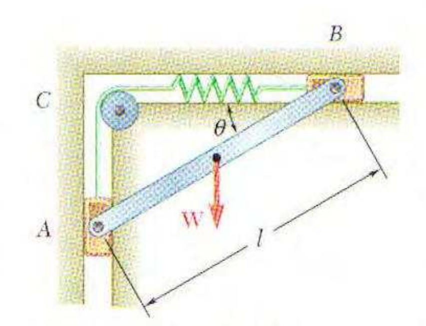


Figura *P10.77* y P10.78

10.78 Una barra delgada AB de peso W está unida a dos bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que el resorte se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal, determine tres valores de θ correspondientes a la posición de equilibrio cuando $W = 300$ lb, $l = 16$ in. y $k = 75$ lb/in. Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.79 Una barra delgada AB, de peso W, está unida a dos bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $y = 0$, determine el valor de y correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 80$ N, $l = 500$ mm y $k = 600$ N/m.

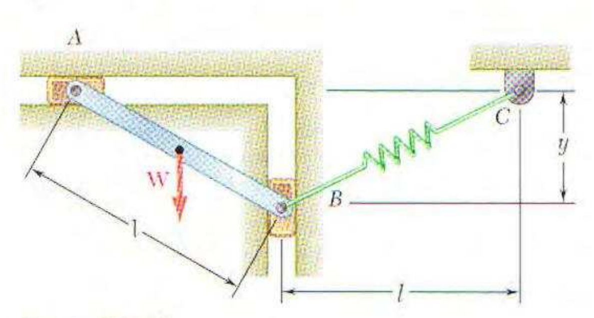


Figura P10.79

10.80 Si los dos resortes que se muestran en la figura están sin estirar cuando $y = 0$, determine el valor de y correspondiente al equilibrio cuando $W = 80$ N, $l = 500$ mm y $k = 600$ N/m.

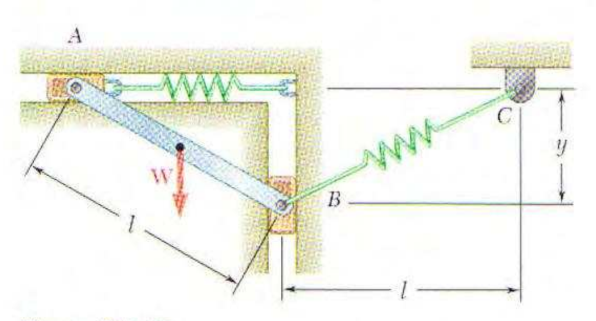


Figura P10.80

10.81 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como muestra la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine dos valores de θ correspondientes a posiciones de equilibrio cuando $P = 30$ lb, $a = 4$ in., $b = 3$ in., $r = 6$ in. y $k = 5$ lb/in. Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

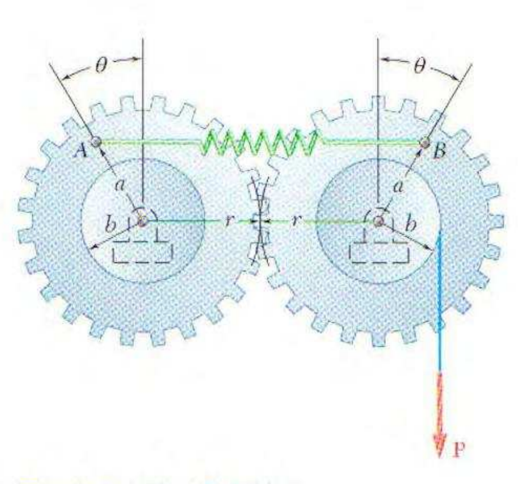


Figura P10.81 y *P10.82*

10.82 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, y dado que $a = 60$ mm, $b = 45$ mm, $r = 90$ mm y $k = 6$ kN/m, determine *a*) el intervalo de valores de P para los cuales existe una posición de equilibrio, *b*) dos valores de θ correspondientes a posiciones de equilibrio si el valor de P es igual a la mitad del límite superior del intervalo que se encontró en el inciso *a*).

10.83 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B, los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30°$ y que $P = Q = 400$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.84 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B, los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30°$, $P = 100$ N y $Q = 25$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

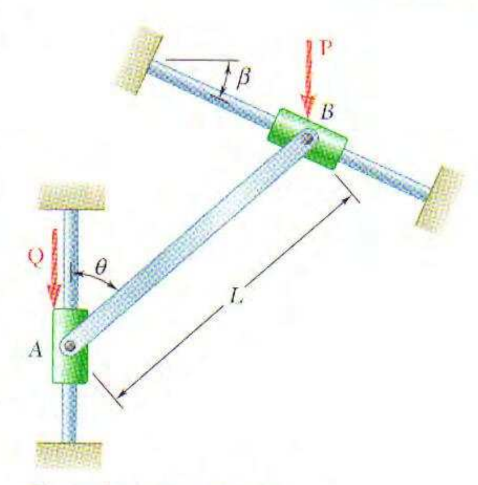


Figura P10.83 y *P10.84*

10.85 y 10.86 En las figuras se muestra un collarín A que puede deslizarse libremente sobre la barra semicircular. Si se sabe que la constante del resorte es k y que la longitud sin estirar del resorte es igual al radio r, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 50$ lb, $r = 9$ in. y $k = 15$ lb/in.

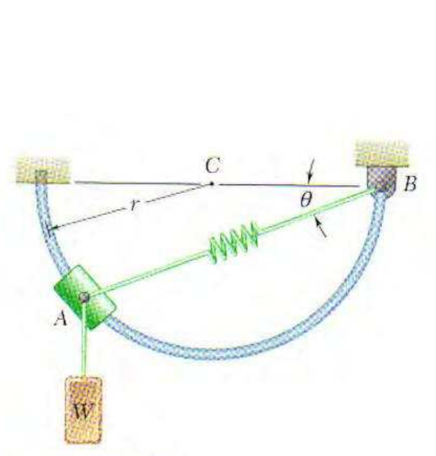


Figura P10.85

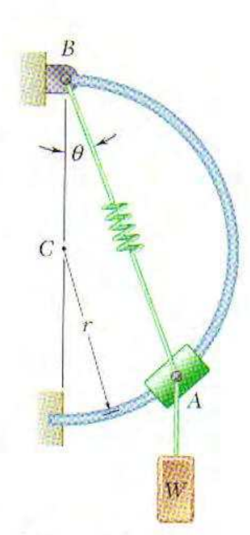


Figura P10.86

10.87 **y 10.88** El carrito B, que pesa 75 kN, rueda a lo largo de una pista inclinada que forma un ángulo β con la horizontal. La constante del resorte es de 5 kN/m y éste se encuentra sin estirar cuando $x = 0$. Determine la distancia x correspondiente al equilibrio para el ángulo β indicado.

10.87 Ángulo $\beta = 30°$

10.88 Ángulo $\beta = 60°$

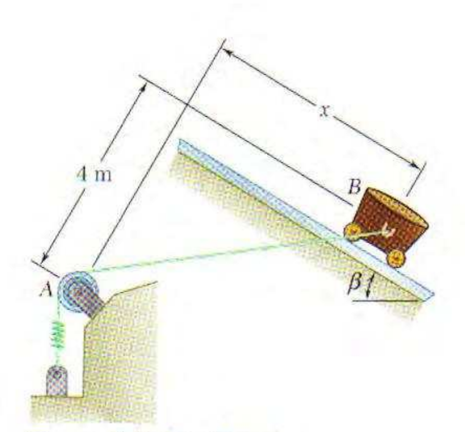


Figura *P10.87* y P10.88

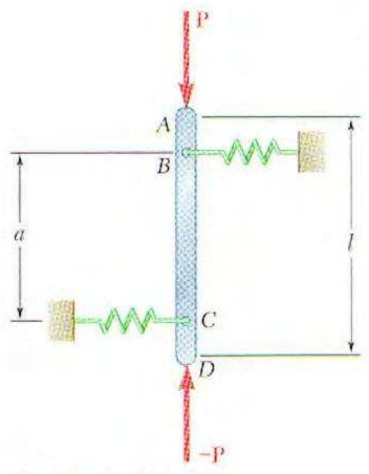


Figura *P10.89*

10.89 Una barra vertical AD está unida a dos resortes de constante k y se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. Determine el intervalo de valores de la magnitud P de dos fuerzas verticales iguales y opuestas **P** y −**P**, para las cuales la posición de equilibrio es estable si *a*) $AB = CD$, *b*) $AB = 2CD$.

10.90 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno con constante k. Si $h = 25$ in., $d = 12$ in., y $W = 80$ lb, determine el intervalo de valores de k para los cuales la barra está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar, tanto en tensión, como en compresión.

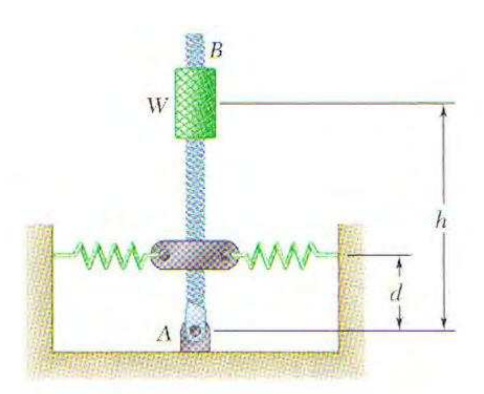


Figura P10.90 y P10.91

10.91 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno con constante k. Si $h = 45$ in., $k = 6$ lb/in. y $W = 60$ lb, determine la distancia mínima d para que la barra esté en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar, tanto en tensión, como en compresión.

10.92 y 10.93 En la figura se muestran dos barras unidas a un resorte de constante k el cual se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición vertical. Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura.

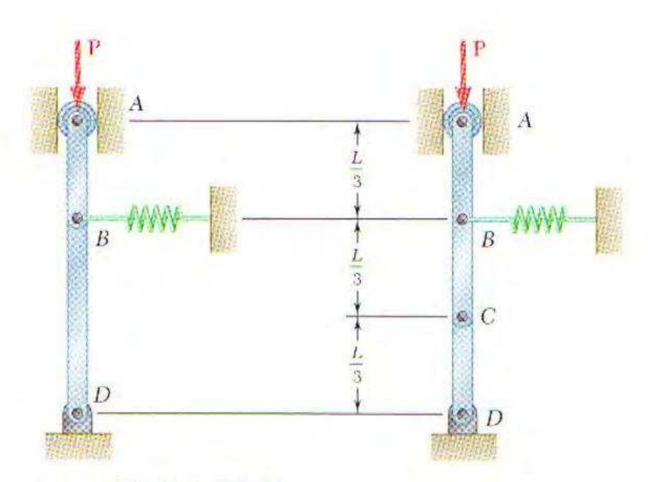


Figura P10.92 y P10.93

10.94 En la figura se muestran dos barras AB y BC unidas a un resorte de constante k, el cual se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición vertical. Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura.

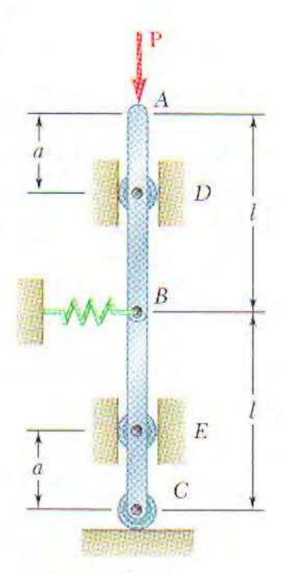


Figura P10.94

10.95 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DF. Determine el intervalo de valores de Q para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada, cuando $a = 24$ in., $b = 20$ in. y $P = 150$ lb.

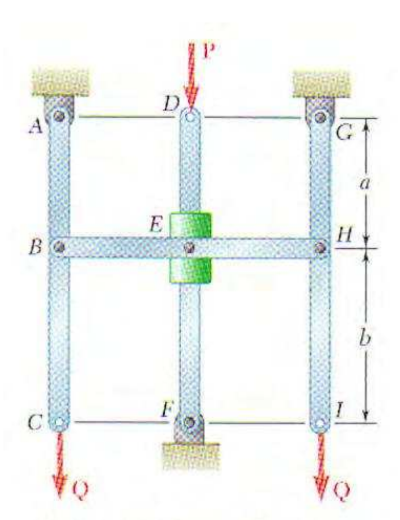


Figura *P10.95* y P10.96

10.96 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DF. Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada, cuando $a = 150$ mm, $b = 200$ mm y $Q = 45$ N.

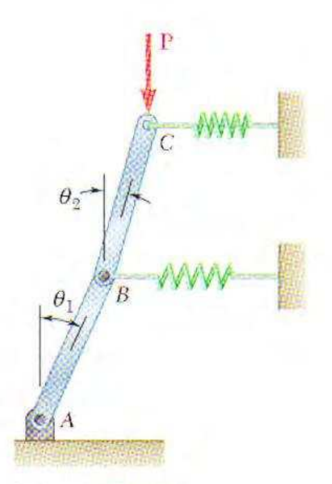


Figura *P10.97*

****10.97*** Las barras AB y BC que se muestran en la figura, cada una de longitud l y peso despreciable, están unidas a dos resortes, cada uno de constante k. El sistema está en equilibrio y los resortes se encuentran sin deformar cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Determine el intervalo de valores de P para los cuales la posición de equilibrio del sistema es estable.

***10.98** Retome el problema 10.97, y ahora suponga que $l = 800$ mm y que $k = 2.5$ kN/m.

****10.99*** Dos barras de peso despreciable están unidas a tambores de radio r, que a su vez se conectan mediante una banda y un resorte de constante k. Si se sabe que el resorte se encuentra sin deformar cuando las barras están en posición vertical, determine el intervalo de valores de P para los cuales la posición de equilibrio en $\theta_1 = \theta_2 = 0$ es estable.

****10.100*** Retome el problema 10.99, y ahora suponga que $k = 20$ lb/in., $r = 3$ in., $l = 6$ in. y *a*) $W = 15$ lb, *b*) $W = 60$ lb.

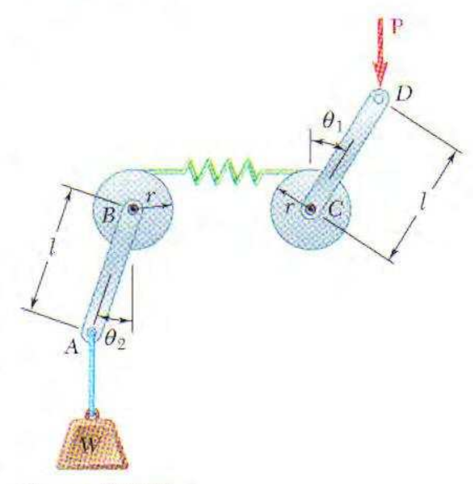


Figura *P10.99*

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 10

Trabajo de una fuerza

La primera parte de este capítulo se dedicó al estudio del *principio del trabajo virtual* y a su aplicación en la solución de problemas de equilibrio. Primero se definió *el trabajo de una fuerza* **F** *correspondiente a un desplazamiento pequeño* $d\mathbf{r}$ [sección 10.2] como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{10.1}$$

Figura 10.16

la cual se obtiene al realizar el producto escalar de la fuerza **F** y el desplazamiento $d\mathbf{r}$ (figura 10.16). Si se representa con F y ds, respectivamente, las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento y con α el ángulo que forman **F** y $d\mathbf{r}$, se puede escribir

$$dU = F\, ds \cos \alpha \tag{10.1'}$$

El trabajo dU es positivo si $\alpha < 90°$, cero si $\alpha = 90°$ y negativo si $\alpha > 90°$. También encontró que el *trabajo de un par de momento* **M** que actúa sobre un cuerpo rígido es

$$dU = M\, d\theta \tag{10.2}$$

donde $d\theta$ es un ángulo pequeño, expresado en radianes, sobre el que rota el cuerpo.

Desplazamiento virtual

Cuando se consideró una partícula localizada en A y sobre la que actuaban varias fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ [sección 10.3], se supuso que la partícula se movía hacia una posición A' (figura 10.17). Como en realidad el desplazamiento no ocurrió, a éste se le llamó *desplazamiento virtual* y se le representó con $\delta\mathbf{r}$, mientras que al trabajo correspondiente de las fuerzas se le llamó *trabajo virtual* y se le denotó con δU. Así se obtuvo

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r}$$



Principio del trabajo virtual

El *principio del trabajo virtual* establece que *si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total δU de las fuerzas que actúan sobre las partículas es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula.*

El principio del trabajo virtual puede extenderse al caso de los cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos. Como este principio está relacionado *sólo con fuerzas que realizan trabajo,* la aplicación del mismo proporciona una alternativa útil diferente al uso de las ecuaciones de equilibrio para la solución de muchos problemas de ingeniería. Dicho método es muy útil en el caso de máquinas y mecanismos que consisten en varios cuerpos rígidos conectados entre sí, debido a que el trabajo de las reacciones en los apoyos y el de las fuerzas internas en las diferentes uniones con pernos que conforman el sistema son iguales a cero [sección 10.4; problemas resueltos 10.1, 10.2 y 10.3].

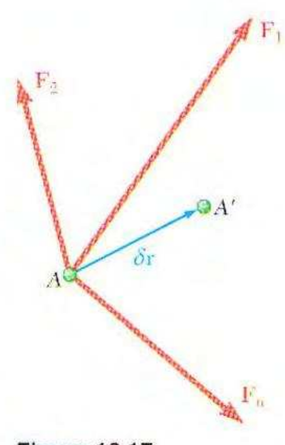


Figura 10.17

Sin embargo, en el caso de *máquinas reales* [sección 10.5], el trabajo realizado por las fuerzas de fricción debe ser tomado en cuenta, por lo que *el trabajo de salida es menor que el trabajo de entrada*. Se definió la *eficiencia mecánica* de una máquina como la relación

Eficiencia mecánica

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \qquad (10.9)$$

en donde se puntualizó que para una máquina ideal (sin fricción) $\eta = 1$, mientras que para una máquina real $\eta < 1$.

Trabajo de una fuerza sobre un desplazamiento finito

En la segunda parte de este capítulo se consideró el *trabajo realizado por las fuerzas con desplazamientos finitos* de sus puntos de aplicación. El trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ de la fuerza **F** corresponde a un desplazamiento de la partícula A desde A_1 hasta A_2 (figura 10.18) se obtuvo al integrar el término del lado derecho de la ecuación (10.1) o (10.1′) a lo largo de la curva descrita por la partícula [sección 10.6]:

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad (10.11)$$

o

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds \qquad (10.11')$$

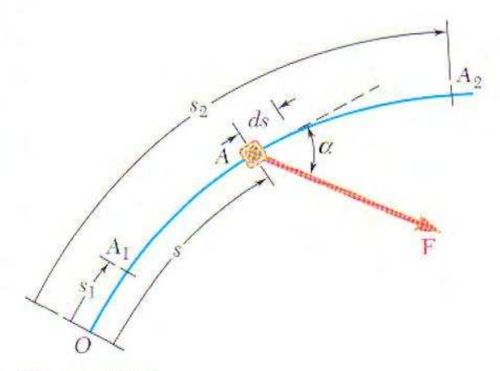


Figura 10.18

De manera similar, el trabajo de un par de momento **M** correspondiente a una rotación finita desde θ_1 hasta θ_2 de un cuerpo rígido se expresó como

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \qquad (10.12)$$

Trabajo de un peso

El *trabajo realizado por el peso* **W** *de un cuerpo* en el que su centro de gravedad se mueve de la altura y_1 hasta y_2 (figura 10.19) se puede obtener al hacer que $F = W$ y $\alpha = 180°$ en la ecuación (10.11′):

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = Wy_1 - Wy_2 \qquad (10.13)$$

Por tanto, el trabajo de **W** es positivo *cuando la altura y disminuye*.

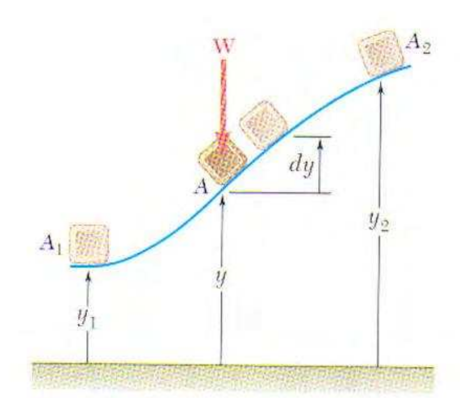


Figura 10.19

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

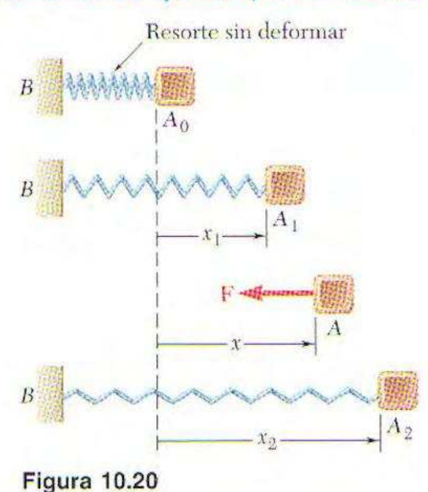


Figura 10.20

El *trabajo de la fuerza* **F** *ejercida por un resorte* sobre un cuerpo A conforme el resorte se estira desde x_1 hasta x_2 (figura 10.20) se obtiene al hacer $F = kx$, donde k es la constante del resorte y $\alpha = 180°$ en la ecuación (10.11′):

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (10.15)$$

Así, el trabajo **F** es positivo *cuando el resorte regresa a su posición sin deformar.*

Energía potencial

Cuando el trabajo de la fuerza **F** es independiente de la trayectoria real que sigue la partícula entre A_1 y A_2, entonces se dice que la *fuerza es conservativa* y, por tanto, su trabajo realizado se expresa de la siguiente forma

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \qquad (10.20)$$

donde V es la *energía potencial* asociada con **F**; V_1 y V_2 representan, respectivamente, los valores de V en A_1 y A_2 [sección 10.7]. Las energías potenciales asociadas con la *fuerza de gravedad* **W** y con la *fuerza elástica* **F** ejercida por un resorte se expresan como

$$V_g = Wy \qquad \text{y} \qquad V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad (10.17, 10.18)$$

Expresión alternativa para el principio del trabajo virtual

Cuando la posición de un sistema mecánico depende sólo de una variable independiente θ, la energía potencial $V(\theta)$ del sistema debe estar en función de esta variable y, por tanto, se concluye que $\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta)\,\delta\theta$, con base en la ecuación (10.20). La condición $\delta U = 0$ requerida por el principio del trabajo virtual para que el sistema se conserve en equilibrio se puede sustituir por la condición

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \qquad (10.21)$$

Cuando todas las fuerzas involucradas son conservativas, es más conveniente utilizar la ecuación (10.21) en lugar de aplicar directamente el principio del trabajo virtual [sección 10.8; problema resuelto 10.4].

Estabilidad del equilibrio

Este enfoque presenta una ventaja más, porque es posible determinar si el equilibrio del sistema es *estable, inestable* o *neutro* con base en el signo de la segunda derivada de V [sección 10.9]. Por otra parte, si $d^2V/d\theta^2 > 0$, entonces V es *mínima* y el equilibrio es *estable;* pero si $d^2V/d\theta^2 < 0$, entonces V es *máxima* y el equilibrio es *inestable*. Pero si $d^2V/d\theta^2 = 0$, entonces es necesario analizar las derivadas de orden superior.

Problemas de repaso

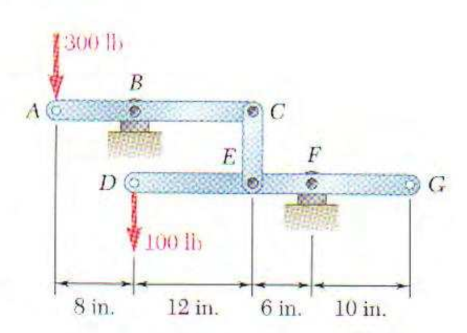


Figura P10.101 y P10.102

10.101 Determine la fuerza vertical **P** que debe aplicarse en G para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.102 Determine el par **M** que debe aplicarse al elemento $DEFG$ para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.103 Obtenga una expresión para determinar la magnitud del par **M** que se requiere para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

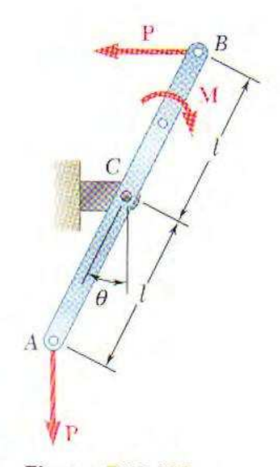


Figura *P10.103*

10.104 Los collarines A y B se conectan mediante el alambre AB y pueden deslizarse libremente por la varilla que se muestra en la figura. Si la longitud del alambre AB es de 440 mm y el peso del collarín A es de 90 N, determine la magnitud de la fuerza **P** necesaria para mantener el equilibrio del sistema cuando *a*) $c = 80$ mm, *b*) $c = 280$ mm.

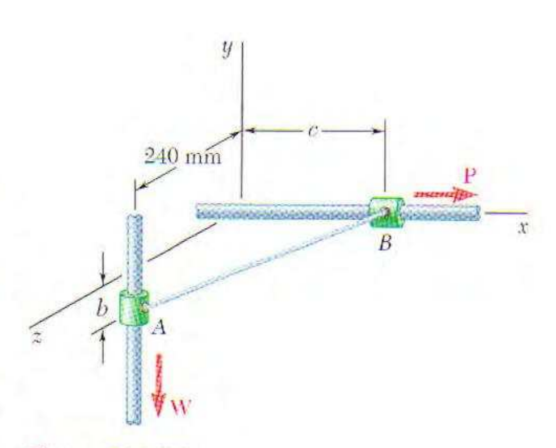


Figura P10.104

10.105 El collarín B puede deslizarse a lo largo de la barra AC y está unido mediante un pasador a un bloque que se puede deslizar por la ranura vertical mostrada en la figura. Deduzca una expresión para determinar la magnitud del par **M** que se requiere para mantener el equilibrio.

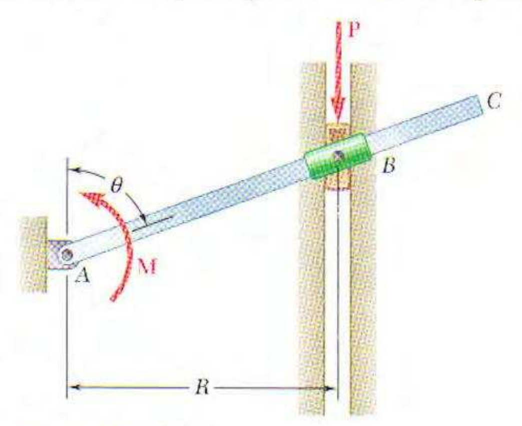


Figura *P10.105*

10.106 En la figura se muestra una barra delgada de longitud l, unida a un collarín en B y apoyada sobre una porción del cilindro circular de radio r. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo cuando $l = 200$ mm, $r = 60$ mm, $P = 40$ N y $Q = 80$ N.

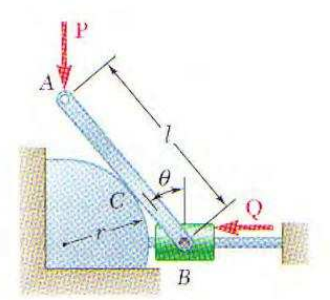


Figura P10.106

10.107 Una fuerza horizontal **P** con 40 lb de magnitud se aplica en el punto C del mecanismo mostrado en la figura. El resorte de constante k = 9 lb/in. se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

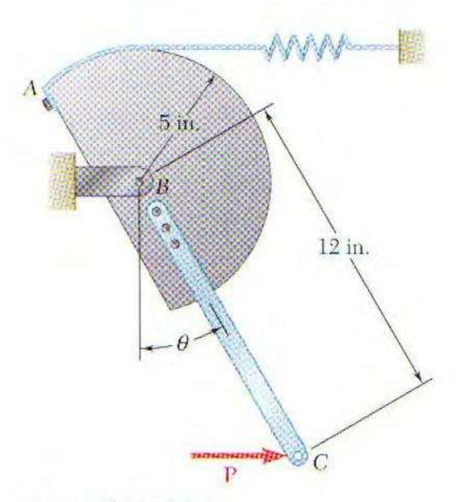


Figura P10.107

10.108 Dos barras idénticas ABC y DBE están conectadas por medio de un pasador en B y mediante un resorte CE. Si el resorte tiene 4 in. de longitud cuando está sin estirar y la constante del resorte es de 8 lb/in., determine la distancia x correspondiente a la posición de equilibrio cuando se aplica una carga de 24 lb en E.

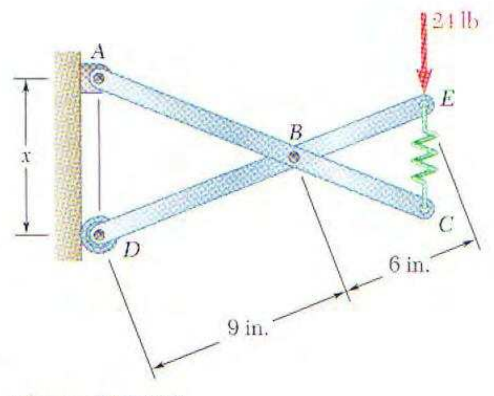


Figura P10.108

10.109 Retome el problema 10.108, y ahora suponga que la carga de 24 lb se aplica en C en vez de en E.

10.110 Dos barras uniformes, cada una de masa m y longitud l, están unidas a los engranes mostrados en la figura. Para el intervalo de valores de $0 \leq \theta \leq 180°$, determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si es estable, inestable o neutro.

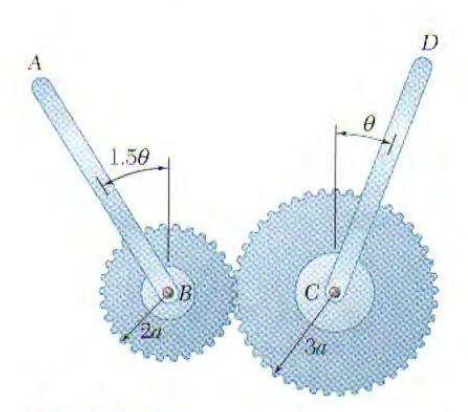


Figura P10.110

10.111 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano inclinado, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $\beta = 10°$.

10.112 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano inclinado, determine *a*) el máximo ángulo β para el cual existe una posición de equilibrio, *b*) el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando el ángulo β es igual a la mitad del valor que se encontró en el inciso *a*).

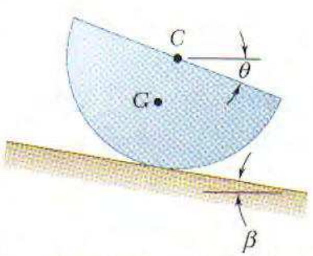


Figura *P10.111* y P10.112

Problemas de computadora

10.C1 Para mantener el equilibrio del sistema motriz mostrado en la figura, cuando se aplica una fuerza **P** sobre el pistón, es necesario aplicar un par **M** sobre la manivela AB. Si se sabe que $b = 2.4$ in. y que $l = 7.5$ in., utilice software para calcular la relación M/P para valores de θ desde 0 hasta 180° con incrementos de 10°. Determine el valor de θ para el cual la relación M/P es máxima y el valor correspondiente de dicha relación.

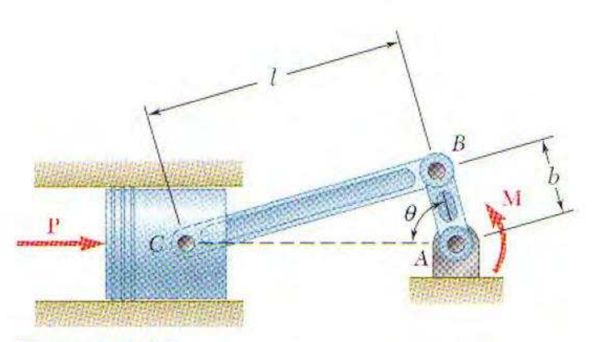


Figura P10.C1

10.C2 Si se sabe que para el mecanismo mostrado en la figura $a = 500$ mm, $b = 150$ mm, $L = 500$ mm y $P = 100$ N, utilice software para calcular la fuerza en el elemento BD para valores de θ entre 30 y 150° con incrementos de 10°. Use incrementos menores adecuados y determine el intervalo de valores de θ para los cuales el valor absoluto de la fuerza en el elemento BD es menor que 400 N.

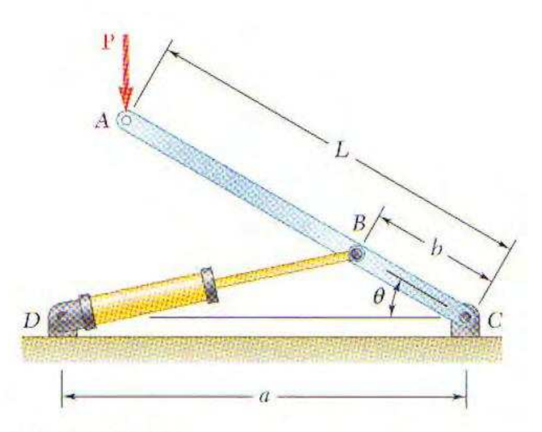


Figura P10.C2

10.C3 Retome el problema 10.C2, y ahora suponga que la fuerza **P** aplicada en A se dirige horizontalmente hacia la derecha.

10.C4 En la figura se muestra un resorte AB de constante k que se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. *a*) Sin tomar en cuenta el peso del elemento BCD, utilice software para calcular la energía potencial del sistema y su derivada $dV/d\theta$. *b*) Para $W = 150$ lb, $a = 10$ in. y $k = 75$ lb/in., calcule y grafique la energía potencial contra θ para valores de θ desde 0 hasta 165°, con incrementos de 15°. *c*) Use incrementos menores adecuados y determine los valores de θ para los cuales el sistema está en equilibrio, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

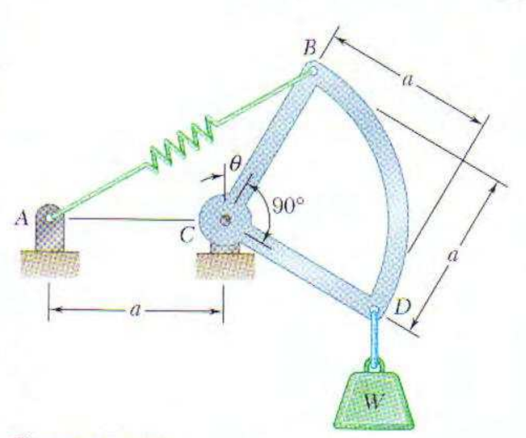


Figura P10.C4

10.C5 Dos barras AC y DE, cada una con longitud L, están conectadas mediante un collarín que se une a la barra AC en su punto medio B. *a*) Use software para calcular la energía potencial V del sistema y su derivada $dV/d\theta$. *b*) Para $W = 75$ N, $P = 200$ N y $L = 500$ mm, calcule V y $dV/d\theta$ para valores de θ desde 0 hasta 70° con incrementos de 5°. *c*) Utilice incrementos menores adecuados y determine los valores de θ para los cuales el sistema está en equilibrio, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

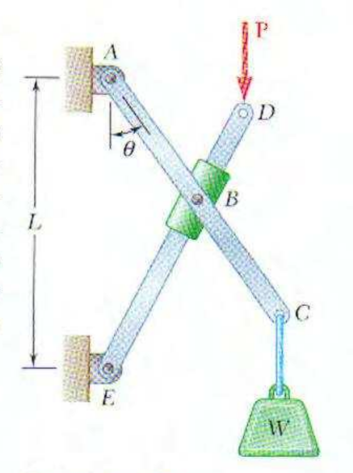


Figura P10.C5

10.C6 Una barra delgada ABC está unida a los bloques A y B, que pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirar cuando la barra está en posición vertical. *a*) Sin tomar en cuenta los pesos de la barra y de los bloques, use software para calcular la energía potencial V del sistema y su derivada $dV/d\theta$. *b*) Para $P = 150$ N, $l = 200$ mm y $k = 3$ kN/m, calcule y grafique la energía potencial contra θ para valores de θ desde 0 hasta 75° con incrementos de 5°. *c*) Use incrementos menores adecuados para determinar cualesquiera posiciones de equilibrio en el intervalo $0 \leq \theta \leq 75°$, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

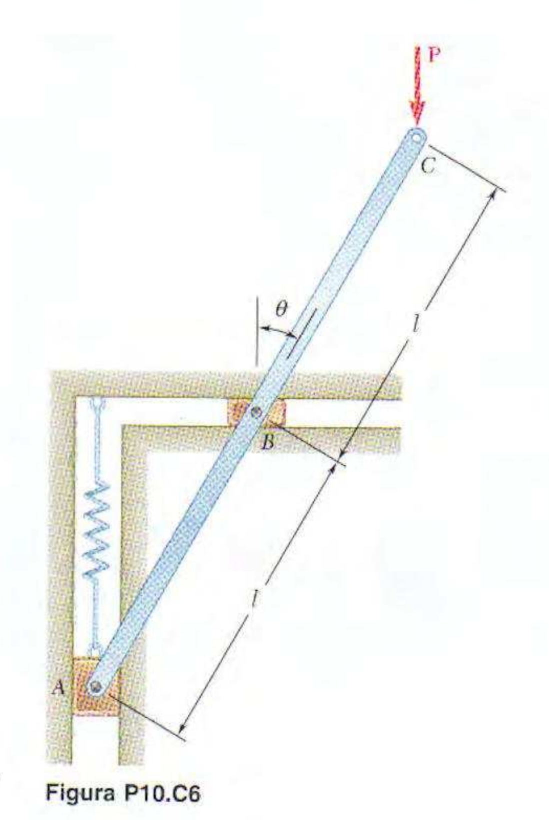
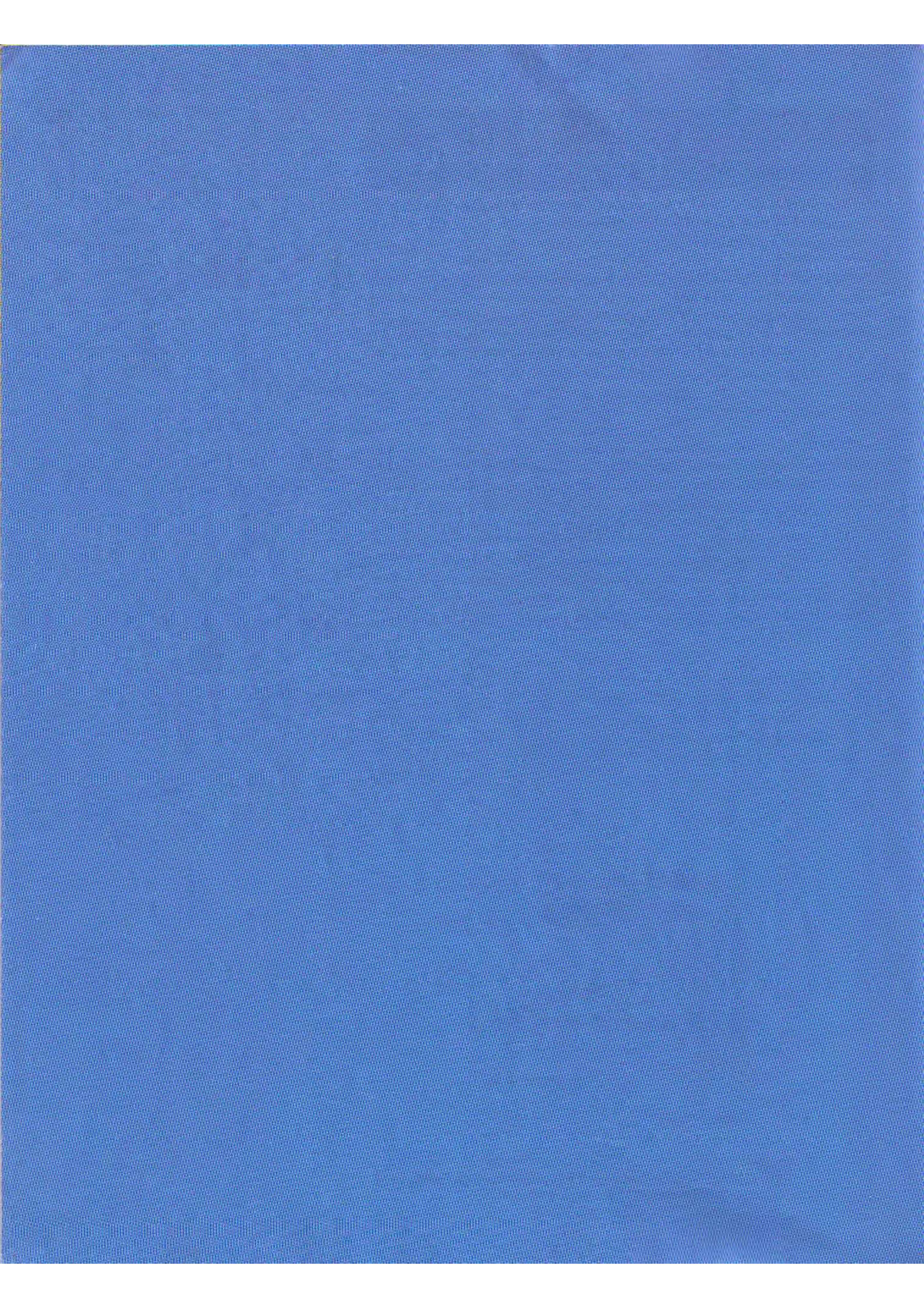


Figura P10.C6

10.C7 Retome el problema 10.C6, y ahora suponga que la fuerza **P** aplicada en C se dirige horizontalmente hacia la derecha.



APÉNDICE

Fundamentos para la certificación en ingeniería en Estados Unidos

Es necesario que los ingenieros obtengan una licencia cuando su trabajo afecta en forma directa la salud, la seguridad o el bienestar público. Se intenta asegurar que los ingenieros alcancen un mínimo de calificación, la cual incluye competencia, habilidad, experiencia y carácter. El proceso de certificación incluye un examen inicial, llamado *Fundamentals of Engineering Examination*, sobre la experiencia profesional, y un segundo examen denominado *Principles and Practice of Engineering*. Quienes aprueban estos exámenes obtienen la certificación de Ingeniero profesional. Los exámenes se desarrollan bajo los auspicios del *National Council of Examiners for Engineering and Surveying*.

El primer examen, *Fundamentals of Engineering Examination*, se puede presentar justo antes o después de la graduación de un programa de estudios de cuatro años. El examen analiza los contenidos de un programa normal de licenciatura en ingeniería, lo que incluye la estática. Los temas que aborda dicho examen se cubren en este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas temáticas, con referencia a las secciones del libro donde aparecen. También se incluyen problemas que pueden resolverse para repasar el material.

Sistemas de fuerzas concurrentes (2.2-2.9; 2.12-2.14)
Problemas: 2.33, 2.35, 2.36, 2.37, 2.73, 2.83, 2.92, 2.93, 2.97

Fuerzas de vectores (3.4-3.11)
Problemas: 3.16, 3.18, 3.25, 3.31, 3.38, 3.40

Equilibrio en dos dimensiones (2.11; 4.1-4.7)
Problemas: 4.5, 4.13, 4.14, 4.17, 4.29, 4.38, 4.66, 4.75

Equilibrio en tres dimensiones (2.15; 4.8-4.9)
Problemas: 4.101, 4.104, 4.103, 4.106, 4.115, 4.117, 4.127, 4.132, 4.140

Centroide de un área (5.2-5.7)
Problemas: 5.6, 5.18, 5.29, 5.35, 5.40, 5.56, 5.58, 5.99, 5.103, 5.104, 5.125

Análisis de armaduras (6.2-6.7)
Problemas: 6.3, 6.4, 6.33, 6.43, 6.44, 6.56

Equilibrio de armazones bidimensionales (6.9-6.11)
Problemas: 6.76, 6.80, 6.87, 6.91, 6.92

Fuerza cortante y momento flector (7.3-7.6)
Problemas: 7.22, 7.25, 7.31, 7.36, 7.45, 7.49, 7.70, 7.83

Fricción (8.2-8.5; 8.10)
Problemas: 8.11, 8.15, 8.21, 8.30, 8.50, 8.53, 8.101, 8.104, 8.105

Momentos de inercia (9.2-9.10)
Problemas: 9.5, 9.31, 9.32, 9.33, 9.77, 9.78, 9.84, 9.89, 9.101, 9.103

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

CAPÍTULO 1

Portada: Sr. Isaac Newton, fotografía cortesía de Jeremy Whitaker; **Fotografía 1.1:** © FotografíaLink/Getty Images RF.

CAPÍTULO 2

Portada: © Tom Paiva/Getty Images; **Fotografía 2.1:** © H. David Seawell/CORBIS; **Fotografía 2.2:** © WIN-Initiative/Getty Images.

CAPÍTULO 3

Portada: © Daniel Sheehan; **Fotografía 3.1:** © McGraw-Hill/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 3.2:** © Steve Hix/Getty Images; **Fotografía 3.3:** © Jose Luis Pelaez/Getty Images; **Fotografía 3.4:** © Images-USA/Alamy; **Fotografía 3.5:** © Dana White/Photo Edit.

CAPÍTULO 4

Portada: © Alfredo Maiquez/Getty Images; **Fotografía 4.1, Fotografía 4.2, Fotografía 4.3:** © McGraw-Hill/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 4.4, Fotografía 4.5:** Cortesía de National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; **Fotografía 4.6:** © McGraw-Hill/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 4.7:** Cortesía de SKF Limited.

CAPÍTULO 5

Portada: © Christopher Morris/CORBIS; **Fotografía 5.1:** © Christies Images/SuperStock; **Fotografía 5.2:** Value RF/© Kevin Burke/CORBIS; **Fotografía 5.3:** © Ghislain & Marie David de Lossy/Getty Images; **Fotografía 5.4:** NASA.

CAPÍTULO 6

Portada: © Alan Schein Fotografía/CORBIS; **Fotografía 6.1:** Cortesía de National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; **Fotografía 6.2:** Ferdinand Beer; **Fotografía 6.3:** © McGraw-Hill/Fotografía de Sabina Dowell; **Fotografía 6.4:** © EyeWire Collection/Getty Images RF; **Fotografía 6.5:** Cortesía de Luxo Lamp Corporation.

CAPÍTULO 7

Portada: © Getty Images RF; **Fotografía 7.1:** © McGraw-Hill/Fotografía de Sabina Dowell; **Fotografía 7.2:** © Alan Thornton/Getty Images; **Fotografía 7.3:** © Michael S. Yamashita/CORBIS; **Fotografía 7.4:** © Steve Kahn/Getty Images.

CAPÍTULO 8

Portada: © Bicot (Marc Caya); **Fotografía 8.1:** © Chuck Savage/CORBIS; **Fotografía 8.2:** © Ted Spiegel/CORBIS; **Fotografía 8.3:** © Adam Woolfitt/CORBIS.

CAPÍTULO 9

Portada: © Lester Lefkowitz/Getty Images; **Fotografía 9.1:** © Ed Eckstein/CORBIS; **Fotografía 9.2:** Cortesía de Caterpillar Engine Division.

CAPÍTULO 10

Portada: © Tom Brakefield/SuperStock; **Fotografía 10.1:** Cortesía de Altec Industries; **Fotografía 10.2:** Cortesía de De-Sta-Co.

Índice analítico

Q

R

S

T

U

V

Respuestas a problemas

En esta página y las siguientes se dan las respuestas a los problemas cuyo número está en caracteres normales. Las respuestas a los problemas con número en letras cursivas no se proporcionan en esta lista.

CAPÍTULO 2

2.1 179 N ↘ 75.1°.
2.2 77.1 lb ↙ 85.4°.
2.3 139.1 lb ↙ 67.0°.
2.5 *a*) 76.1°. *b*) 336 lb.
2.7 *a*) 37.1°. *b*) 73.2 N.
2.8 *a*) 44.7 N. *b*) 107.1 N.
2.9 *a*) 3 660 N. *b*) 3 730 N.
2.10 2 600 N ↘ 53.5°.
2.11 *a*) 392 lb. *b*) 346 lb.
2.13 *a*) 21.1 N ↓. *b*) 45.3 N.
2.14 *a*) 368 lb →. *b*) 213 lb.
2.15 77.1 lb ↙ 85.4°.
2.16 139.1 lb ↙ 67.0°.
2.17 3.30 kN ↘ 66.6°.
2.19 21.8 kN ↘ 86.6°.
2.21 (800 N) 640 N, 480 N; (424 N) −224 N, −360 N; (408 N) 192.0 N, −360 N.
2.22 (29 lb) 21.0 lb, 20.0 lb; (50 lb) −14.00 lb, 48.0 lb; (51 lb) 24.0 lb, −45.0 lb.
2.23 (40 lb) 20.0 lb, −34.6 lb; (50 lb) −38.3 lb, −32.1 lb; (60 lb) 54.4 lb, 25.4 lb.
2.25 *a*) 523 lb. *b*) 428 lb.
2.26 *a*) 2 190 N. *b*) 2 060 N.
2.27 *a*) 194.9 N. *b*) 153.6 N.
2.30 *a*) 610 lb. *b*) 500 lb.
2.31 38.6 lb ⦣ 36.6°.
2.32 251 N ⦥ 85.3°.
2.34 654 N ↘ 21.5°.
2.35 309 N ↙ 86.6°.
2.36 226 N ↙ 62.3°.
2.37 203 lb ⦣ 8.46°.
2.39 *a*) 21.7°. *b*) 229 N.
2.40 *a*) 580 N. *b*) 300 N.
2.42 *a*) 56.3°. *b*) 204 lb.
2.43 *a*) 2.13 kN. *b*) 1.735 kN.
2.45 *a*) 305 N. *b*) 514 N.
2.47 *a*) 1 244 lb. *b*) 115.4 lb.
2.48 *a*) 172.7 lb. *b*) 231 lb.
2.49 F_A = 1 303 lb; F_B = 420 lb.
2.51 F_C = 6.40 kN; F_D = 4.80 kN.
2.52 F_B = 15.00 kN; F_C = 8.00 kN.
2.53 *a*) 52.0 lb. *b*) 45.0 lb.
2.55 *a*) 1 213 N. *b*) 166.3 N.
2.56 *a*) 863 N. *b*) 1 216 N.
2.57 *a*) 784 N. *b*) 71.0°.
2.59 *a*) 60.0°. *b*) 230 lb.
2.60 5.80 m.
2.61 *a*) 1 081 N. *b*) 82.5°.
2.62 *a*) 1 294 N. *b*) 62.5°.
2.63 *a*) 10.98 lb. *b*) 30.0 lb.
2.65 *a*) 602 N ⦥ 46.8°. *b*) 1 365 N ↙ 46.8°.
2.67 *a*) 300 lb. *b*) 300 lb. *c*) 200 lb. *d*) 200 lb. *e*) 150.0 lb.
2.68 *b*) 200 lb. *d*) 150.0 lb.
2.69 *a*) 1 293 N. *b*) 2 220 N.
2.71 *a*) +390 N, +614 N, +181.8 N. *b*) 58.7°, 35.0°, 76.0°.
2.72 *a*) −130.1 N, +816 N, +357 N. *b*) 98.3°, 25.0°, 66.6°.
2.73 *a*) 288 N. *b*) 67.5°, 30.0°, 108.7°.
2.74 *a*) 100.0 N. *b*) 112.5°, 30.0°, 108.7°.
2.76 *a*) 80.0 lb. *b*) 104.5°, 30.0°, 64.3°.
2.77 *a*) +56.4 lb, −103.9 lb, −20.5 lb. *b*) 62.0°, 150.0°, 99.8°.
2.79 F = 570 N; θ_x = 55.8°, θ_y = 45.4°, θ_z = 116.0°.
2.81 *a*) 118.2°. *b*) F_x = 36.0 lb, F_y = −90.0 lb; F = 110.0 lb.
2.82 *a*) 114.4°. *b*) F_y = 694 lb, F_z = 855 lb; F = 1 209 lb.
2.84 *a*) F_x = 194.0 N, F_z = 108.0 N. *b*) θ_y = 105.1°, θ_z = 62.0°.
2.85 +100.0 lb, +500 lb, −125.0 lb.
2.86 +50.0 lb, +250 lb, +185.0 lb.
2.87 +240 N, −255 N, +160.0 N.
2.89 −1 125 N, +750 N, +450 N.
2.91 515 N; θ_x = 70.2°, θ_y = 27.6°, θ_z = 71.5°.
2.92 515 N; θ_x = 79.8°, θ_y = 33.4°, θ_z = 58.6°.
2.94 913 lb; θ_x = 50.6°, θ_y = 117.6°, θ_z = 51.8°.
2.95 748 N; θ_x = 120.1°, θ_y = 52.5°, θ_z = 128.0°.
2.96 3 120 N; θ_x = 37.4°, θ_y = 122.0°, θ_z = 72.6°.
2.97 *a*) 65.2 lb. *b*) 208 lb; θ_x = 61.6°, θ_y = 151.6°, θ_z = 90.0°.
2.99 1 031 N ↑.
2.101 926 N ↑.
2.103 2 100 lb.
2.104 1 868 lb.
2.105 1 049 lb.
2.107 960 N.
2.108 $0 \leq Q < 300$ N.
2.109 1 572 lb.
2.111 845 N.
2.112 768 N.
2.113 T_{AB} = 842 lb; T_{AC} = 624 lb; T_{AD} = 1 088 lb.
2.114 T_{AD} = 29.5 lb; T_{BD} = 10.25 lb; T_{CD} = 29.5 lb.
2.115 T_{AB} = 510 N; T_{AC} = 56.2 N; T_{AD} = 536 N.
2.116 T_{AB} = 1 340 N; T_{AC} = 1 025 N; T_{AD} = 915 N.
2.117 T_{AB} = 1 431 N; T_{AC} = 1 560 N; T_{AD} = 183.0 N.
2.118 T_{AB} = 1 249 N; T_{AC} = 490 N; T_{AD} = 1 647 N.
2.121 P = 131.2 N; Q = 29.6 N.
2.123 378 N.
2.125 *a*) 125.0 lb. *b*) 45.0 lb.
2.126 x = 13.42 in., z = 6.71 in.
2.127 37.0°.
2.130 *a*) 500 lb. *b*) 544 lb.
2.131 *a*) 312 N. *b*) 144 N.
2.133 *a*) 140.3°. *b*) F_x = 79.9 lb, F_z = 120.1 lb; F = 226 lb.
2.134 *a*) −1 861 lb, +3 360 lb, +677 lb. *b*) 118.5°, 30.5°, 80.0°.
2.135 15.13 kN; θ_x = 133.4°, θ_y = 43.6°, θ_z = 86.6°.
2.136 T_{AB} = 500 N; T_{AC} = 459 N; T_{AD} = 516 N.

2.137 *a*) 1 155 N. *b*) 1 012 N.
2.C2 (1) *b*) 20°; *c*) 244 lb. (2) *b*)−10°; *c*) 467 lb. (3) *b*) 10°; *c*) 163.2 lb.
2.C3 *a*) 1.001 m. *b*) 4.01 kN. *c*) 1.426 kN; 1.194 kN.

CAPÍTULO 3

3.1 1.277 N · m ↺.
3.2 1.277 N · m ↺.
3.3 *a*) 41.7 N · m ↺. *b*) 147.4 N ∠ 45.0°.
3.4 *a*) 41.7 N · m ↺. *b*) 176.8 N ∠ 58.0°.
3.5 186.6 lb · in. ↻.
3.7 6.12° o 33.8°.
3.9 *a*) 760 N · m ↺. *b*) 760 N · m ↺.
3.10 1 224 N.
3.12 116.2 lb · ft ↺.
3.13 128.2 lb · ft ↺.
3.16 2.21 m.
3.17 *a*) 41.0. *b*) 26.9.
3.19 *a*)$-11\mathbf{i} + 22\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$. *b*) 0. *c*)$-45\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$.
3.21 (7.50 N · m)**i** − (6.00 N · m)**j** − (10.39 N · m)**k**.
3.22 (3 080 N · m)**i** − (2 070 N · m)**k**.
3.24 −(153.0 lb · ft)**i** + (63.0 lb · ft)**j** + (215 lb · ft)**k**.
3.26 (492 lb · ft)**i** + (144.0 lb · ft)**j** − (372 lb · ft)**k**.
3.27 4.58 m.
3.28 3.70 m.
3.30 57.0 in.
3.31 1.564 m.
3.32 3.29 m.
3.33 4.86 ft.
3.35 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 1$; $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -11$; $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = 10$.
3.37 27.4°.
3.39 43.6°.
3.40 38.9°.
3.41 *a*) 59.0°. *b*) 648 N.
3.43 *a*) 71.1°. *b*) 0.973 lb.
3.44 12.00 in.
3.45 *a*) 67. *b*) 111.
3.46 7.
3.47 $M_x = -31.2$ N · m; $M_y = 13.20$ N · m; $M_z = -2.42$ N · m.
3.48 $M_x = -25.6$ N · m; $M_y = 10.80$ N · m; $M_z = 40.6$ N · m.
3.49 1.252 m.
3.50 1.256 m.
3.51 61.5 lb.
3.53 $\phi = 24.6°$; $d = 34.6$ in.
3.55 −90.0 N · m.
3.56 −111.0 N · m.
3.57 2.28 N · m.
3.58 −9.50 N · m.
3.59 $aP/\sqrt{2}$.
3.61 1 359 lb · in.
3.65 0.249 m.
3.66 0.1198 m.
3.68 30.4 in.
3.69 43.5 in.
3.70 *a*) 12.39 N · m ↻. *b*) 12.39 N · m ↻. *c*) 12.39 N · m ↻.
3.71 *a*) 336 lb · in. ↺. *b*) 28.0 in. *c*) 54.0°.
3.72 *a*) 75.0 N. *b*) 71.2 N. *c*) 45.0 N.
3.75 $M = 10.00$ lb · ft; $\theta_x = 90.0°$, $\theta_y = 143.1°$, $\theta_z = 126.9°$.
3.76 $M = 9.21$ N · m; $\theta_x = 77.9°$, $\theta_y = 12.05°$, $\theta_z = 90.0°$.
3.77 $M = 604$ lb · in.; $\theta_x = 72.8°$, $\theta_y = 27.3°$, $\theta_z = 110.5°$.
3.78 $M = 1\,170$ lb · in.; $\theta_x = 81.2°$, $\theta_y = 13.70°$, $\theta_z = 100.4°$.
3.79 $M = 10.92$ N · m; $\theta_x = 97.8°$, $\theta_y = 34.5°$, $\theta_z = 56.7°$.
3.80 $M = 2\,860$ N · m; $\theta_x = 113.0°$, $\theta_y = 92.7°$, $\theta_z = 23.2°$.
3.81 *a*) **F** = 560 lb ∠ 20.0°; **M** = 7 720 lb · ft ↻.
b) **F** = 560 lb ∠ 20.0°; **M** = 4 290 lb · ft ↻.
3.82 *a*) **F** = 160.0 lb ∠ 60.0°; **M** = 334 lb · ft ↺.
b) $\mathbf{F}_B$ = 20.0 lb ↑; $\mathbf{F}_D$ = 143.0 lb ∠ 56.0°.
3.83 *a*) $\mathbf{F}_B$ = 80.0 N ←; $\mathbf{M}_B$ = 4.00 N · m ↺.
b) $\mathbf{F}_C$ = 100.0 N ↓; $\mathbf{F}_D$ = 100.0 N ↑.
3.85 *a*) $\mathbf{F}_B$ = 250 N ∠ 60.0°; $\mathbf{M}_B$ = 75.0 N · m ↻.
b) $\mathbf{F}_A$ = 375 N ∠ 60.0°; $\mathbf{F}_B$ = 625 N ∠ 60.0°.
3.87 *a*) **F** = −(600 N)**k**; *d* = 90.0mm debajo de *ED* .
b) **F** = −(600 N)**k**; *d* = 90.0mm arriba *ED*.
3.88 **F** = 900 N ↓; *x* = 50.0 mm.
3.89 (0.227 lb)**i** + (0.1057 lb)**k**; 63.6 in. a la derecha de *B*.
3.90 *a*) **F** = 48.0 lb ∠ 65.0°; **M** = 490 lb · in. ↻.
b) **F** = 48.0 lb ∠ 65.0°; 17.78 in. a la izquierda de *B*.
3.93 **F** = −(1 220 N)**i**; **M** = (73.2 N · m)**j** − (122.0 N · m)**k**.
3.94 $\mathbf{F}_C$ = (5.00 N)**i** + (150.0 N)**j** − (90.0 N)**k** ;
$\mathbf{M}_C$ = (77.4 N · m)**i** + (61.5 N · m)**j** + (106.8 N · m)**k**.
3.95 **F** = −(128.0 lb)**i** − (256 lb)**j** + (32.0 lb)**k** ;
M = (4.10 kip · ft)**i** + (16.38 kip · ft)**k**.
3.97 **F** = −(122.9 N)**j** − (86.0 N)**k** ;
M = (22.6 N · m)**i** + (15.49 N · m)**j** − (22.1 N · m)**k**.
3.98 *a*) 135.0 mm. *b*) $\mathbf{F}_2$ = (42.0 N)**i** + (42.0 N)**j** − (49.0 N)**k**;
$\mathbf{M}_2$ = −(25.9 N · m)**i** + (21.2 N · m)**j**.
3.99 **F** = (36.0 lb)**i** − (28.0 lb)**j** − (6.00 lb)**k** ;
M = −(157.0 lb · ft)**i** + (22.5 lb · ft)**j** − (240 lb · ft)**k**.
3.101 *a*) *Carga a*: **R** = 600 N ↓; **M** = 1 000 N · m ↺.
Carga b: **R** = 600 N ↓; **M** = 900 N · m ↻.
Carga c: **R** = 600 N ↓; **M** = 900 N · m ↺.
Carga d: **R** = 400 N ↑; **M** = 900 N · m ↺.
Carga e: **R** = 600 N ↓; **M** = 200 N · m ↻.
Carga f: **R** = 600 N ↓; **M** = 800 N · m ↺.
Carga g: **R** = 1 000 N ↓; **M** = 1 000 N · m ↺.
Carga h: **R** = 600 N ↓; **M** = 900 N · m ↺.
b) Cargas *c* y *h*.
3.102 Carga *f*.
3.104 Sistema fuerza-par en *D*.
3.105 *a*) 2.00 ft a la derecha de *C*. *b*) 2.31 ft a la derecha de *C*.
3.106 *a*) 39.6 in. a la derecha de *D*. *b*) 33.1 in.
3.108 **R** = 72.4 lb ∠ 81.9°; **M** = 206 lb · ft.
3.109 *a*) 34.0 lb ∠ 28.0°. *b*) *AB*: 11.64 in. a la izquierda de *B* ; *BC*: 6.20 in. debajo *B*.
3.110 *a*) 48.2 lb · in. ↺. *b*) 240 lb · in. ↺. *c*) 0.
3.111 *a*) 1 562 N ∠ 50.2°. *b*) 250 mm a la derecha de *C* y 300 mm arriba *C*.
3.112 *a*) 1 308 N ∠ 66.6°. *b*) 412 mm a la derecha de *A* y 250 mm a la derecha de *C*.
3.113 773 lb ∠ 79.0°; 9.54 ft a la derecha de *A*.
3.115 *a*) 0.365 m arriba de *G*. *b*) 0.227 m a la derecha de *G*.
3.116 *a*) 0.299 m arriba de *G*. *b*) 0.259 m a la derecha de *G*.
3.118 *a*) **R** = *F* ∠ $\tan^{-1}(a^2/2bx)$;
$\mathbf{M} = 2Fb^2(x - x^3/a^2)/\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}$ ↺. *b*) 0.369 m.
3.119 **R** = −(420 N)**i** − (50.0 N)**j** − (250 N)**k** ;
M = (30.8 N · m)**j** − (22.0 N · m)**k**.
3.120 **R** = −(420 N)**j** − (339 N)**k**; **M** = (1.125 N · m)**i** + (163.9 N · m)**j** − (109.9 N · m)**k**.
3.121 *a*) **B** = (2.50 lb)**i**; **C** = (0.1000 lb)**i** − (2.47 lb)**j** − (0.700 lb)**k**.
b) $R_y = -2.47$ lb; $M_x = 1.360$ lb · ft.
3.122 **A** = (1.600 lb)**i** − (36.0 lb)**j** + (2.00 lb)**k** ;
B = −(9.60 lb)**i** + (36.0 lb)**j** + (2.00 lb)**k**.
3.124 *a*) **R** = −(28.4 N)**j** − (50.0 N)**k** ;
M = (8.56 N · m)**i** − (24.0 N · m)**j** + (2.13 N · m)**k** .
b) En contra de las manecillas del reloj.

3.125 *a)* $\mathbf{R} = -(28.4\ \text{N})\mathbf{j} - (50.0\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = (42.4\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} - (24.0\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (2.13\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$.
b) En contra de las manecillas del reloj.
3.127 1 035 N; a 2.57 m de OG y 3.05 m de OE.
3.128 2.32 m de OG y 1.165 m de OE.
3.129 405 lb; a 12.60 ft a la derecha de AB y 2.94 ft debajo de BC.
3.130 $a = 0.722$ ft; $b = 20.6$ ft.
3.133 *a)* $P\sqrt{3}$; $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 54.7°$. *b)* $-a$. *c)* El eje de la llave es la diagonal OA.
3.134 *a)* P; $\theta_x = 90.0°$, $\theta_y = 90.0°$, $\theta_z = 0$. *b)* $5a/2$. *c)* El eje de la llave es paralelo al eje z en $x = a$, $y = -a$.
3.136 *a)* $-(21.0\ \text{lb})\mathbf{j}$. *b)* 0.571 in. *c)* El eje de la llave es paralelo al eje y en $x = 0$, $z = 1.667$ in.
3.137 *a)* $-(84.0\ \text{N})\mathbf{j} - (80.0\ \text{N})\mathbf{k}$. *b)* 0.477 m.
c) $x = 0.526$ m, $z = -0.1857$ m.
3.140 *a)* $3P(2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - \mathbf{k})/25$. *b)* $-0.0988a$.
c) $x = 2.00a$, $z = -1.990a$.
3.141 $\mathbf{R} = (20.0\ \text{N})\mathbf{i} + (30.0\ \text{N})\mathbf{j} - (10.00\ \text{N})\mathbf{k}$;
$y = -0.540$ m, $z = -0.420$ m.
3.143 $\mathbf{F}_A = (M/b)\mathbf{i} + R[1 + a/b)]\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_B = -(M/b)\mathbf{i} - aR/b)\mathbf{k}$.
3.147 *a)* 196.2 N · m ↓. *b)* 199.0 N ⦫ 59.5°.
3.148 42.0 N · m ↰.
3.149 $-(25.4\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{i} - (12.60\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{j} - (12.60\ \text{lb}\cdot\text{ft})\mathbf{k}$.
3.151 283 lb.
3.153 *a)* 151.2 lb · in. ↰. *b)* 67.2 lb · in. ↰.
3.155 $\mathbf{F} = -(28.5\ \text{N})\mathbf{j} + (106.3\ \text{N})\mathbf{k}$;
$\mathbf{M} = (12.35\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i} - (19.16\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{j} - (5.13\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$.
3.156 *a)* 665 lb ∠ 79.6°; 64.9 in. a la derecha de A. *b)* 22.9°.
3.157 *a)* $\mathbf{F}_B = -(80.0\ \text{N})\mathbf{k}$; $\mathbf{F}_C = -(30.0\ \text{N})\mathbf{i} + (40.0\ \text{N})\mathbf{k}$.
b) $R_y = 0$; $R_z = -40.0$ N. *c)* Cuando la ranura está en posición vertical.
3.C3 *4 lados*: $\beta = 10°$, $\alpha = 44.1°$;
$\beta = 20°$, $\alpha = 41.6°$;
$\beta = 30°$, $\alpha = 37.8°$.
3.C4 $\theta = 0$ *rev*: $M = 97.0$ N · m;
$\theta = 6$ *rev*: $M = 63.3$ N · m;
$\theta = 12$ *rev*: $M = 9.17$ N · m.
3.C6 $d_{AB} = 36.0$ in.; $d_{CD} = 9.00$ in.; $d_{\text{mín}} = 58.3$ in.

CAPÍTULO 4

4.1 *a)* 325 lb ↑. *b)* 1 175 lb ↑.
4.2 42.0 N ↑
4.3 0.264 m
4.4 *a)* 245 lb. ↑. *b)* 140.0 lb.
4.5 *a)* 6.07 kN ↑. *b)* 4.23 kN ↑.
4.6 *a)* 4.89 kN ↑. *b)* 3.69 kN ↑.
4.9 150.0 mm $\le d \le$ 400 mm.
4.11 6.00 kips $\le P \le$ 42.0 kips.
4.12 3.50 kN $\le P \le$ 86.0 kN.
4.14 2.00 in. $\le a \le$ 10.00 in.
4.15 *a)* $F_{DE} = 600$ N. *b)* $\mathbf{C} = 1253$ N ∠ 69.8°.
4.17 *a)* 80.0 lb ↓. *b)* 216 lb ∠ 22.0°.
4.18 232 lb.
4.19 *a)* 2.00 kN. *b)* 2.32 kN ∠ 46.4°.
4.21 *a)* $\mathbf{A} = 150.0$ N ∠ 30.0°; $\mathbf{B} = 150.0$ N ⦫ 30.0°.
b) $\mathbf{A} = 433$ N ⦨ 12.55°; $\mathbf{B} = 488$ ⦫ 30.0°.
4.23 *a)* $\mathbf{A} = 44.7$ lb ⦫ 26.6°; $\mathbf{B} = 30.0$ lb ↑.
b) $\mathbf{A} = 30.2$ lb ⦫ 41.4°; $\mathbf{B} = 34.6$ lb ⦫ 60.0°.
4.24 *a)* $\mathbf{A} = 20.0$ lb ↑; $\mathbf{B} = 50.0$ lb ⦫ 36.9°.
b) $\mathbf{A} = 23.1$ lb ∠ 60.0°; $\mathbf{B} = 59.6$ lb ⦫ 30.2°.
4.26 *a)* 190.9 N. *b)* 142.3 N ∠ 18.43°.
4.27 *a)* 324 N. *b)* 270 N →.
4.28 *a)* 400 N. *b)* $\mathbf{C} = 458$ N ∠ 49.1°.
4.29 *a)* 875 lb *b)* 1 584 lb ⦫ 45.0°.
4.30 $T = 80.0$ N; $\mathbf{C} = 89.4$ N ∠ 26.6°.
4.33 $T = 2P/3$; $\mathbf{C} = 0.577\ P$ →.
4.34 $T = 0.586\ P$; $\mathbf{C} = 0.414\ P$ →.
4.35 $\mathbf{A} = 69.3$ lb →; $\mathbf{B} = 34.6$ lb ⦨ 60.0°; $\mathbf{C} = 173.2$ lb ⦫ 60.0°.
4.36 $T_{BE} = 50.0$ lb; $\mathbf{A} = 18.75$ lb →; $\mathbf{D} = 18.75$ lb ←.
4.37 *a)* 1 432 N. *b)* 1 100 N ↑. *c)* 1 400 N ←.
4.38 $T_{BE} = 3\ 230$ N; $T_{CF} = 960$ N; $\mathbf{D} = 3\ 750$ N ←.
4.41 $T = 80.0$ N; $\mathbf{A} = 160.0$ N ⦨ 30.0°; $\mathbf{C} = 160.0$ N ⦫ 30.0°.
4.42 $T = 69.3$ N; $\mathbf{A} = 140.0$ N ⦨ 30.0°; $\mathbf{C} = 180.0$ N ⦫ 30.0°.
4.43 *a)* $\mathbf{A} = 78.5$ N; $\mathbf{M}_A = 125.6$ N · m ↰.
b) $\mathbf{A} = 111.0$ N ∠ 45.0°; $\mathbf{M}_A = 125.6$ N · m ↰.
c) $\mathbf{A} = 157.0$ N ↑; $\mathbf{M}_A = 251$ N · m ↰.
4.44 $\mathbf{C} = 7.07$ lb ⦫ 45.0°; $\mathbf{M}_C = 43.0$ lb · in. ↓.
4.46 $\mathbf{A} = 1\ 848$ N ∠ 82.6°; $\mathbf{M}_A = 1\ 431$ N · m ↓.
4.47 *a)* $\mathbf{D} = 20.0$ lb ↓; $\mathbf{M}_D = 20.0$ lb · ft ↰.
b) $\mathbf{D} = 10.00$ lb ↓; $\mathbf{M}_D = 30.0$ lb · ft ↓.
4.49 $\mathbf{C} = 1\ 951$ N ⦫ 88.5°; $\mathbf{M}_C = 75.0$ N · m ↓.
4.50 1.232 kN $\le T \le$ 1.774 kN.
4.51 *a)* $\theta = 2\ \text{sen}^{-1}(W/2P)$. *b)* $\theta = 29.0°$.
4.52 *a)* $T = \frac{1}{2}W/(1 - \tan\theta)$. *b)* $\theta = 39.8°$.
4.53 *a)* $\text{sen}\ \theta + \cos\theta = M/Pl$. *b)* 17.11° y 72.9°.
4.54 *a)* $\cos^3\theta = a(P + Q)/Pl$. *b)* 40.6°.
4.57 141.1°
4.58 *a)* $(1 - \cos\theta)\tan\theta = W/2kl$. *b)* 49.7°.
4.59 (1) completamente restringida; determinada;
$\mathbf{A} = \mathbf{C} = 196.2$ N ↑.
(2) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2$ N ↑.
(3) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{A}_x = 294$ N →; $\mathbf{D}_x = 294$ N ←.
(4) impropiamente restringida; indeterminada; no hay equilibrio.
(5) parcialmente restringida; determinada; equilibrio; $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 196.2$ N ↑.
(6) completamente restringida; determinada; $\mathbf{B} = 294$ N →, $\mathbf{D} = 491$ N ⦫ 53.1°.
(7) parcialmente restringida; no hay equilibrio.
(8) completamente restringida; indeterminada; $\mathbf{B} = 196.2$ N ↑, $\mathbf{D}_y = 196.2$ N ↑.
4.61 $\mathbf{A} = 400$ N ↑; $\mathbf{B} = 500$ N ⦨ 53.1°.
4.62 $a \ge 138.6$ mm.
4.66 $\mathbf{B} = 888$ ⦨ 41.3°; $\mathbf{D} = 943$ N ⦫ 45.0°.
4.67 $\mathbf{B} = 1001$ N ⦫ 48.2°; $\mathbf{D} = 943$ N ⦨ 45.0°.
4.69 *a)* 499 N. *b)* 457 N ⦫ 26.6°.
4.70 *a)* 998 N. *b)* 822 N ⦩ 5.72°.
4.71 $\mathbf{A} = 37.1$ lb ∠ 62.4°; $T = 18.57$ lb.
4.74 *a)* 24.9 lb ⦩ 30.0°. *b)* 15.34 lb ∠ 30.0°.
4.75 $T = 100.0$ lb; $\mathbf{B} = 111.1$ lb ⦨ 30.3°.
4.77 $\mathbf{A} = 170.0$ N ⦫ 33.9°; $\mathbf{C} = 160.0$ N ∠ 28.1°.
4.80 *a)* $F_{AD} = 400$ N. *b)* $\mathbf{C} = 458$ N ∠ 49.1°.
4.81 *a)* $2P$ ⦫ 60.0°. *b)* 1.239 P ⦨ 36.2°.
4.82 *a)* 1.155 P ⦫ 30.0°. *b)* 1.086 P ∠ 22.9°.
4.83 60.0 mm.
4.84 $\tan\theta = 2\tan\beta$.
4.85 *a)* 49.1°. *b)* $\mathbf{A} = 45.3$ N ←; $\mathbf{B} = 90.6$ N ∠ 60.0°.
4.87 *a)* 12.91 in. *b)* 11.62 lb. *c)* 5.92 lb.
4.88 32.5°.
4.90 *a)* 59.4°. *b)* $\mathbf{A} = 8.45$ lb →; $\mathbf{B} = 13.09$ lb ⦫ 49.8°.
4.91 $\mathbf{A} = (22.9\ \text{lb})\mathbf{i} + (8.50\ \text{lb})\mathbf{j}$; $\mathbf{B} = (22.9\ \text{lb})\mathbf{i} + (25.5\ \text{lb})\mathbf{j}$;
$\mathbf{C} = -(45.8\ \text{lb})\mathbf{i}$.

4.92 $\mathbf{A} = (56.0\text{ N})\mathbf{j} + (18.00\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (24.0\text{ N})\mathbf{j} + (42.0\text{ N})\mathbf{k}$.
4.93 $\mathbf{A} = (56.0\text{ N})\mathbf{j} + (14.40\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (24.0\text{ N})\mathbf{j} + (33.6\text{ N})\mathbf{k}$.
4.94 *a)* 37.5 lb. *b)* $\mathbf{B} = (33.8\text{ lb})\mathbf{j} - (70.0\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (33.8\text{ lb})\mathbf{j} + (28.0\text{ lb})\mathbf{k}$.
4.97 *a)* 121.9 N. *b)* −46.2 N. *c)* 100.9 N.
4.98 *a)* 95.6 N. *b)* −7.36 N. *c)* 88.3 N.
4.99 $T_A = 30.0$ lb; $T_B = 10.00$ lb; $T_C = 40.0$ lb.
4.100 $(W_D)_{\text{mín}} = 40.0$ lb; $X = 0$ in.; $Z = 30.0$ in.
4.101 $T_A = 23.5$ N; $T_C = 11.77$ N; $T_D = 105.9$ N.
4.102 *a)* 0.480 m. *b)* $T_A = 23.5$ N; $T_C = 0$; $T_D = 117.7$ N.
4.105 $T_{BD} = T_{BE} = 1\,100$ lb; $\mathbf{A} = (1\,200\text{ lb})\mathbf{i} - (560\text{ lb})\mathbf{j}$.
4.106 $T_{AD} = 2.60$ kN; $T_{AE} = 2.80$ kN; $\mathbf{C} = (1.800\text{ kN})\mathbf{j} + (4.80\text{ kN})\mathbf{k}$.
4.107 $T_{AD} = 5.20$ kN; $T_{AE} = 5.60$ kN; $\mathbf{C} = (9.60\text{ kN})\mathbf{k}$.
4.108 *a)* $T_{DE} = T_{DF} = 262$ lb. *b)* $\mathbf{A} = -(801\text{ lb})\mathbf{i} + (1\,544\text{ lb})\mathbf{j}$.
4.109 *a)* $T_{CD} = T_{CE} = 3.96$ kN. *b)* $\mathbf{A} = (6.67\text{ kN})\mathbf{i} + (1.667\text{ kN})\mathbf{j}$.
4.110 *a)* $T_{CD} = 0.954$ kN; $T_{CE} = 5.90$ kN. *b)* $\mathbf{A} = (5.77\text{ kN})\mathbf{i} + (1.443\text{ kN})\mathbf{j} - (0.833\text{ kN})\mathbf{k}$.
4.113 *a)* 101.6 N. *b)* $\mathbf{A} = -(26.3\text{ N})\mathbf{i}$; $\mathbf{B} = (98.1\text{ N})\mathbf{j}$.
4.114 *a)* 462 N. *b)* $\mathbf{C} = -(336\text{ N})\mathbf{j} + (467\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (505\text{ N})\mathbf{j} - (66.7\text{ N})\mathbf{k}$.
4.117 *a)* 49.5 lb. *b)* $\mathbf{A} = -(12.00\text{ lb})\mathbf{i} + (22.5\text{ lb})\mathbf{j} - (4.00\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (15.00\text{ lb})\mathbf{j} + (34.0\text{ lb})\mathbf{k}$.
4.118 *a)* 118.8 lb. *b)* $\mathbf{A} = (93.8\text{ lb})\mathbf{i} + (22.5\text{ lb})\mathbf{j} + (70.8\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (15.00\text{ lb})\mathbf{j} - (8.33\text{ lb})\mathbf{k}$.
4.119 *a)* 462 N. *b)* $\mathbf{C} = (169.1\text{ N})\mathbf{j} + (400\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_C = (20.0\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (151.5\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$.
4.120 *a)* 49.5 lb. *b)* $\mathbf{A} = -(12.00\text{ lb})\mathbf{i} + (37.5\text{ lb})\mathbf{j} + (30.0\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_A = -(1\,020\text{ lb}\cdot\text{in.})\mathbf{j} + (450\text{ lb}\cdot\text{in.})\mathbf{k}$.
4.121 *a)* 5.00 lb. *b)* $\mathbf{C} = -(5.00\text{ lb})\mathbf{i} + (6.00\text{ lb})\mathbf{j} - (5.00\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_C = (8.00\text{ lb}\cdot\text{in.})\mathbf{j} - (12.00\text{ lb}\cdot\text{in.})\mathbf{k}$.
4.122 $T_{CF} = 200$ N; $T_{DE} = 450$ N; $\mathbf{A} = (160.0\text{ N})\mathbf{i} + (270\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{M}_A = -(16.20\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$.
4.125 $T_{BE} = 975$ N; $T_{CF} = 600$ N; $T_{DG} = 625$ N; $\mathbf{A} = (2\,100\text{ N})\mathbf{i} + (175.0\text{ N})\mathbf{j} - (375\text{ N})\mathbf{k}$.
4.126 $T_{BE} = 1\,950$ N; $T_{CF} = 0$; $T_{DG} = 1250$ N; $\mathbf{A} = (3\,000\text{ N})\mathbf{i} - (750\text{ N})\mathbf{k}$.
4.127 $\mathbf{A} = (120.0\text{ lb})\mathbf{j} - (150.0\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (180.0\text{ lb})\mathbf{i} + (150.0\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(180.0\text{ lb})\mathbf{i} + (120.0\text{ lb})\mathbf{j}$.
4.128 $\mathbf{A} = (20.0\text{ lb})\mathbf{j} + (25.0\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (30.0\text{ lb})\mathbf{i} - (25.0\text{ lb})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(30.0\text{ lb})\mathbf{i} - (20.0\text{ lb})\mathbf{j}$.
4.129 $\mathbf{B} = (60.0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = (30.0\text{ N})\mathbf{j} - (16.00\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = -(30.0\text{ N})\mathbf{j} + (4.00\text{ N})\mathbf{k}$.
4.130 $\mathbf{B} = (60.0\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(16.00\text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{D} = (4.00\text{ N})\mathbf{k}$.
4.133 85.3 lb.
4.134 181.7 lb.
4.135 373 N
4.136 301 N
4.137 $(45.0\text{ lb})\mathbf{j}$
4.138 *a)* $x = 4.00$ ft; $y = 8.00$ ft. *b)* 10.73 lb.
4.139 *a)* $x = 0$ ft; $y = 16.00$ ft. *b)* 11.31 lb.
4.142 *a)* 37.9 N ↑. *b)* 373 N ↑.
4.143 *a)* $\mathbf{A} = 225$ N ↑; $\mathbf{C} = 641$ N ⦣ 20.6°. *b)* $\mathbf{A} = 365$ N ⦣ 60.0°; $\mathbf{B} = 844$ N ⦣ 22.0°.
4.145 *a)* 130.0 N, *b)* 224 N ⦣ 2.05°.
4.146 $\mathbf{C} = 7.97$ lb →; $\mathbf{D} = 42.6$ lb ←; $\mathbf{E} = 69.3$ lb ⦣ 60.0°.
4.148 $\mathbf{A} = 63.6$ lb ⦣ 45.0°; $\mathbf{C} = 87.5$ lb ⦣ 59.0°.
4.150 $T_{BD} = 780$ N; $T_{BE} = 390$ N; $\mathbf{A} = -(195.0\text{ N})\mathbf{i} + (1\,170\text{ N})\mathbf{j} + (130.0\text{ N})\mathbf{k}$.
4.152 $T_{FJ} = 0$; $T_{DH} = 60.0$ lb; $T_{BG} = 80.0$ lb; $\mathbf{A} = (100.0\text{ lb})\mathbf{i} - (48.0\text{ lb})\mathbf{k}$.
4.153 *a)* $\mathbf{A} = 0.745\,P$ ⦣ 63.4°; $\mathbf{C} = 0.471\,P$ ⦣ 45.0°. *b)* $\mathbf{A} = 0.812\,P$ ⦣ 60.0°; $\mathbf{C} = 0.503\,P$ ⦣ 36.2°. *c)* $\mathbf{A} = 0.448\,P$ ⦣ 60.0°; $\mathbf{C} = 0.652\,P$ ⦣ 69.9°. *d)* impropiamente restringida; no hay equilibrio.
4.C1 $\theta = 20°$: $T = 114.8$ lb; $\theta = 70°$: $T = 127.7$ lb; $T_{\text{máx}} = 132.2$ lb en $\theta = 50.4°$.
4.C2 $x = 600$ *mm*: $P = 31.4$ N; $x = 150$ *mm*: $P = 37.7$ N; $P_{\text{máx}} = 47.2$ N en $x = 283$ mm.
4.C3 $\theta = 30°$: $W = 9.66$ lb; $\theta = 60°$: $W = 36.6$ lb; $W = 5$ lb en $\theta = 22.9°$ [También en $\theta = 175.7°$].
4.C4 $\theta = 30°$: $W = 0.80$ lb; $\theta = 60°$: $W = 4.57$ lb; $W = 5$ lb en $\theta = 62.6°$ [También en $\theta = 159.6°$].
4.C5 $\theta = 30°$: $m = 7.09$ kg; $\theta = 60°$: $m = 11.02$ kg. Cuando $m = 10$ kg, $\theta = 51.0°$.
4.C6 $\theta = 15°$: $T_{BD} = 10.30$ kN, $T_{BE} = 21.7$ kN; $\theta = 30°$: $T_{BD} = 5.69$ kN, $T_{BE} = 24.4$ kN; $T_{\text{máx}} = 26.5$ kN en $\theta = 36.9°$.

CAPÍTULO 5

5.1 $\bar{X} = 175.6$ mm, $\bar{Y} = 94.4$ mm.
5.2 $\bar{X} = 16.21$ mm, $\bar{Y} = 31.9$ mm.
5.3 $\bar{X} = 19.28$ in., $\bar{Y} = 6.94$ in.
5.4 $\bar{X} = 5.67$ in., $\bar{Y} = 5.17$ in.
5.5 $\bar{X} = 7.22$ in., $\bar{Y} = 9.56$ in.
5.6 $\bar{X} = 92.0$ mm, $\bar{Y} = 23.3$ mm.
5.9 $\bar{X} = -10.00$ mm, $\bar{Y} = 87.5$ mm.
5.10 $\bar{X} = -9.89$ mm, $\bar{Y} = -10.67$ mm
5.11 $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 6.45$ in.
5.12 $\bar{X} = 50.5$ mm, $\bar{Y} = 19.34$ mm.
5.14 $\bar{X} = \bar{Y} = 9.00$ in.
5.16 $\bar{Y} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2}\right)\left(\dfrac{2\cos\alpha}{\pi - 2\alpha}\right)$
5.17 $\bar{Y} = \dfrac{r_1 + r_2}{\pi - 2\alpha}\cos\alpha$
5.18 $a/b = 4/5$
5.20 459 N
5.21 $(Q_x)_1 = 25.0\text{ in}^3$; $(Q_x)_2 = -25.0\text{ in.}^3$
5.22 $(Q_x)_1 = 23.3\text{ in}^3$; $(Q_x)_2 = -23.3\text{ in.}^3$
5.24 $\bar{X} = 172.5$ mm, $\bar{Y} = 97.5$ mm
5.26 $\bar{X} = 18.45$ in., $\bar{Y} = 6.48$ in.
5.28 *a)* $T = 5.09$ lb. *b)* $\mathbf{C} = 9.48$ lb ⦣ 57.5°.
5.29 0.739 m
5.30 $L = 0.204$ m o 0.943 m
5.32 *a)* $h = 0.513a$. *b)* $h = 0.691a$
5.34 $\bar{x} = 2/3a$, $\bar{y} = \frac{1}{3}h$.
5.35 $\bar{x} = a/2$, $\bar{y} = 2h/5$.
5.37 $\bar{x} = 2a/3(4 - \pi)$, $\bar{y} = 2b/3(4 - \pi)$
5.39 $\bar{x} = a(3 - 4\operatorname{sen}\alpha)/6(1 - \alpha)$, $\bar{y} = 0$.
5.40 $\bar{x} = a/4$, $\bar{y} = 3b/10$.
5.41 $\bar{x} = 5a/8$, $\bar{y} = b/3$.
5.42 $\bar{x} = 5L/4$, $\bar{y} = 33a/40$.
5.44 $\bar{x} = a$, $\bar{y} = 17b/35$.
5.45 $2/5a$
5.46 $-2\sqrt{2}r/3\pi$.
5.48 $\bar{x} = 0.236L$, $\bar{y} = 0.454a$.
5.49 $\bar{x} = -9.27a$, $\bar{y} = 3.09a$.
5.50 $\bar{x} = 1.629$ in., $\bar{y} = 0.1853$ in.
5.51 $a = 1.901$ in. o 3.74 in.
5.52 *a)* $V = 6.19 \times 10^6\text{ mm}^3$; $A = 458 \times 10^3\text{ mm}^2$. *b)* $V = 16.88 \times 10^6\text{ mm}^3$; $A = 1.171 \times 10^6\text{ mm}^2$.
5.53 *a)* $V = 308 \times 10^3\text{ mm}^3$; $A = 38.2 \times 10^3\text{ mm}^2$. *b)* $V = 177.2 \times 10^3\text{ mm}^3$; $A = 22.4 \times 10^3\text{ mm}^2$.
5.54 *a)* $V = 169.0 \times 10^3\text{ in}^3$; $A = 28.4 \times 10^3\text{ in}^2$. *b)* $V = 88.9 \times 10^3\text{ in}^3$; $A = 15.48 \times 10^3\text{ in}^2$.

5.56 $V = 3\,470\text{ mm}^3$; $A = 2\,320\text{ mm}^2$.
5.58 $V = 0.0900\text{ in}^3$.
5.59 $V = 31.9$ litros.
5.61 $m = 0.0305$ kg.
5.63 22.0 galones
5.64 66.5%
5.66 *a)* $\mathbf{R} = 1\,215$ lb ↓, $\bar{x} = 4.33$ ft.
b) $\mathbf{A} = 630$ lb ↑; $\mathbf{B} = 585$ lb ↑
5.67 *a)* $\mathbf{R} = 2\,400$ N ↓, 2.33 m a la derecha de A.
b) $\mathbf{A} = 1\,000$ N ↑; $\mathbf{B} = 1\,400$ N ↑.
5.68 $\mathbf{A} = 32.0$ kN; $\mathbf{M}_A = 124.0$ kN · m ↺.
5.69 $\mathbf{B} = 1\,360$ lb ↑; $\mathbf{C} = 2\,360$ lb ↑.
5.71 $\mathbf{A} = 480$ N ↑; $\mathbf{B} = 840$ N ↓.
5.73 $\mathbf{A} = 3\,000$ N ↑; $\mathbf{M}_A = 12.60$ kN · m ↺.
5.74 *a)* $a = 0.536$ m. *b)* $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 761$ N ↑.
5.76 $\mathbf{B} = 150.0$ lb ↑; $\mathbf{C} = 5\,250$ lb ↑.
5.77 *a)* $w_0 = 100.0$ lb/ft. *b)* $\mathbf{C} = 4\,950$ lb ↑.
5.78 $w_A = 10.00$ kN/m; $w_B = 50.0$ kN/m.
5.80 *a)* $\mathbf{H} = 254$ kN →; $\mathbf{V} = 831$ kN ↑.
b) $x = 3.25$ m a la derecha de A.
c) $\mathbf{R} = 268$ kN ⦣ 18.4°.
5.81 *a)* $\mathbf{H} = 13.76$ kips →; $\mathbf{V} = 113.0$ kips ↑.
b) 22.4 ft a la derecha de A.
c) $\mathbf{R} = 25.6$ kips ⦣ 57.5°.
5.82 $d = 2.64$ m.
5.83 $\mathbf{T} = 67.2$ kN ←; $\mathbf{A} = 141.2$ kN ←.
5.84 $\mathbf{T} = 3.70$ kips ↑.
5.85 $d = 5.88$ ft.
5.88 $\mathbf{A} = 1\,197$ N ⦨ 53.1°; $\mathbf{B} = 1\,511$ N ⦨ 53.1°.
5.89 $T = 3\,570$ N.
5.90 $T = 208$ lb
5.91 $d = 6.00$ ft.
5.93 $d = 0.683$ m
5.94 $h = 0.0711$ m
5.96 *a)* $b/10$ a la izquierda de la base del cono.
b) $0.01136b$ a la derecha de la base del cono.
5.97 $\bar{Y} = -(2h^2 - 3b^2)/2(4h - 3b)$.
5.98 $\bar{Z} = -a(4h - 2b)/\pi(4h - 3b)$.
5.99 *a)* $\bar{Y} = -0.402a$. *b)* $h/a = 2/5$ o $2/3$.
5.100 $\bar{X} = 46.8$ mm.
5.101 $\bar{Z} = 26.2$ mm.
5.103 $\bar{Y} = -0.1403$ in.
5.104 $\bar{Z} = 3.47$ in.
5.106 $\bar{X} = 0.295$ m, $\bar{Y} = 0.423$ m, $\bar{Z} = 1.703$ m.
5.107 $\bar{X} = 125.0$ mm, $\bar{Y} = 167.0$ mm, $\bar{Z} = 33.5$ mm.
5.108 $\bar{X} = \bar{Z} = 4.21$ in., $\bar{Y} = 7.03$ in.
5.110 $\bar{X} = 46.5$ mm, $\bar{Y} = 27.2$ mm, $\bar{Z} = 30.0$ mm
5.111 $\bar{X} = 17.00$ in., $\bar{Y} = 15.68$ in., $\bar{Z} = 14.16$ in.
5.112 $\bar{X} = 180.2$ mm, $\bar{Y} = 38.0$ mm, $\bar{Z} = 193.5$ mm.
5.114 $\bar{X} = 0.1452$ m, $\bar{Y} = 0.396$ m, $\bar{Z} = 0.370$ m.
5.115 $\bar{X} = 0.410$ m, $\bar{Y} = 0.510$ m, $\bar{Z} = 0.1500$ m.
5.117 $\bar{X} = 1.750$ ft, $\bar{Y} = 4.14$ ft, $\bar{Z} = 1.355$ ft.
5.118 $\bar{X} = 61.6$ mm desde el extremo del mango.
5.119 $\bar{Y} = 0.526$ in. arriba de la base.
5.121 $\bar{Y} = 421$ mm. arriba del piso.
5.122 $(\bar{x})_1 = 21a/88$; $(\bar{x})_2 = 27a/40$.
5.123 $(\bar{x})_1 = 21h/88$; $(\bar{x})_2 = 27h/40$.
5.124 $(\bar{x})_1 = 2h/9$; $(\bar{x})_2 = 2h/3$.
5.125 $\bar{x} = h/6$; $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
5.128 $\bar{x} = 1.297a$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
5.129 $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = 0.374h$.
5.132 *a)* $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = -121.9$ mm.
b) $\bar{x} = \bar{z} = 0$, $\bar{y} = -90.2$ mm.
5.133 $V = 688\text{ ft}^3$; $\bar{x} = 15.91$ ft.
5.134 $\bar{x} = a/2$, $\bar{y} = 8h/25$, $\bar{z} = b/2$.
5.136 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5h/16$, $\bar{z} = -b/4$.
5.137 $\bar{X} = 19.27$ mm, $\bar{Y} = 26.6$ mm.
5.138 $\bar{X} = 3.20$ in., $\bar{Y} = 2.00$ in.
5.140 $\bar{x} = a/2$, $\bar{y} = 3h/5$.
5.141 $\bar{x} = 3a/8$, $\bar{y} = b$.
5.143 $\mathbf{A} = 1\,300$ N ↑; $\mathbf{B} = 1\,850$ N ↑.
5.146 *a)* $\bar{x} = 0.548L$. *b)* $h/L = 2\sqrt{3}$.
5.147 $\bar{X} = 0.1402$ m, $\bar{Y} = 0.0944$ m, $\bar{Z} = 0.0959$ m.
5.148 $\bar{x} = 2.34$ m, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.
5.C1 *b)* $\mathbf{A} = 1\,220$ lb ↑; $\mathbf{B} = 1\,830$ lb ↑.
c) $\mathbf{A} = 1\,265$ lb ↑; $\mathbf{B} = 1\,601$ lb ↑.
5.C2 *a)* $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 0.278$ m, $\bar{Z} = 0.0878$ m.
b) $\bar{X} = 0.0487$ mm, $\bar{Y} = 0.1265$ mm, $\bar{Z} = 0.0997$ mm.
c) $\bar{X} = -0.0372$ m, $\bar{Y} = 0.1659$ m, $\bar{Z} = 0.1043$ m.
5.C3 $d = 1.00$ *m*: $\mathbf{F} = 5.66$ kN ⦩ 30°;
$d = 3.00$ *m*: $\mathbf{F} = 49.9$ kN ⦩ 27.7°.
5.C4 *a)* $\bar{X} = 5.80$ in., $\bar{Y} = 1.492$ in. *b)* $\bar{X} = 9.11$ in., $\bar{Y} = 2.78$ in.
c) $\bar{X} = 8.49$ in., $\bar{Y} = 0.375$ in.
5.C5 *With $n = 40$: a)* $\bar{X} = 60.2$ mm, $\bar{Y} = 23.4$ mm.
b) $\bar{X} = 60.2$ mm, $\bar{Y} = 146.2$ mm.
c) $\bar{X} = 68.7$ mm, $\bar{Y} = 20.4$ mm.
d) $\bar{X} = 68.7$ mm, $\bar{Y} = 127.8$ mm.
5.C6 *With $n = 40$: a)* $\bar{X} = 60.0$ mm, $\bar{Y} = 24.0$ mm.
b) $\bar{X} = 60.0$ mm, $\bar{Y} = 150.0$ mm.
c) $\bar{X} = 68.6$ mm, $\bar{Y} = 21.8$ mm.
d) $\bar{X} = 68.6$ mm, $\bar{Y} = 136.1$ mm.
5.C7 *a)* $V = 628\text{ ft}^3$. *b)* $\bar{X} = 8.65$ ft, $\bar{Y} = -4.53$ ft,
$\bar{Z} = 9.27$ ft.

CAPÍTULO 6

6.1 $F_{AB} = 52.0$ kN T; $F_{AC} = 64.0$ kN T; $F_{BC} = 80.0$ kN C.
6.2 $F_{AB} = 375$ lb C; $F_{AC} = 780$ lb C; $F_{BC} = 300$ lb T.
6.3 $F_{AB} = 4.00$ kN C; $F_{AC} = 2.72$ kN T; $F_{BC} = 2.40$ kN C.
6.5 $F_{AB} = F_{BC} = 31.5$ kips T; $F_{AD} = 35.7$ kips C;
$F_{BD} = 10.80$ kips C; $F_{CD} = 33.3$ kips C.
6.6 $F_{AB} = F_{BD} = 0$; $F_{AC} = 675$ N T; $F_{AD} = 1\,125$ N C;
$F_{CD} = 900$ N T; $F_{CE} = 2025$ N T; $F_{CF} = 2\,250$ N C;
$F_{DF} = 675$ N C; $F_{EF} = 1\,800$ N T.
6.7 $F_{AB} = 15.90$ kN C; $F_{AC} = 13.50$ kN T; $F_{BC} = 16.80$ kN C;
$F_{BD} = 13.50$ kN C; $F_{CD} = 15.90$ kN T.
6.9 $F_{AB} = 47.2$ kN C; $F_{AC} = 44.6$ kN T; $F_{BC} = 10.50$ kN C;
$F_{BD} = 47.2$ kN C; $F_{CD} = 17.50$ kN T; $F_{CE} = 30.6$ kN T;
$F_{DE} = 0$.
6.10 $F_{AB} = F_{HI} = 12.31$ kN C; $F_{AC} = F_{GI} = 11.25$ kN T;
$F_{BC} = F_{GH} = 2.46$ kN C; $F_{BD} = F_{DE} = F_{EF} = F_{FH} = 9.85$ kN C; $F_{CD} = F_{FG} = 2.00$ kN C; $F_{CE} = F_{EG} = 3.75$ kN T;
$F_{CG} = 6.75$ kN T.
6.11 $F_{AB} = F_{FH} = 1\,500$ lb C; $F_{AC} = F_{CE} = F_{EG} = F_{GH} =$ 1200 lb T; $F_{BC} = F_{FG} = 0$; $F_{BD} = F_{DF} = 1\,000$ lb C;
$F_{BE} = F_{EF} = 500$ lb C; $F_{DE} = 600$ lb T.
6.12 $F_{AB} = F_{FH} = 1\,500$ lb C; $F_{AC} = F_{CE} = F_{EG} = F_{GH} =$ 1200 lb T; $F_{BC} = F_{FG} = 0$; $F_{BD} = F_{DF} = 1\,200$ lb C;
$F_{BE} = F_{EF} = 60.0$ lb C; $F_{DE} = 72.0$ lb T.
6.15 $F_{AB} = 7.50$ kips C; $F_{AC} = 4.50$ kips T; $F_{BC} = 7.50$ kips T;
$F_{BD} = 9.00$ kips C; $F_{CD} = 0$; $F_{CE} = 9.00$ kips T.
6.16 $F_{AB} = 5.00$ kips C; $F_{AC} = 3.00$ kips T; $F_{BC} = 5.00$ kips T;
$F_{BD} = 6.00$ kips C; $F_{CD} = F_{EF} = 2.50$ kips T; $F_{CE} =$ 4.50 kips T; $F_{DE} = F_{FG} = 2.50$ kips C; $F_{DF} = 3.00$ kips C;
$F_{EG} = 1.500$ kips T.

6.19 $F_{AB} = 9.90$ kN C; $F_{AC} = 7.83$ kN T; $F_{BC} = 0$; $F_{BD} = 7.07$ kN C; $F_{BE} = 2.00$ kN C; $F_{CE} = 7.83$ kN T; $F_{DE} = 1.000$ kN T; $F_{DF} = 5.03$ kN C; $F_{DG} = 0.559$ kN C; $F_{EG} = 5.59$ kN T.
6.20 $F_{FG} = 3.50$ kN T; $F_{FH} = 5.03$ kN C; $F_{GH} = 1.677$ kN T; $F_{GI} = F_{IK} = F_{KL} = 3.35$ kN T; $F_{HI} = F_{IJ} = F_{JK} = 0$; $F_{HJ} = F_{JL} = 4.42$ kN C.
6.21 $F_{AB} = 2\,240$ lb C; $F_{AC} = F_{CE} = 2\,000$ lb T; $F_{BC} = F_{EH} = 0$; $F_{BD} = 1\,789$ lb C; $F_{BE} = 447$ lb C; $F_{DE} = 600$ lb C; $F_{DF} = 2\,010$ lb C; $F_{DG} = 224$ lb T; $F_{EG} = 1\,789$ lb T.
6.22 $F_{FG} = 1\,400$ lb T; $F_{FI} = 2\,010$ lb C; $F_{GI} = 671$ lb C; $F_{GJ} = 2\,430$ lb T; $F_{IJ} = 361$ lb T; $F_{IK} = 2\,910$ lb C; $F_{JK} = 447$ lb C; $F_{JL} = 3\,040$ lb T; $F_{KL} = 3\,350$ lb C.
6.23 $F_{AB} = 9.39$ kN C; $F_{AC} = 8.40$ kN T; $F_{BC} = 2.26$ kN C; $F_{BD} = 7.60$ kN C; $F_{CD} = 0.128$ kN C; $F_{CE} = 7.07$ kN T; $F_{DE} = 2.14$ kN C; $F_{DF} = 6.10$ kN C; $F_{EF} = 2.23$ kN T.
6.24 $F_{AB} = F_{DF} = 2.29$ kN T; $F_{AC} = F_{EF} = 2.29$ kN C; $F_{BC} = F_{DE} = 0.600$ kN C; $F_{BD} = 2.21$ kN T; $F_{BE} = F_{EH} = 0$; $F_{CE} = 2.21$ kN C; $F_{CH} = F_{EJ} = 1.200$ kN C.
6.27 $F_{AB} = 31.0$ kips C; $F_{AC} = 28.3$ kips C; $F_{AD} = 15.09$ kips T; $F_{AE} = 9.50$ kips T; $F_{BD} = 21.5$ kips T; $F_{BF} = 28.0$ kips C; $F_{CE} = 41.0$ kips T; $F_{CG} = 42.0$ kips C; $F_{DE} = 22.0$ kips T; $F_{DF} = 33.5$ kips T; $F_{EG} = 0$.
6.28 $F_{AB} = 128.0$ kN T; $F_{AC} = 136.7$ kN C; $F_{BD} = F_{DF} = F_{FH} = 128.0$ kN T; $F_{CE} = F_{EG} = 136.7$ kN C; $F_{GH} = 192.7$ kN C.
6.29 La armadura del prob*l*ema 6.33*a* es la única armadura simple.
6.30 La armadura del prob*l*ema 6.32*b* es la única armadura simple.
6.31 *a*) *BC, CD, IJ, IL, LM, MN*. *b*) *BC, BE, DE, EF, FG, IJ, KN, MN*.
6.32 *a*) *AI, BJ, CK, DI, EI, FK, GK*. *b*) *FK, IO*.
6.35 $F_{AB} = F_{AD} = 244$ lb C; $F_{AC} = 1\,040$ lb T; $F_{BC} = F_{CD} = 500$ lb C; $F_{BD} = 280$ lb T.
6.36 $F_{AB} = F_{AD} = 861$ N C; $F_{AC} = 676$ N C; $F_{BC} = F_{CD} = 162.5$ N T; $F_{BD} = 244$ N T.
6.37 $F_{AB} = F_{AD} = 2\,810$ N T; $F_{AC} = 5\,510$ N C; $F_{BC} = F_{CD} = 1\,325$ N T; $F_{BD} = 1\,908$ N C.
6.38 $F_{AB} = F_{AC} = 1\,061$ lb C; $F_{AD} = 2\,500$ lb T; $F_{BC} = 2\,100$ lb T; $F_{BD} = F_{CD} = 1\,250$ lb C; $F_{BE} = F_{CE} = 1\,250$ lb C; $F_{DE} = 1\,500$ lb T.
6.39 $F_{AB} = 840$ N C; $F_{AC} = 110.6$ N C; $F_{AD} = 394$ N C; $F_{AE} = 0$; $F_{BC} = 160.0$ N T; $F_{BE} = 200$ N T; $F_{CD} = 225$ N T; $F_{CE} = 233$ N C; $F_{DE} = 120.0$ N T.
6.40 $F_{AB} = 0$; $F_{AC} = 995$ N T; $F_{AD} = 1\,181$ N C; $F_{AE} = F_{BC} = 0$; $F_{BE} = 600$ N T; $F_{CD} = 375$ N T; $F_{CE} = 700$ N C; $F_{DE} = 360$ N T.
6.43 $F_{CE} = 8\,000$ lb T; $F_{DE} = 2\,600$ lb T; $F_{DF} = 9\,000$ lb C
6.44 $F_{EG} = 7\,500$ lb T; $F_{FG} = 3\,900$ lb C; $F_{FH} = 6\,000$ lb C
6.45 $F_{BD} = 216$ kN T; $F_{DE} = 270$ kN T.
6.46 $F_{DG} = 459$ kN C; $F_{EG} = 216$ kN C.
6.49 $F_{CE} = 7.20$ kN T; $F_{DE} = 1.047$ kN C; $F_{DF} = 6.39$ kN C.
6.50 $F_{EG} = 3.46$ kN T; $F_{GH} = 3.78$ kN C; $F_{HJ} = 3.55$ kN C.
6.51 $F_{DF} = 10.48$ kips C; $F_{DG} = 3.35$ kips C; $F_{EG} = 13.02$ kips T.
6.52 $F_{GI} = 13.02$ kips T; $F_{HI} = 0.800$ kips T; $F_{HJ} = 13.97$ kips C.
6.53 $F_{CE} = 8.00$ kN T; $F_{DE} = 4.50$ kN C; $F_{DF} = 10.00$ kN C.
6.54 $F_{FH} = 10.00$ kN C; $F_{FI} = 4.92$ kN T; $F_{GI} = 6.00$ kN T.
6.55 $F_{AD} = 13.5$ kN C; $F_{CD} = 0$; $F_{CE} = 56.1$ kN T.
6.56 $F_{DG} = 75.0$ kN C; $F_{FG} = 56.1$ kN T; $F_{FH} = 69.7$ kN T.
6.57 $F_{AB} = 8.20$ kips T; $F_{AG} = 4.50$ kips T; $F_{FG} = 11.60$ kips C.
6.58 $F_{AE} = 17.46$ kips T; $F_{EF} = 11.60$ kips C; $F_{FJ} = 18.45$ kips C.
6.61 $F_{AF} = 1.500$ kN T; $F_{EJ} = 0.900$ kN T.
6.62 $F_{AF} = 0.900$ kN T; $F_{EJ} = 0.300$ kN T.
6.65 *a*) *CJ*. *b*) 1.026 kN *T*.
6.66 *a*) *IO*. *b*) 2.05 kN *T*.
6.67 $F_{BG} = 5.48$ kips T; $F_{DG} = 1.825$ kips T.
6.68 $F_{CF} = 3.65$ kips T; $F_{CH} = 7.30$ kips T.
6.69 *a*) impropiamente restringida. *b*) completamente restringida, determinada. *c*) completamente restringida, indeterminada.
6.70 *a*) completamente restringida, determinada. *b*) parcialmente restringida. *c*) impropiamente restringida.
6.71 *a*) completamente restringida, determinada. *b*) completamente restringida, indeterminada. *c*) impropiamente restringida
6.72 *a*) parcialmente restringida. *b*) completamente restringida, determinada. *c*) completamente restringida, indeterminada.
6.75 *a*) 125 N ⦪ 36.9°. *b*) 125 N ⦩ 36.9°.
6.76 $F_{BD} = 255$ N C; $\mathbf{C}_x = 120.0$ N →; $\mathbf{C}_y = 625$ N ↑.
6.77 *a*) 80.0 lb *T*. *b*) 72.1 lb ⦩ 16.1°.
6.78 *a*) 80.0 lb *T*. *b*) 72.1 lb ⦨ 16.1°.
6.81 $\mathbf{A}_x = 18.00$ kN ←; $\mathbf{A}_y = 20.0$ kN ↓; $\mathbf{B} = 9.00$ kN →; $\mathbf{C}_x = 9.00$ kN →, $\mathbf{C}_y = 20.0$ kN ↑.
6.82 $\mathbf{A} = 20.0$ kN ↓; $\mathbf{B} = 18.00$ kN ←; $\mathbf{C}_x = 18.00$ kN →, $\mathbf{C}_y = 20.0$ kN ↑.
6.83 *a*) $\mathbf{A}_x = 450$ N ←, $\mathbf{A}_y = 525$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 450$ N →, $\mathbf{E}_y = 225$ N ↑; *b*) $\mathbf{A}_x = 450$ N ←, $\mathbf{A}_y = 150.0$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 450$ N →, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.
6.84 *a*) $\mathbf{A}_x = 300$ N ←, $\mathbf{A}_y = 660$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 300$ N →, $\mathbf{E}_y = 90.0$ N ↑. *b*) $\mathbf{A}_x = 300$ N ←, $\mathbf{A}_y = 150.0$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 300$ N →, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.
6.87 *a*) $\mathbf{A}_x = 80.0$ lb ←, $\mathbf{A}_y = 40.0$ lb ↑; $\mathbf{B}_x = 80.0$ lb →, $\mathbf{B}_y = 60.0$ lb ↑. *b*) $\mathbf{A}_x = 0$, $\mathbf{A}_y = 40.0$ lb ↑; $\mathbf{B}_x = 0$, $\mathbf{B}_y = 60.0$ lb ↑.
6.88 *a*) y *c*) $\mathbf{B}_x = 32.0$ lb →, $\mathbf{B}_y = 10.00$ lb ↑; $\mathbf{F}_x = 32.0$ lb ←, $\mathbf{F}_y = 38.0$ lb ↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 32.0$ lb →, $\mathbf{B}_y = 34.0$ lb ↑, $\mathbf{F}_x = 32.0$ lb ←, $\mathbf{F}_y = 14.00$ lb ↑.
6.89 *a*) y *c*) $\mathbf{B}_x = 24.0$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 7.5$ lb ↓; $\mathbf{F}_x = 24.0$ lb →, $\mathbf{F}_y = 7.50$ lb ↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 24.0$ lb ←, $\mathbf{B}_y = 10.50$ lb ↑; $\mathbf{F}_x = 24.0$ lb →, $\mathbf{F}_y = 10.50$ lb ↓.
6.91 $\mathbf{B}_x = 700$ N ←, $\mathbf{B}_y = 200$ N ↓; $\mathbf{E}_x = 700$ N →, $\mathbf{E}_y = 500$ N ↑.
6.92 $\mathbf{D}_x = 13.60$ kN →, $\mathbf{D}_y = 7.50$ kN ↑; $\mathbf{E}_x = 13.60$ kN ←, $\mathbf{E}_y = 2.70$ kN ↓
6.93 $\mathbf{A}_x = 176.3$ lb ←, $\mathbf{A}_y = 60.0$ lb ↓; $\mathbf{G}_x = 56.3$ lb →, $\mathbf{G}_y = 510$ lb ↑.
6.94 $\mathbf{A}_x = 56.3$ lb ←, $\mathbf{A}_y = 157.5$ lb ↓; $\mathbf{G}_x = 56.3$ lb →, $\mathbf{G}_y = 383$ lb ↑.
6.95 *a*) $\mathbf{A} = 982$ lb ↑; $\mathbf{B} = 935$ lb ↑; $\mathbf{C} = 733$ lb ↑. *b*) $\Delta B = +291$ lb; $\Delta C = -72.7$ lb.
6.96 *a*) = 572 lb. *b*) $\mathbf{A} = 1070$ lb ↑; $\mathbf{B} = 709$ lb ↑; $\mathbf{C} = 870$ lb ↑.
6.99 $\mathbf{C}_x = 78.0$ lb →, $\mathbf{C}_y = 28.0$ lb ↑; $\mathbf{F}_x = 78.0$ lb ←, $\mathbf{F}_y = 12.00$ lb ↑.
6.100 $\mathbf{C}_x = 21.7$ lb →, $\mathbf{C}_y = 37.5$ lb ↓; $\mathbf{D}_x = 21.7$ lb ←, $\mathbf{D}_y = 62.5$ lb ↑.
6.101 $\mathbf{A}_x = 13.00$ kN ←, $\mathbf{A}_y = 4.00$ kN ↓; $\mathbf{B}_x = 36.0$ kN →, $\mathbf{B}_y = 6.00$ kN ↑; $\mathbf{E}_x = 23.0$ kN ←, $\mathbf{E}_y = 2.00$ kN ↓.
6.102 $\mathbf{A}_x = 2\,025$ N ←, $\mathbf{A}_y = 1\,800$ N ↓; $\mathbf{B}_x = 4\,050$ N →, $\mathbf{B}_y = 1\,200$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 2\,025$ N ←, $\mathbf{E}_y = 600$ N ↑.
6.103 *a*) $\mathbf{C}_x = 100.0$ lb ←, $\mathbf{C}_y = 100.0$ lb ↑; $\mathbf{D}_x = 100.0$ lb →, $\mathbf{D}_y = 20.0$ lb ↓. *b*) $\mathbf{E}_x = 100.0$ lb ←, $\mathbf{E}_y = 180.0$ lb ↑.
6.104 *a*) $\mathbf{C}_x = 100.0$ lb ←, $\mathbf{C}_y = 60.0$ lb ↑; $\mathbf{D}_x = 100.0$ lb →, $\mathbf{D}_y = 20.0$ lb ↑. *b*) $\mathbf{E}_x = 100.0$ lb ←, $\mathbf{E}_y = 140.0$ lb ↑.
6.107 *a*) $\mathbf{A}_x = 200$ kN →, $\mathbf{A}_y = 122$ kN ↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 200$ kN ←, $\mathbf{B}_y = 10.00$ kN ↓.
6.108 *a*) $\mathbf{A}_x = 205$ kN →, $\mathbf{A}_y = 134.5$ kN ↑. *b*) $\mathbf{B}_x = 205$ kN ←, $\mathbf{B}_y = 5.50$ kN ↑.

6.109 $\mathbf{B} = 98.5$ lb ∡ 24.0°; $\mathbf{C} = 90.6$ lb ⦩ 6.3°.
6.110 *a)* 301 lb ⦨ 48.4°. *b)* 375 lb *T*.
6.111 $F_{AC} = \sqrt{2}\,P/6\ C$; $F_{BF} = 2\sqrt{2}\,P/3\ C$; $F_{DI} = \sqrt{2}\,P/3\ C$; $F_{EH} = \sqrt{2}\,P/6\ T$.
6.113 $F_{AF} = P/4\ C$; $F_{BG} = F_{DG} = P/\sqrt{2}\ C$; $F_{EH} = P/4\ T$.
6.115 $F_{AF} = M_0/4a\ C$; $F_{BG} = F_{DG} = M_0/\sqrt{2}a\ T$; $F_{EH} = 3M_0/4a\ C$.
6.116 $F_{AF} = \sqrt{2}\,M_0/3a\ C$; $F_{BG} = M_0/a\ T$; $F_{DG} = M_0/a\ C$; $F_{EH} = 2\sqrt{2}\,M_0/3a\ T$.
6.117 $\mathbf{E} = P/5\downarrow$; $\mathbf{F} = 8P/5\uparrow$; $\mathbf{G} = 4P/5\downarrow$; $\mathbf{H} = 2P/5\uparrow$.
6.118 $\mathbf{A} = P/15\uparrow$; $\mathbf{D} = 2P/15\uparrow$; $\mathbf{E} = 8P/15\uparrow$; $\mathbf{H} = 4P/15\uparrow$.
6.119 *a)* $\mathbf{A} = 2.06P$ ∡ 14.0°; $\mathbf{B} = 2.06P$ ⦩ 14.0°; el armazón es rígido. *b)* El armazón no es rígido. *c)* $\mathbf{A} = 1.25P$ ⦩ 36.9°; $\mathbf{B} = 1.031P$ ∡ 14.0°; el armazón es rígido.
6.122 *a)* $(F_{BD})_y = 96.0$ lb ↓ *b)* $F_{BD} = 100.0$ lb ∡ 73.7°.
6.123 *a)* $(F_{BD})_y = 240$ lb ↓ *b)* $F_{BD} = 250$ lb ∡ 73.7°.
6.126 *a)* 746 N ↓. *b)* 565 N ⦨ 61.3°.
6.127 *a)* 302 N ↓. *b)* 682 N ⦨ 61.3°.
6.128 $T_{DE} = 81.0$ N; $\mathbf{B} = 216$ N ↓.
6.129 *a)* 21.0 kN ←. *b)* 52.5 kN ←.
6.130 *a)* 1 143 N · m ↻. *b)* 457 N · m ↻.
6.131 832 lb · in. ↺.
6.132 360 lb · in. ↺.
6.133 195.0 kN · m ↻.
6.134 40.5 kN · m ↺.
6.137 208 N · m ↻.
6.138 18.43 N · m ↻.
6.139 $F_{AE} = 800$ N *T*; $F_{DG} = 100.0$ N *C*.
6.140 $\mathbf{P} = 120.0$ N ↓; $\mathbf{Q} = 110.0$ N ←.
6.142 $\mathbf{F} = 3\,290$ lb ⦨ 15.12°; $\mathbf{D} = 4\,450$ lb ←.
6.143 $\mathbf{D} = 30.0$ kN ←; $\mathbf{F} = 37.5$ kN ⦨ 36.9°.
6.144 $\mathbf{D} = 150.0$ kN ←; $\mathbf{F} = 96.4$ kN ⦨ 13.50°.
6.145 *a)* 475 lb. *b)* 528 lb ⦩ 63.3°.
6.146 44.8 kN.
6.148 8.45 kN.
6.149 25.0 lb ↓
6.150 10.00 lb ↓.
6.151 240 N.
6.154 *a)* 14.11 kN ⦨ 19.10°. *b)* 19.79 kN ⦩ 47.6°.
6.155 *a)* 4.91 kips *C*. *b)* 10.69 kips *C*.
6.156 *a)* 2.86 kips *C*. *b)* 9.43 kips *C*.
6.159 *a)* $M_0 = (90.0\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$. *b)* $\mathbf{A} = 0$; $\mathbf{B} = 0$; $\mathbf{M}_B = -(72.0\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$
6.160 *a)* 27.0 mm. *b)* 40.0 N · m ↻.
6.163 $\mathbf{E}_x = 100.0$ kN →, $\mathbf{E}_y = 154.9$ kN ↑; $\mathbf{F}_x = 26.5$ kN →, $\mathbf{F}_y = 118.1$ kN ↓; $\mathbf{H}_x = 126.5$ kN ←, $\mathbf{H}_y = 36.8$ kN ↓.
6.164 $F_{AB} = F_{AE} = 671$ lb *T*; $F_{AC} = F_{AD} = 1\,000$ lb *C*; $F_{BC} = F_{DE} = 600$ lb *C*; $F_{CD} = 200$ lb *T*.
6.166 $F_{FG} = 5.23$ kN *C*; $F_{EG} = 0.1476$ kN *C*; $F_{EH} = 5.08$ kN *T*.
6.167 $F_{KM} = 5.02$ kN *T*; $F_{LM} = 1.963$ kN *C*; $F_{LN} = 3.95$ kN *C*.
6.168 $\mathbf{A}_x = 25.0$ kips ←, $\mathbf{A}_y = 20.0$ kips ↑; $\mathbf{B}_x = 25.0$ kips ←, $\mathbf{B}_y = 190.00$ kips ↓; $\mathbf{C}_x = 50.0$ kips →, $\mathbf{C}_y = 10.00$ kips ↓.
6.170 $\mathbf{A}_x = 150.0$ N ←, $\mathbf{A}_y = 250$ N ↑; $\mathbf{E}_x = 150.0$ N →, $\mathbf{E}_y = 450$ N ↑.
6.171 $\mathbf{A} = 327$ lb →; $\mathbf{B} = 827$ lb ←; $\mathbf{D} = 621$ lb ↑; $\mathbf{E} = 246$ lb ↑.
6.172 *a)* $\mathbf{P} = 109.8$ N →. *b)* 126.8 N *T*, *c)* 139.8 N ⦩ 38.3°.
6.175 *a)* 312 lb. *b)* 135.0 lb · in. ↻.
6.C1 *a)* $\theta = 30°$: $W = 472$ lb, $A_{AB} = 1.500\ \text{in}^2$, $A_{AC} = A_{CE} = 1.299\ \text{in.}^2$, $A_{BC} = A_{BE} = 0.500\ \text{in.}^2$, $A_{BD} = 1.732\ \text{in.}^2$ *b)* $\theta_{opt} = 56.8°$: $W = 312$ lb, $A_{AB} = 0.896\ \text{in.}^2$, $A_{AC} = A_{CE} = 0.491\ \text{in.}^2$, $A_{BC} = 0.500\ \text{in.}^2$, $A_{BE} = 0.299\ \text{in.}^2$, $A_{BD} = 0.655\ \text{in.}^2$
6.C2 *a)* Para $x = 9.75$ m, $F_{BH} = 3.19$ kN *T*. *b)* Para $x = 3.75$ m, $F_{BH} = 1.313$ kN *C*. *c)* Para $x = 6$ m, $F_{GH} = 3.04$ kN *T*.
6.C3 $\theta = 30°$: $\mathbf{M} = 5\,860$ lb · ft ↺; $\mathbf{A} = 670$ lb ∡ 75.5°. *a)* $M_{\text{máx}} = 8\,680$ lb · ft cuando $\theta = 65.9°$. *b)* $A_{\text{máx}} = 1\,436$ lb cuando $\theta = 68.5°$.
6.C4 $\theta = 30°$: $\mathbf{M}_A = 1.669$ N · m ↺, $F = 11.79$ N. $\theta = 80°$: $\mathbf{M}_A = 3.21$ N · m ↺, $F = 11.98$ N.
6.C5 $d = 0.40$ *in.*: 634 lb *C*; $d = 0.55$ *in.*: 286 lb *C*; $d = 0.473$ *in.*: $F_{AB} = 500$ lb *C*.
6.C6 $\theta = 20°$: $M = 31.8$ N · m; $\theta = 75°$: $M = 12.75$ N · m; $\theta = 60.0°$: $M_{\text{mín}} = 12.00$ N · m.

CAPÍTULO 7

7.1 $\mathbf{F} = 0$; $\mathbf{V} = 80.0$ lb ↑; $\mathbf{M} = 480$ lb · in. ↺.
7.2 $\mathbf{F} = 0$; $\mathbf{V} = 40.0$ lb ↑; $\mathbf{M} = 240$ lb · in. ↺.
7.3 $\mathbf{F} = 4.80$ kN ←; $\mathbf{V} = 1.400$ kN ↓; $\mathbf{M} = 1.380$ kN · m ↻.
7.4 $\mathbf{F} = 3.00$ kN ←; $\mathbf{V} = 0$; $\mathbf{M} = 0.600$ kN · m ↻.
7.7 (Sobre *AJ*) $\mathbf{F} = 103.9$ N ↖; $\mathbf{V} = 60.0$ N ↗; $\mathbf{M} = 18.71$ N · m ↻.
7.8 (Sobre *BK*) $\mathbf{F} = 60.0$ N ↙; $\mathbf{V} = 103.9$ N ↘; $\mathbf{M} = 10.80$ N · m ↺.
7.9 (Sobre *CJ*) $\mathbf{F} = 23.6$ lb ↘; $\mathbf{V} = 29.1$ lb ↙; $\mathbf{M} = 540$ lb · in. ↺.
7.10 *a)* 30.0 lb en *C*. *b)* 33.5 lb en *B* y *D*. *c)* 960 lb · in. en *C*.
7.13 (Sobre *AJ*) $\mathbf{F} = 194.6$ N ⦨ 60°; $\mathbf{V} = 257$ N ∡ 30°; $\mathbf{M} = 24.7$ N · m ↻.
7.14 45.2 N · m para $\theta = 82.9°$.
7.15 *a)* $\mathbf{F} = 500$ N ←; $\mathbf{V} = 500$ N ↑; $\mathbf{M} = 300$ N · m ↻. *b)* $\mathbf{F} = 970$ N ↑; $\mathbf{V} = 171.0$ N ←; $\mathbf{M} = 446$ N · m ↻.
7.16 *a)* $\mathbf{F} = 500$ N ←; $\mathbf{V} = 500$ N ↑; $\mathbf{M} = 300$ N · m ↻. *b)* $\mathbf{F} = 933$ N ↑; $\mathbf{V} = 250$ N ←; $\mathbf{M} = 375$ N · m ↻.
7.17 (Sobre *BJ*) $\mathbf{F} = 200$ N ↘; $\mathbf{V} = 120.0$ N ↗; $\mathbf{M} = 120.0$ N · m ↺.
7.18 (Sobre *AK*) $\mathbf{F} = 520$ N ←; $\mathbf{V} = 120.0$ N ↓; $\mathbf{M} = 96.0$ N · m ↻.
7.19 150.0 lb · in. en *D*.
7.20 105.0 lb · in. en *E*.
7.23 (Sobre *BJ*) 0.289 *Wr* ↺.
7.24 (Sobre *BJ*) 0.417 *Wr* ↺.
7.27 0.1009 *Wr* para $\theta = 57.3°$.
7.28 0.357 *Wr* para $\theta = 49.3°$.
7.29 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 2P$; $|M|_{\text{máx}} = 3Pa$.
7.30 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 2P/3$; $|M|_{\text{máx}} = 2PL/9$.
7.31 *b)* $wL/4$; $3\,wL^2/32$.
7.32 *b)* $wL/2$; $3\,wL^2/8$.
7.35 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 35.0$ kN; $|M|_{\text{máx}} = 12.50$ kN · m.
7.36 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 50.5$ kN; $|M|_{\text{máx}} = 39.8$ kN · m.
7.39 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 64.0$ kN; $|M|_{\text{máx}} = 92.0$ kN · m.
7.40 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 60.0$ kN; $|M|_{\text{máx}} = 72.0$ kN · m.
7.41 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 18.00$ kips; $|M|_{\text{máx}} = 48.5$ kip · ft.
7.42 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 15.30$ kips; $|M|_{\text{máx}} = 46.8$ kip · ft.
7.43 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 1.800$ kN; $|M|_{\text{máx}} = 0.225$ kN · m.
7.44 *b)* $|V|_{\text{máx}} = 2.00$ kN; $|M|_{\text{máx}} = 0.500$ kN · m.
7.45 *a)* $M \leq 0$ en cualquier punto. *b)* $|V|_{\text{máx}} = 4.50$ kips; $|M|_{\text{máx}} = 13.50$ kip · ft.
7.46 *a)* $M \geq 0$ en cualquier punto. *b)* $|V|_{\text{máx}} = 4.50$ kips; $|M|_{\text{máx}} = 13.50$ kip · ft.
7.49 *a*) +400 N; +160.0 N · m. *b*) −200N; +40.0 N · m.
7.52 $|V|_{\text{máx}} = 7.50$ kips; $|M|_{\text{máx}} = 7.20$ kip · ft.
7.53 $|V|_{\text{máx}} = 165$ lb; $|M|_{\text{máx}} = 1\,625$ lb · in.
7.54 $|V|_{\text{máx}} = 800$ N; $|M|_{\text{máx}} = 180.0$ N · m.
7.55 *a)* 54.5°. *b)* 675 N · m.
7.56 *a)* 0.311 m. *b)* 193.0 N · m.
7.57 *a)* 1.236. *b)* $0.1180\ wa^2$.
7.58 $a = 0.207\ L$

7.59 *a*) 40.0 kips, *b*) 40.0 kip · ft.
7.62 *a*) 0.414 wL; 0.0858 wL^2. *b*) 0.250 wL; 0.250 wL^2.
7.63 $|V|_{máx} = 2P$; $|M|_{máx} = 3Pa$
7.69 $|V|_{máx}$ = 7.20 kN; $|M|_{máx}$ = 5.76 kN · m.
7.70 $|V|_{máx}$ = 720 N; $|M|_{máx}$ = 164.0 N · m.
7.72 $|V|_{máx}$ = 60.0 kN; $|M|_{máx}$ = 72.0 kN · m.
7.77 *b*) 9.00 kN · m, a 1.700 m de *A*.
7.78 *b*) 26.4 kN · m, a 2.05 m de *A*.
7.79 *b*) 45.0 kip · ft, a 12.00 ft de *A*.
7.80 *b*) 12.00 kip · ft, a 6.00 ft de *A*.
7.83 *b*) 40.5 kN · m, a 1.800 m de *A*.
7.84 *b*) 60.5 kN · m, a 2.20 m de *A*.
7.85 *a*) $V = (w_0/6L)(3x^2 - 6Lx + 2L^2)$;
$M = (w_0/6L)(x^3 - 3Lx^2 + 2L^2x)$.
b) $0.0642w_0L^2$, en $x = 0.423L$.
7.86 *a*) $V = (w_0/3L)(2x^2 - 3Lx + L^2)$;
$M = (w_0/18L)(4x^3 - 9Lx^2 + 6L^2x - L^3)$.
b) $w_0L^2/72$, en $x = L/2$.
7.89 *a*) **P** = 4.00 kN ↓; **Q** = 6.00 kN ↓. *b*) M_C = −900 N · m.
7.90 *a*) **P** = 2.50 kN ↓; **Q** = 7.50 kN ↓. *b*) M_C = −900 N · m.
7.91 *a*) **P** = 1.350 kips ↓; **Q** = 0.450 kips ↓.
b) $V_{máx}$ = 2.70 kips en *A*; $M_{máx}$ = 6.345 kip · ft, a 5.40 ft de *A*.
7.92 *a*) **P** = 0.540 kips ↓; **Q** = 1.860 kips ↓.
b) $|V|_{máx}$ = 3.14 kips en *B*; $M_{máx}$ = 6.997 kip · ft, a 6.88 ft de *A*.
7.93 *a*) 2.28 m. *b*) $\mathbf{D}_x$ = 13.67 kN →; $\mathbf{D}_y$ = 7.80 kN ↑.
c) 15.94 kN.
7.94 *a*) 1.959 m. *b*) 2.48 m.
7.95 *a*) 838 lb ⦩ 17.4°. *b*) 971 lb ⦪ 34.5°.
7.96 *a*) 2670 lb ⦫ 2.10°. *b*) 2810 lb ⦪ 18.6°.
7.97 *a*) d_B = 1.733 m; d_D = 4.20 m. *b*) 21.5 kN ⦪ 3.8°.
7.98 *a*) 2.8 m. *b*) **A** = 32.0 kN ⦩ 38.7°; **E** = 25.0 kN →.
7.101 *a*) 48.0 lb. *b*) 10.00 ft.
7.102 *a*) 12.50 ft. *b*) 5.00 ft.
7.103 196.2 N.
7.104 157.0 N.
7.107 *a*) 138.1 m. *b*) 602 N.
7.108 *a*) 6.75 m. *b*) T_{AB} = 615 N; T_{BC} = 600 N.
7.109 *a*) 56 400 kips. *b*) 4 280 ft.
7.110 *a*) 50 200 kips. *b*) 3 580 ft.
7.113 *a*) $\sqrt{3L\Delta/8}$. *b*) 12.25 ft.
7.114 3.75 ft.
7.115 *a*) 58 940 kips. *b*) 29.2°.
7.116 *a*) 16.00 ft a la izquierda de *B*. *b*) 2 000 lb.
7.117 *a*) 5 880 N. *b*) 0.873 m.
7.118 *a*) 6 860 N. *b*) 31.0°.
7.125 $y = h[1 - \cos(\pi x/L)]$; $T_0 = w_0L^2/h\pi^2$;
$T_{máx} = (w_0L/\pi)\sqrt{(L^2/h^2\pi^2) + 1}$.
7.127 *a*) 26.7 m. *b*) 70.3 kg.
7.128 199.5 ft
7.129 *a*) 164.8 m. *b*) 4 290 N.
7.130 330 ft; 625 lb.
7.133 *a*) 5.89 m. *b*) 10.89 N →.
7.134 10.05 ft.
7.135 *a*) 30.2 m. *b*) 56.6 kg.
7.136 *a*) 56.3 ft. *b*) 2.36 lb/ft.
7.139 31.8 N.
7.140 29.8 N.
7.141 *a*) a = 79.0 ft; b = 60.0 ft. *b*) 103.9 ft.
7.142 *a*) a = 65.8 ft; b = 50.0 ft. *b*)= 86.6 ft.
7.143 119.1 N →.
7.144 177.6 N →.
7.147 3.50 ft.
7.148 5.71 ft.
7.151 0.394 m y 10.97 m.
7.152 0.1408.
7.153 *a*) 0.338. *b*) 56.5°; 0.755 wL.
7.154 *a*) 1500 N. *b*) (Sobre *ABJ*) **F** = 1 324 N ↑;
V = 706 N ←; **M** = 229 N · m ↰.
7.155 (Sobre *BJ*) **F** = 250 N ↘; **V** = 120.0 N ↗; **M** = 120.0 N · m ↰.
7.156 *a*) (Sobre *AC*) **F** = **V** = 0; **M** = 450 lb · ft ↰.
b) (Sobre *AC*) **F** = 250 lb ↙; **V** = 0; **M** = 450 lb · ft ↰.
7.157 *a*) 90.0 lb. *b*) 900 lb · in.
7.159 *b*) 41.4 kN; 35.3 kN · m.
7.160 *a*) 12.00 kip · ft, en *C*. *b*) 6.25 kip · ft, 2.50 ft de *A*.
7.162 *a*) 1 229 lb. *b*) 11.00 ft.
7.164 *a*) 2 770 N. *b*) 75.14 m.
7.C1 *a*) M_D = +39.8 kN · m. *b*) M_D = +14.00 kip · ft.
c) M_D = +1 800 lb · in.
7.C3 a = 1.923 m; $M_{máx}$ = 37.0 kN · m a 4.64 m de *A*.
7.C4 *b*) $M_{máx}$ = 5.42 kip · ft cuando x = 8.5 ft y 11.5 ft.
7.C8 $c/L = 0.300$: $h/L = 0.5225$; $s_{AB}/L = 1.532$;
$T_0/wL = 0.300$; $T_{máx}/wL = 0.823$.

CAPÍTULO 8

8.1 Equilibrio; **F** = 34.5 lb ↘.
8.2 El bloque se mueve; **F** = 55.7 lb ↖.
8.3 Equilibrio; **F** = 48.3 N ↖.
8.4 El bloque se mueve; **F** = 103.5 N ↖.
8.5 225 N ≤ P ≤ 479 N.
8.6 143.0 N ≤ P ≤ 483 N.
8.7 *a*) 105.8 N. *b*) 46.0°.
8.9 *a*) 403 N. *b*) 229 N.
8.11 *a*) 353 N ←. *b*) 196.2 N ←.
8.12 *a*) 275 N ←. *b*) 196.2 N ←.
8.15 *a*) 36.0 lb →. *b*) 30.0 lb. *c*) 12.86 lb →.
8.16 *a*) 36.0 lb →. *b*) 40.0 in.
8.17 $M = Wr\mu_s\,(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$.
8.18 *a*) 0.300 Wr. *b*) 0.349 Wr.
8.19 151.5 N · m.
8.20 1.473 kN.
8.21 0.208.
8.23 *a*) 136.4°. *b*) 0.928 W.
8.25 0.750.
8.26 0.860.
8.27 132.9 lb ↓.
8.28 *a*) 112.5 N. *b*) 8.81 mm.
8.29 $3.46 \leq \frac{L}{a} \leq 13.63$.
8.30 *a*) La placa está en equilibrio. *b*) La placa se mueve hacia abajo.
8.31 10.00 lb < P < 36.7 lb.
8.34 135.0 lb.
8.36 168.4 N ≤ P ≤ 308 N.
8.37 9.38 N · m ≤ M ≤ 15.01 N · m.
8.38 −46.8 N ≤ P ≤ 34.3 N.
8.39 *b*) 2.69 lb.
8.41 0.0949.
8.42 *a*) El sistema se desliza; P = 62.8 N.
b) El sistema gira alrededor de *B*; P = 73.2 N.
8.43 35.8°.
8.44 20.5°.
8.45 1.225 W.

8.46 *a)* $\mathbf{P} = 56.6$ lb ←. *b)* $\mathbf{B}_x = 82.6$ lb ←; $\mathbf{B}_y = 96.0$ lb ↓.

8.47 *a)* $\mathbf{P} = 21.4$ lb →. *b)* $\mathbf{B}_x = 122.2$ lb ←; $\mathbf{B}_y = 96.0$ lb ↓.

8.48 $\mathbf{P} = 2\ 080$ N ↓.

8.49 $\mathbf{P} = 1\ 966$ N ↓.

8.52 *a)* 62.7 lb. *b)* 62.7 lb.

8.53 9.86 kN ←.

8.54 913 N ←.

8.55 *a)* 28.1°. *b)* 728 N ∠ 14.0°.

8.56 29.9 lb.

8.57 67.4 N.

8.60 *b)* 283 N ←.

8.61 0.442.

8.62 *a)* 90.0 lb. *b)* La base se mueve.

8.63 *a)* 89.4 lb. *b)* La base no se mueve.

8.64 0.1103.

8.65 0.1013.

8.69 1068 N · m.

8.70 4.18 N · m.

8.72 169.7 lb · in.

8.73 32.7 lb · in.

8.75 0.098.

8.76 450 N.

8.77 412 N.

8.78 344 N.

8.79 376 N.

8.80 0.226.

8.82 $T_{AB} = 77.5$ lb; $T_{CD} = 72.5$ lb; $T_{EF} = 67.8$ lb.

8.85 22.0 lb ←.

8.86 1.948 lb ↓.

8.87 18.01 lb ←.

8.88 *a)* 4.80 kN. *b)* 1.375°.

8.90 3.75 lb.

8.91 0.1670.

8.96 154.4 N.

8.97 0.0600 in.

8.98 10.87 lb

8.99 *a)* 1.288 kN. *b)* 1.058 kN.

8.100 300 mm.

8.101 *a)* 0.329. *b)* 2.67 vueltas.

8.102 *a)* 22.8 kg. *b)* 291 N.

8.103 *a)* 109.7 kg. *b)* 828 N.

8.104 $73.0 \text{ lb} \leq P \leq 1\ 233$ lb.

8.107 35.1 N · m

8.108 *a)* 27.0 N · m *b)* 675 N.

8.109 *a)* 39.0 N · m. *b)* 844 N.

8.110 421 lb · in.

8.111 301 lb · in.

8.112 44.9 N · m ↺.

8.115 4.49 in.

8.116 *a)* 11.66 kg. *b)* 38.6 kg. *c)* 34.4 kg.

8.117 *a)* 9.46 kg. *b)* 167.2 kg. *c)* 121.0 kg.

8.120 *a)* 10.39 lb. *b)* 58.5 lb.

8.121 *a)* y *b)* 28.9 lb.

8.122 5.97 N.

8.123 9.56 N.

8.124 *a)* 30.3 lb · in ↺. *b)* 3.78 lb ↓.

8.125 *a)* 17.23 lb · in ↻. *b)* 2.15 lb ↑.

8.126 0.350.

8.131 *a)* 51.0 N · m. *b)* 875 N.

8.132 *a)* 170.5 N. *b)* 14.04°.

8.133 53.5°

8.135 $6.35 \leq L/a \leq 10.81$.

8.136 0.0533.

8.138 0.225.

8.139 *a)* 620 N ←. *b)* $\mathbf{B}_x = 1\ 390$ N ←; $\mathbf{B}_y = 1\ 050$ N ↓.

8.140 *a)* y *b)* 50.4 lb.

8.142 *a)* 0.238. *b)* 218 N ↓.

8.C1 $x = 500\ mm$: 63.3 N; $P_{\text{máx}} = 67.8$ N en $x = 355$ mm.

8.C2 $W_B = 10\ lb$: $\theta = 46.4°$; $W_B = 70\ lb$: $\theta = 21.3°$.

8.C3 $\mu_A = 0.25$: $M = 0.0603$ N · m.

8.C4 $\theta = 30°$: $1.336 \text{ N} \cdot \text{m} \leq M_A \leq 2.23 \text{ N} \cdot \text{m}$.

8.C5 $\theta = 60°$: $\mathbf{P} = 16.40$ lb ↓; $R = 5.14$ lb.

8.C6 $\theta = 20°$: 10.39 N · m.

8.C7 $\theta = 20°$: 30.3 lb; 13.25 lb.

8.C8 *a)* $x_0 = 0.600L$; $x_m = 0.604L$; $\theta_1 = 5.06°$. *b)* $\theta_2 = 55.4°$.

CAPÍTULO 9

9.1 $b^3h/12$.

9.2 $3a^4/2$.

9.3 $2a^3b/15$.

9.4 $ha^3/5$

9.6 $a^4/8$.

9.7 $2ab^3/7$.

9.9 $ab^3/15$.

9.10 $0.1056\ ab^3$.

9.11 $ab^3/15$.

9.12 $2a^3b/21$.

9.15 $ab^3/10$; $b/\sqrt{5}$.

9.16 $3ab^3/35$; $b\sqrt{9/35}$.

9.17 $a^3b/6$; $a/\sqrt{3}$.

9.18 $3a^3b/35$; $b\sqrt{9/35}$.

9.21 $20a^4$; $1.826a$.

9.22 $43a^4/48$; $0.773a$

9.23 $(\pi/2)(R_2^4 - R_1^4)$; $(\pi/4)(R_2^4 - R_1^4)$

9.24 *b)* Para $t/R_m = 1$, -10.56%; para $t/R_m = \frac{1}{2}$, $-2{,}99\%$, para $t/R_m = \frac{1}{10}$, -0.1250%.

9.25 $64a^4/15$; $1.265a$.

9.28 $bh\ (12h^2 + b^2)/48$; $\sqrt{(12h^2 + b^2)/24}$

9.31 390×10^3 mm^4; 21.9 mm.

9.32 46.0 in.^{4}; 1.599 in.

9.33 64.3×10^3 mm^4; 8.87 mm.

9.34 46.5 in.^{4}; 1.607 in.

9.37 $I = 9.50 \times 10^6$ mm^4; $d_2 = 60.0$ mm.

9.38 $A = 6\ 600$ mm^2; $\bar{I} = 3.72 \times 10^6$ mm^4.

9.39 $\bar{I}_x = 150.0$ in.^{4}; $\bar{I}_y = 300$ in.^{4}

9.41 $\bar{I}_x = 1.874 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 5.82 \times 10^6$ mm^4.

9.42 $\bar{I}_x = 48.9 \times 10^3$ mm^4; $\bar{I}_y = 8.35 \times 10^3$ mm^4.

9.43 $\bar{I}_x = 191.3$ in.^{4}; $\bar{I}_y = 75.2$ in.^{4}

9.44 $\bar{I}_x = 18.13$ in.^{4}; $\bar{I}_y = 4.51$ in.^{4}

9.45 *a)* 80.9×10^6 mm^4. *b)* 57.4×10^6 mm^4.

9.46 *a)* 12.16×10^6 mm^4. *b)* 9.73×10^6 mm^4.

9.49 $\bar{I}_x = 260 \times 10^6$ mm^4; $\bar{k}_x = 144.6$ mm; $\bar{I}_y = 17.53 \times 10^6$ mm^4; $\bar{k}_y = 37.6$ mm.

9.50 $\bar{I}_x = 254$ in.^{4}; $\bar{k}_x = 4.00$ in.; $\bar{I}_y = 102.1$ in.^{4}; $\bar{k}_y = 2.54$ in.

9.51 $\bar{I}_x = 255 \times 10^6$ mm^4; $\bar{k}_x = 134.1$ mm; $\bar{I}_y = 100.0 \times 10^6$ mm^4; $\bar{k}_y = 83.9$ mm.

9.52 1.077 in.

9.53 $\bar{I}_x = 3.55 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 49.8 \times 10^6$ mm^4.

9.55 $\bar{I}_x = 745 \times 10^6$ mm^4; $\bar{I}_y = 91.3 \times 10^6$ mm^4.

9.57 $3\pi r/16$.

9.58 $3\pi b/16$.

9.59 $15h/14$.

9.60 $4h/7$.

9.63 $5a/8$.

9.64 80.0 mm.

9.67 $a^4/2$.
9.68 $a^2b^2/12$.
9.69 $-b^2h^2/8$.
9.71 $-1.760 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.72 $-21.6 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.74 $-0.380\ \text{in}^4$.
9.75 $471 \times 10^3\ \text{mm}^4$.
9.76 $-9\,010\ \text{in.}^4$
9.78 $1.165 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.79 *a)* $\bar{I}_{x'} = 0.482a^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.482a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -0.589a^4$.
b) $\bar{I}_{x'} = 1.120a^4$; $\bar{I}_{y'} = 0.843a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.760a^4$.
9.80 $\bar{I}_{x'} = 103.5 \times 10^6\ \text{mm}^4$; $\bar{I}_{y'} = 97.9 \times 10^6\ \text{mm}^4$;
$\bar{I}_{x'y'} = -38.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.81 $\bar{I}_{x'} = 1\,033\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{y'} = 2\,020\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -873\ \text{in.}^4$
9.83 $\bar{I}_{x'} = 0.236\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.244\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.1132\ \text{in.}^4$
9.85 $20.2°$; $1.754a^4$, $0.209a^4$.
9.86 $-17.11°$; $139.1 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $62.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.87 $29.7°$; $2\,530\ \text{in.}^4$, $524\ \text{in.}^4$
9.89 $-23.7°$ y $66.3°$; $1.257\ \text{in.}^4$, $0.224\ \text{in.}^4$
9.91 *a)* $\bar{I}_{x'} = 0.482a^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.482a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -0.589a^4$.
b) $\bar{I}_{x'} = 1.120a^4$; $\bar{I}_{y'} = 0.843a^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.760a^4$.
9.92 $\bar{I}_{x'} = 103.5 \times 10^6\ \text{mm}^4$; $\bar{I}_{y'} = 97.9 \times 10^6\ \text{mm}^4$;
$\bar{I}_{x'y'} = -38.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.93 $\bar{I}_{x'} = 1\,033\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{y'} = 2\,020\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = -873\ \text{in.}^4$
9.95 $\bar{I}_{x'} = 0.236\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{y'} = 1.244\ \text{in.}^4$; $\bar{I}_{x'y'} = 0.1132\ \text{in.}^4$
9.97 $20.2°$; $1.754a^4$, $0.209a^4$.
9.98 $-17.11°$; $139.1 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $62.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.99 $-33.4°$; $22.1 \times 10^3\ \text{in.}^4$, $2490\ \text{in.}^4$
9.100 $29.7°$; $2\,530\ \text{in.}^4$, $524\ \text{in.}^4$
9.103 *a)* $-1.146\ \text{in.}^4$. *b)* $29.1°$ en el sentido de las manecillas del reloj. *c)* $3.39\ \text{in.}^4$
9.104 $23.8°$ en el sentido de las manecillas del reloj; $0.524 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $0.0917 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.105 $19.54°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj; $4.34 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $0.647 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.106 *a)* $25.3°$. *b)* $1459\ \text{in.}^4$, $40.5\ \text{in.}^4$
9.107 *a)* $88.0 \times 10^6\ \text{mm}^4$. *b)* $96.3 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $39.7 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.111 *a)* $m(r_1^2 + r_2^2)/4$. *b)* $m(r_1^2 + r_2^2)/2$.
9.112 *a)* $0.0699\ ma^2$. *b)* $0.320\ ma^2$.
9.113 *a)* $25\ mr_2^2/64$. *b)* $0.1522\ mr_2^2$.
9.114 *a)* $mb^2/7$. *b)* $m(7a^2 + 10b^2)/70$.
9.115 *a)* $ma^2/3$. *b)* $3ma^2/2$.
9.116 *a)* $7ma^2/6$. *b)* $ma^2/2$.
9.119 $1.329\ mh^2$.
9.120 $m(3a^2 + L^2)/12$.
9.121 *a)* $0.241\ mh^2$. *b)* $m(3a^2 + 0.1204\ h^2)$.
9.122 $mb^2 + h^2)/10$.
9.124 $ma^2 + b^2)/5$.
9.125 $I_x = I_y = ma^2/4$; $I_z = ma^2/2$
9.127 $837 \times 10^{-9}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; 6.92 mm.
9.128 $1.160 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; 0.341 in.
9.129 $m(3a^2 + 2h^2)/6$
9.131 *a)* 27.5 mm a la derecha de A. *b)* 32.0 mm.
9.133 *a)* 2.30 in. *b)* $20.6 \times 10^{-3}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; 2.27 in.
9.134 *a)* $\pi\rho l^2\left[6a^2t\left(\frac{5a^2}{3l^2} + \frac{2a}{l} + 1\right) + \frac{d^2l}{4}\right]$. *b)* 0.1851.
9.135 $I_x = 26 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = 38.2 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_z = 17.55 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.136 $I_x = 175.5 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = 309 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_z = 154.4 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.137 $I_x = 745 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_y = 896 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
$I_z = 304 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
9.138 $I_x = 344 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_y = 132.1 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
$I_z = 453 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
9.141 *a)* $13.99 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. *b)* $20.6 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
c) $14.30 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.142 $0.1785\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
9.144 $I_x = 38.1 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $k_x = 110.7$ mm.
9.145 *a)* $26.4 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. *b)* $31.2 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
c) $8.58 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.147 $I_x = 0.0392\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_y = 0.0363\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
$I_z = 0.0304\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
9.148 $I_x = 0.323\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $I_y = I_z = 0.419\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.149 $I_{xy} = 2.50 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 4.06 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_{zx} = 8.81 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.150 $I_{xy} = 2.44 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 1.415 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_{zx} = 4.59 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.151 $I_{xy} = -538 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_{yz} = -171.4 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
$I_{zx} = 1\,120 \times 10^{-6}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
9.152 $I_{xy} = -1.726 \times 10^{-3}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$; $I_{yz} = 0.507 \times 10^{-3}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$;
$I_{zx} = -2.12 \times 10^{-3}\ \text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
9.155 $I_{xy} = -8.04 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 12.90 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_{zx} = 94.0 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.156 $I_{xy} = 0$; $I_{yz} = 48.3 \times 10^{-6}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_{zx} = -4.43 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.157 $I_{xy} = wa^3(1 - 5\pi)/g$; $I_{yz} = -11\ \pi wa^3/g$;
$I_{zx} = 4\ wa^3(1 + 2\pi)g$.
9.158 $I_{xy} = -11\ wa^3/g$; $I_{yz} = wa^3(\pi + 6)/2g$; $I_{zx} = -wa^3/4g$.
9.159 $I_{xy} = 47.9 \times 10^{-6}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $I_{yz} = 102.1 \times 10^{-6}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$I_{zx} = 64.1 \times 10^{-6}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.160 $I_{xy} = -m'R_1^3/2$; $I_{yz} = m'R_1^3/2$; $I_{zx} = -m'R_2^3/2$.
9.162 *a)* $mac/20$. *b)* $I_{xy} = mab/20$; $I_{yz} = mbc/20$.
9.165 $18.17 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.166 $11.81 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.167 $5\ Wa^2/18g$.
9.168 $4.41\ \gamma ta^4/g$.
9.169 $281 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.170 $0.354\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
9.173 *a)* $b/a = 2$; $c/a = 2$. *b)* $b/a = 1$; $c/a = 0.5$.
9.174 *a)* 2. *b)* $\sqrt{2/3}$.
9.175 *a)* $1/\sqrt{3}$. *b)* $\sqrt{7/12}$.
9.179 *a)* $K_1 = 0.363ma^2$; $K_2 = 1.583ma^2$; $K_3 = 1.720ma^2$.
b) $(\theta_x)_1 = (\theta_z)_1 = 49.7°$, $(\theta_y)_1 = 113.7°$;
$(\theta_x)_2 = 45°$, $(\theta_y)_2 = 90°$, $(\theta_z)_2 = 135°$;
$(\theta_x)_3 = (\theta_z)_3 = 73.5°$, $(\theta_y)_3 = 23.7°$.
9.180 *a)* $K_1 = 14.30 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$;
$K_2 = 13.96 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$; $K_3 = 20.6 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$.
b) $(\theta_x)_1 = (\theta_y)_1 = 90.0°$, $(\theta_z)_1 = 0$;
$(\theta_x)_2 = 3.42°$, $(\theta_y)_2 = 86.6°$, $(\theta_z)_2 = 90.0°$.
$(\theta_x)_3 = 93.4°$, $(\theta_y)_3 = 3.4°$, $(\theta_z)_3 = 90.0°$.
9.182 *a)* $K_1 = 0.1639Wa^2/g$; $K_2 = 1.054Wa^2/g$; $K_3 = 1.115Wa^2/g$.
b) $(\theta_x)_1 = 36.7°$, $(\theta_y)_1 = 71.6°$, $(\theta_z)_1 = 59.5°$;
$(\theta_x)_2 = 74.9°$, $(\theta_y)_2 = 54.5°$, $(\theta_z)_2 = 140.5°$;
$(\theta_x)_3 = 57.5°$, $(\theta_y)_3 = 138.8°$, $(\theta_z)_3 = 112.4°$.
9.183 *a)* $K_1 = 2.26\gamma ta^4/g$; $K_2 = 17.27\gamma ta^4/g$; $K_3 = 19.08\gamma ta^4/g$.
b) $(\theta_x)_1 = 85.0°$, $(\theta_y)_1 = 36.8°$, $(\theta_z)_1 = 53.7°$;
$(\theta_x)_2 = 81.7°$, $(\theta_y)_2 = 54.7°$, $(\theta_z)_2 = 143.4°$;
$(\theta_x)_3 = 9.70°$, $(\theta_y)_3 = 99.0°$, $(\theta_z)_3 = 86.3°$.
9.185 $I_x = ab^3/28$; $I_y = a^3b/20$.
9.187 $4a^3b/15$; $a/\sqrt{5}$.
9.188 $I_x = 4a^4$; $I_y = 16\ a^4/3$.
9.189 *a)* $3.13 \times 10^6\ \text{mm}^4$. *b)* $2.41 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.190 $I_x = 634 \times 10^6\ \text{mm}^4$; $I_y = 38.0 \times 10^6\ \text{mm}^4$.
9.191 $I_{xy} = -2.81\ \text{in.}^4$

9.193 *a*) $7\ ma^2/18$. *b*) $0.819\ ma^2$.
9.195 $I_x = 0.877\ kg \cdot m^2$; $I_y = 1.982\ kg \cdot m^2$; $I_z = 1.652\ kg \cdot m^2$.
9.C1 $\theta = 20°$: $I_{x'} = 14.20\ in.^4$, $I_{y'} = 3.15\ in.^4$, $I_{x'y'} = -3.93\ in.^4$
9.C3 *a*) $\bar{I}_{x'} = 371 \times 10^3\ mm^4$, $\bar{I}_{y'} = 64.3 \times 10^3\ mm^4$; $\bar{k}_{x'} = 21.3$ mm, $\bar{k}_{y'} = 8.87$ mm. *b*) $\bar{I}_{x'} = 40.4\ in.^4$, $\bar{I}_{y'} = 46.5\ in.^4$; $\bar{k}_{x'} = 1.499$ in., $\bar{k}_{y'} = 1.607$ in. *c*) $\bar{k}_x = 2.53$ in., $\bar{k}_y = 1.583$ in. *d*) $\bar{k}_x = 1.904$ in., $\bar{k}_y = 0.950$ in.
9.C5 *a*) $5.99 \times 10^{-3}\ kg \cdot m^2$. *b*) $77.4 \times 10^{-3}\ kg \cdot m^2$.
9.C6 *a*) $74.0 \times 10^{-6}\ lb \cdot ft \cdot s^2$. *b*) $645 \times 10^{-6}\ lb \cdot ft \cdot s^2$. *c*) $208 \times 10^{-6}\ lb \cdot ft \cdot s^2$.

CAPÍTULO 10

10.1 82.5 N ↓.
10.2 120 lb →.
10.3 49.5 N · m ↓.
10.4 1 200 lb · in. ↰.
10.7 *a*) 60.0 N *C*, 8.00 mm ↓. *b*) 300 N *C*, 40.0 mm ↓.
10.8 *a*) 120.0 N *C*, 16.00 mm ↓. *b*) 300 N *C*, 40.0 mm ↓.
10.9 $Q = 2P \text{ sen } \theta/\cos \theta/2$.
10.10 $Q = 2P \cos \theta/\cos \theta/2$.
10.11 $Q = (3P/2) \tan \theta$
10.12 $Q = P[(l/a)\cos^3 \theta - 1]$.
10.15 $M = \frac{1}{2}Wl \tan \alpha \text{ sen } \theta$.
10.16 $M = Pl/2 \tan \theta$.
10.17 $M = 7Pa \cos \theta$
10.18 *a*) $M = Pl \text{ sen } 2\theta$. *b*) $M = 3Pl \cos \theta$. *c*) $M = Pl \text{ sen } \theta$.
10.21 85.2 lb · ft ↓.
10.22 22.8 lb ⦣ 70.0°.
10.24 36.4°.
10.25 38.7°.
10.26 68.0°.
10.28 19.81° y 51.9°.
10.30 25.0°.
10.31 39.7° y 69.0°.
10.32 52.2°.
10.33 40.2°.
10.35 22.6°.
10.36 51.1°.
10.37 52.4°.
10.38 19.40°.
10.39 59.0°.
10.40 78.7°, 324°, 379°.
10.43 12.03 kN ↘.
10.44 20.4°.
10.45 2 370 lb ↖.
10.46 2 550 lb ↖.
10.47 $\eta = 1/(1 + \mu \cot \alpha)$
10.49 37.6 N, 31.6 N.
10.51 300 N · m, 81.8 N · m.
10.52 $\eta = \tan \theta/\tan (\theta + \phi_s)$.
10.53 7.75 kN ↑.
10.54 $H = 1.361$ kN ↑; $M_H = 550$ N · m ↰.
10.57 0.833 in. ↓.
10.58 0.625 in. →.
10.66 19.40°.
10.67 El equilibrio es neutro.
10.69 $\theta = 0$ y $\theta = 180.0°$, inestable; $\theta = 75.5°$ y $\theta = 284°$, estable.
10.70 $\theta = 90.0°$ y $\theta = 270°$ inestable; $\theta = 22.0°$ y $\theta = 158.0°$, estable.
10.71 $\theta = -45.0°$, inestable; $\theta = 135.0°$, estable.
10.72 $\theta = -63.4°$, inestable; $\theta = 116.6°$, estable.
10.73 59.0° estable.
10.74 78.7°, estable; 324°, inestable; 379°, estable.
10.78 9.39° y 90.0°, estable; 34.2°, inestable.
10.79 357 mm.
10.80 252 mm.
10.81 17.11°, estable; 72.9°, inestable.
10.83 49.1°.
10.85 54.8°.
10.86 37.4°.
10.88 16.88 m.
10.90 $k > 6.94$ lb/in.
10.91 15.00 in.
10.92 $P < 2kL/9$.
10.93 $P < kL/18$.
10.94 $P < k(l - a)^2/2l$.
10.96 $P < 160.0$ N.
10.98 $P < 764$ N.
10.100 *a*) $P < 10.00$ lb. *b*) $P < 20.0$ lb.
10.101 60.0 lb ↓.
10.102 600 lb · in. ↓.
10.104 *a*) 20.0 N. *b*) 105.0 N.
10.106 39.2°.
10.107 60.4°.
10.108 7.13 in.
10.110 *a*) 0, inestable. *b*) 137.8°, estable
10.112 *a*) 22.0°. *b*) 30.6°.
10.C1 $\theta = 60°$: 2.42 in.; $\theta = 120°$: 1.732 in.; $(M/P)_{máx} = 2.52$ in. en $\theta = 73.7°$.
10.C2 $\theta = 60°$: 171.1 N *C*. Para $32.5° \leq \theta \leq 134.3°$, $|F| \leq 400$ N.
10.C3 $\theta = 60°$: 296 N *T*. Para $\theta \leq 125.7°$, $|F| \leq 400$ N.
10.C4 *b*) $\theta = 60°$, *nivel de referencia en C*: $V = -294$ in · lb. *c*) 34.2°, estable; 90°, inestable; 145.8°, estable
10.C5 *b*) $\theta = 50°$, *nivel de referencia en E*: $V = 100.5$ J. $dV/d\theta = 22.9$ J. *c*) $\theta = 0$, inestable; 30.4°.
10.C6 *b*) $\theta = 60°$, *nivel de referencia en B*: 30.0 J. *c*) $\theta = 0$, inestable; 41.4°, estable.
10.C7 *b*) $\theta = 60°$, *nivel de referencia en* $\theta = 0$: −37.0 J. *c*) 52.2°, estable

Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	tera	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^{9}$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^{6}$	mega	M
$1\ 000 = 10^{3}$	kilo	k
$100 = 10^{2}$	hecto†	h
$10 = 10^{1}$	deca†	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci†	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi†	c
$0.001 = 10^{-3}$	mili	m
$0.000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$	ato	a

†Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . .	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	rad/s
Área	Metro cuadrado	. . .	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

†Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).
‡Unidad básica.

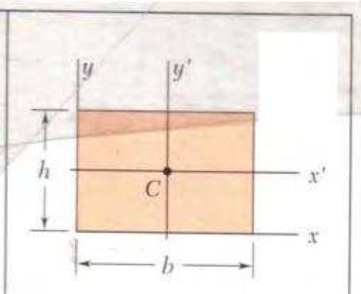
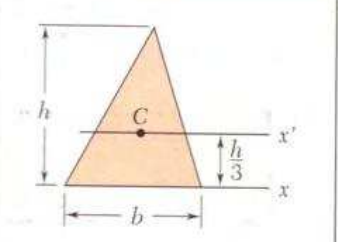
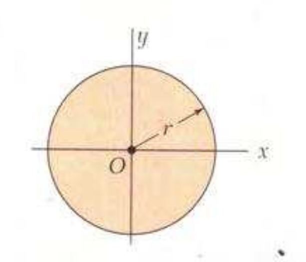
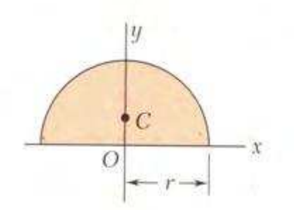
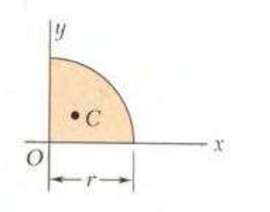
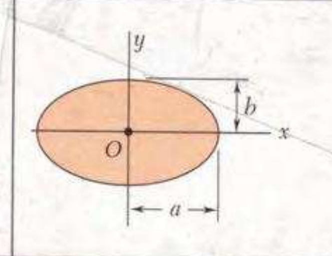
Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalentes en unidades SI

Cantidad	Unidades de uso común en Estados Unidos	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s^2	$0.3048\ m/s^2$
	$in./s^2$	$0.0254\ m/s^2$
Área	ft^2	$0.0929\ m^2$
	in^2	$645.2\ mm^2$
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	$in.^4$	$0.4162 \times 10^6\ mm^4$
de una masa	$lb \cdot ft \cdot s^2$	$1.356\ kg \cdot m^2$
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft^2	47.88 Pa
	$lb/in.^2$ (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft^3	$0.02832\ m^3$
	$in.^3$	$16.39\ cm^3$
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J

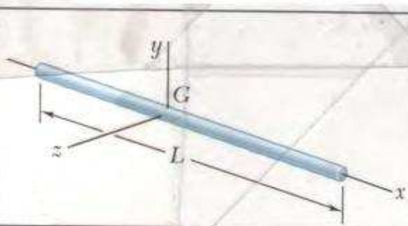
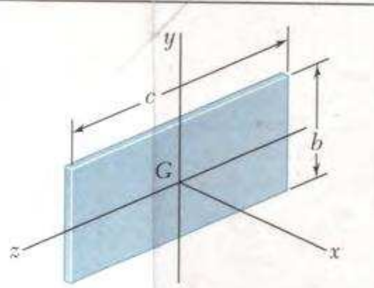
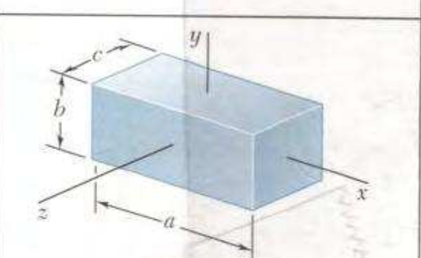
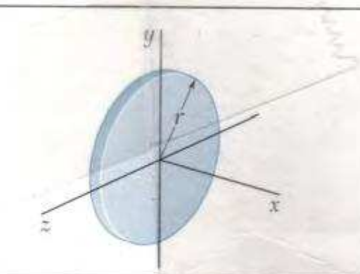
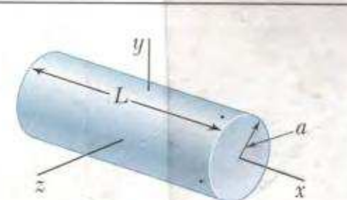
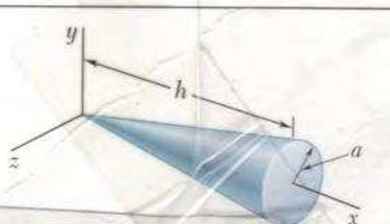
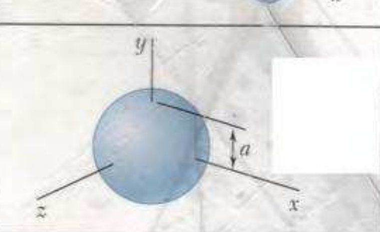
Centroides de áreas y líneas comunes

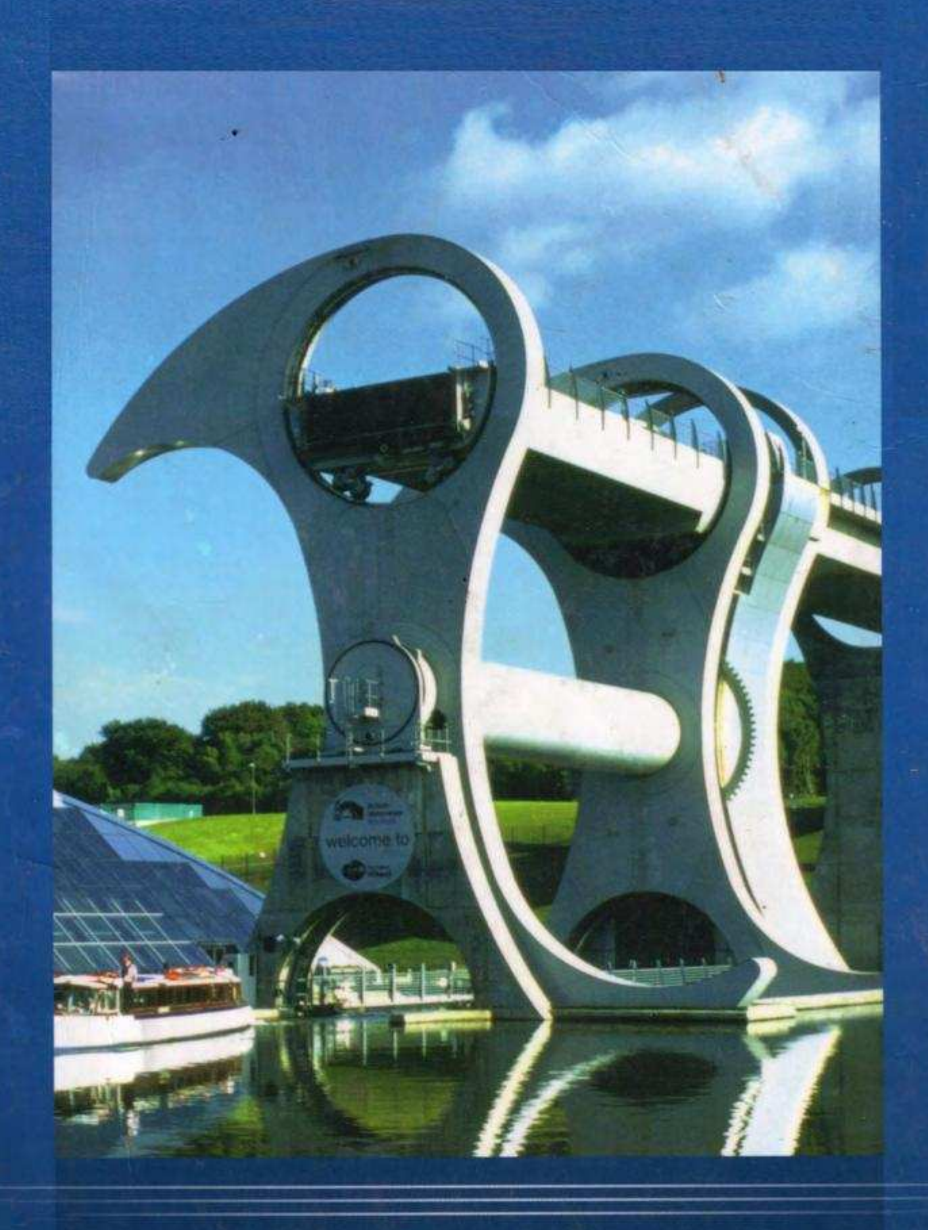
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular		$(1/3\ (a + b))$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Tímpano parabólico	$y = kx^2$	$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de un círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Momentos de inercia de formas geométricas comunes

Rectángulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh\ b^2 + h^2)$	
Triángulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	
Círculo $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	
Semicírculo $I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$	
Cuarto de círculo $I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$	
Elipse $\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$	

Momentos de inercia de formas geométricas comunes

Barra delgada $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$	
Placa rectangular delgada $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$	
Prisma rectangular $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	
Disco delgado $I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$	
Cilindro circular $I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$	
Cono circular $I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$	
Esfera $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$	



Mc Graw Hill Educación

The McGraw·Hill Companies


978-607-15-0277-3

Visite nuestra página WEB
www.mcgraw-hill-educacion.com